This is a digital copy of a book that was preserved for generations on library shelves before it was carefully scanned by Google as part of a project to make the world's books discoverable online.

It has survived long enough for the copyright to expire and the book to enter the public domain. A public domain book is one that was never subject to copyright or whose legal copyright term has expired. Whether a book is in the public domain may vary country to country. Public domain books are our gateways to the past, representing a wealth of history, culture and knowledge that's often difficult to discover.

Marks, notations and other marginalia present in the original volume will appear in this file - a reminder of this book's long journey from the publisher to a library and finally to you.

Usage guidelines

Google is proud to partner with libraries to digitize public domain materials and make them widely accessible. Public domain books belong to the public and we are merely their custodians. Nevertheless, this work is expensive, so in order to keep providing this resource, we have taken steps to prevent abuse by commercial parties, including placing technical restrictions on automated querying.

We also ask that you:

+ *Make non-commercial use of the files* We designed Google Book Search for use by individuals, and we request that you use these files for personal, non-commercial purposes.

+ *Refrain from automated querying* Do not send automated queries of any sort to Google's system: If you are conducting research on machine translation, optical character recognition or other areas where access to a large amount of text is helpful, please contact us. We encourage the use of public domain materials for these purposes and may be able to help.

+ *Maintain attribution* The Google "watermark" you see on each file is essential for informing people about this project and helping them find additional materials through Google Book Search. Please do not remove it.

+ *Keep it legal* Whatever your use, remember that you are responsible for ensuring that what you are doing is legal. Do not assume that just because we believe a book is in the public domain for users in the United States, that the work is also in the public domain for users in other countries. Whether a book is still in copyright varies from country to country, and we can't offer guidance on whether any specific use of any specific book is allowed. Please do not assume that a book's appearance in Google Book Search means it can be used in any manner anywhere in the world. Copyright infringement liability can be quite severe.

About Google Book Search

Google's mission is to organize the world's information and to make it universally accessible and useful. Google Book Search helps readers discover the world's books while helping authors and publishers reach new audiences. You can search through the full text of this book on the web at `http://books.google.com/`

UC-NRLF
$B 35 850

Barder, Arithmetische Aufgaben

Neue Bearbeitung

Digitized by Google

THE LIBRARY
OF
THE UNIVERSITY
OF CALIFORNIA

PRESENTED BY
PROF. CHARLES A. KOFOID AND
MRS. PRUDENCE W. KOFOID

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

Dr. E. Bardeys

Arithmetische Aufgaben

nebst Lehrbuch der Arithmetik

vorzugsweise für
Realschulen, Progymnasien und Realprogymnasien

In alter und neuer Ausgabe

Neue Ausgabe

bearbeitet von

J. Pietzker
Professor am Gymnasium
zu Nordhausen

und

O. Presler
Professor an der Oberrealschule
zu Hannover

Dritte Auflage

Leipzig und Berlin
Druck und Verlag von B. G. Teubner
1906

Digitized by Google

Alle Rechte, einschließlich des Übersetzungsrechts, vorbehalten.

Digitized by Google

QA154
B374
1906

Vorwort.

Wie bei der von uns besorgten Neuausgabe der Methodischen Aufgabensammlung sind wir auch bei der Neubearbeitung der Arithmetischen Aufgaben, die wir auf den Wunsch der Verlagsbuchhandlung übernommen haben, darauf bedacht gewesen, dem Buche seine Vorzüge zu bewahren und uns auf die Änderungen zu beschränken, die uns mit Rücksicht auf die gegenwärtigen Bedürfnisse eines auf wissenschaftlicher Grundlage beruhenden Unterrichts unabweislich erschienen. Bei der Entscheidung hierüber haben uns die zahlreichen Verbesserungsvorschläge, die uns auf unsere Aufforderung von den verschiedensten Seiten zugegangen sind, einen wesentlichen Anhalt geliefert; wir bitten unsern Dank hierfür an dieser Stelle zum Ausdruck bringen zu dürfen.

Immerhin hat sich eine ganze Reihe von Änderungen, Streichungen an der einen, Erweiterungen an anderer Stelle als notwendig erwiesen. Was zunächst die Streichungen angeht, so ist von diesen u. a. eine große Zahl von Sätzen, teils im Text, teils in den Anmerkungen betroffen worden, in denen der Verfasser entweder seine Behandlung des Stoffes zu rechtfertigen oder dem Lehrer für die Praxis des Unterrichts Winke zu erteilen beabsichtigte. Alle diese Bemerkungen schienen uns mit dem Charakter eines zum Gebrauch von seiten der Schüler bestimmten Buches unvereinbar, wir haben sie daher hier (wie auch in der größeren Aufgabensammlung) sämtlich beseitigt.

Zweitens schien uns eine ganze Reihe von Abschnitten über die Ziele dieses für den Unterricht an sechsstufigen Anstalten bestimmten Buches so entschieden hinauszugehen, daß wir sie einfach gestrichen haben. Es betrifft dies zwei selbständige Hauptabschnitte, nämlich die Kettenbrüche und die diophantischen Aufgaben, außerdem dann noch eine ganze Reihe von Unterabschnitten, so aus dem XXI. Abschnitt die Determinanten, aus dem XI. den binomischen Lehrsatz, ferner verschiedene Unterabschnitte, in denen unendliche Reihenentwicklungen auftreten, insbesondere auch die Berechnung der Logarithmen durch solche Entwicklungen u. a. m. Doch haben wir einige Abschnitte beibehalten, obwohl auch sie über das den sechsstufigen Anstalten gesteckte Lehrziel hinausgehen, weil wir wohl nicht

M323134
Digitized by Google

mit Unrecht annahmen, daß gerade auf solchen Anstalten, die den größten Teil ihrer Schüler unmittelbar in das praktische Leben hinaus entlassen, der Lehrer öfters das Bedürfnis fühlen wird, gewisse, an und für sich auch auf dieser Stufe dem Verständnis zugängliche Kenntnisse, die auf den Vollanstalten dem planmäßigen Unterrichte der folgenden Stufen zugewiesen sind, den abgehenden Schülern schon jetzt zu vermitteln. Wir haben darum die Abschnitte über arithmetische und geometrische Reihen, den Abschnitt über Zinseszins- und Renten-Rechnung und auch den der Behandlung der graphischen Darstellungen gewidmeten Abschnitt beibehalten, die Abschnitte über geometrische Reihen und Zinseszins-Rechnung sogar noch etwas vermehrt, insbesondere auch durch Berücksichtigung der Versicherungsrechnung (wie dies auch in der Methodischen Sammlung geschehen ist).

Den durch die Streichungen gewonnenen ziemlich erheblichen Raum haben wir vor allem zur Hinzufügung einer nicht unbeträchtlichen Zahl neuer Aufgaben, namentlich auch aus gewissen, bisher wenig oder gar nicht vertretenen Gebieten ausgenutzt. Unter den auf diese Weise neu hinzugetretenen Aufgaben befinden sich auch einige (übrigens nur sehr wenige), die wir aus der größeren Sammlung unverändert herübergenommen haben und auch unverändert herübernehmen mußten, wenn wir sie überhaupt berücksichtigen wollten, weil sie gewisse, allgemein interessierende, einer Änderung in den Zahlenwerten nicht zugängliche tatsächliche Verhältnisse betreffen.

Die Zahl der Aufgaben, die wir gänzlich beseitigt haben, ist sehr gering. Allerdings sind manche Aufgaben ziemlich künstlich konstruiert und auf Verhältnisse zugeschnitten, die praktisch nur von geringer Bedeutung sind. Trotzdem können solche Aufgaben einen gewissen Wert als Übungsaufgaben für die Schärfe und Klarheit des Denkens besitzen. Wir haben uns darum auf die Beseitigung der Aufgaben beschränkt, deren Einkleidung geradezu unmöglich war, bei anderen ist es uns geglückt, die Einkleidung der realen Möglichkeit wenigstens einigermaßen anzupassen, bei einer Reihe von Aufgaben haben wir die Zahlenwerte den gegenwärtig herrschenden Verhältnissen entsprechend nmgeändert.

Auf diese Weise ist es uns gelungen, in der großen Mehrzahl der Abschnitte die bisherige Numerierung der Aufgaben unverändert beizubehalten, und dadurch den gleichzeitigen Gebrauch der alten und der neuen Ausgabe, worauf viele an uns gerichtete Zuschriften besonderen Wert legten, zu ermöglichen und zu erleichtern. Die neuen Aufgaben haben wir dann mit besonderen durch Indices unterschiedenen Nummern an passender Stelle eingefügt.

Nur in einigen Abschnitten war eine Änderung der Numerierung

Digitized by Google

nicht ganz zu vermeiden, es sind dies außer dem, davon wenigstens teilweise betroffenen, Abschnitt über Zinseszins-Rechnung namentlich die Abschnitte VI, VII und IX, wo die vorhandene Gruppierung der Aufgaben den unerläßlichen Forderungen der Logik nicht genügend entsprach. Hier war mehrfach in weiterem Umfange von der Bruchrechnung Gebrauch gemacht worden, deren Theorie erst an späterer Stelle gegeben wurde und dadurch auch indirekt ein Beweis dafür geliefert, daß die vom Verfasser vorgenommene Scheidung der Abschnitte über Quotienten (VII) und über Brüche (IX) gewaltsam und unnatürlich war. Wir hielten es darum für geboten, die Verwendung wenigstens der gemeinen Brüche aus dem Abschnitt VI (Multiplikation) ganz heraus zu bringen und die beiden Abschnitte VII und IX wenigstens in der Theorie völlig zu verschmelzen, weil uns für die Unterscheidung von Quotienten und Brüchen keinerlei ausreichender Grund vorzuliegen schien. Der Verfasser wollte in dem Abschnitt VII (Division) zunächst die Quotienten berücksichtigen, die ganzzahlige Werte besitzen. Gerade für solche Quotienten ist die Divisionstheorie zum großen Teile überflüssig, diese erhält ihre Bedeutung erst bei der Anwendung auf die Quotienten, deren Wert nicht mehr durch eine ganze Zahl ausdrückbar ist; bei den Buchstaben-Ausdrücken, auf die bereits im Abschnitt VII die Divisionstheorie angewandt wurde, trat demgemäß die Voraussetzung, daß sie ganze Zahlen darstellen sollten, vollständig in den Hintergrund.

Wir haben also dem Stoff der genannten Abschnitte eine völlig veränderte Einteilung gegeben, bei der wir insbesondere die Aufgaben über Aggregate von Quotienten und die eng damit zusammenhängende Erweiterung der Brüche in dem nunmehrigen Abschnitt IX vereinigt haben. Teilweise Übertragung einzelner Aufgaben oder Aufgabenabschnitte in andere Abteilungen des Buches ist uns übrigens auch noch an anderen Stellen erforderlich erschienen.

Eine weitgehende Umarbeitung, zum Teil unter Benutzung unserer Neubearbeitung der Methodischen Sammlung, haben die theoretischen Einleitungen erfahren, von denen wir vielfach nur den kleineren Teil beibehalten haben. Teils schien uns die bisherige Fassung den Ansprüchen an logische Schärfe und wissenschaftliche Behandlung nicht recht zu genügen, teils auch war sie unseres Erachtens für die Vermittelung wirklichen Verständnisses zu fragmentarisch gehalten und in solcher Kürze eigentlich zwecklos. Wir sind bestrebt gewesen, eine möglichst eingehende, klare und logisch einwandsfreie, dabei dem Schülerverständnis angepaßte Behandlung namentlich da eintreten zu lassen, wo es sich um die Erweiterung vorhandener Begriffe auf neue Gebiete, z. B. um die Einführung negativer Größen, die Ausdehnung der Rechenoperationen auf relative Zahlen und auf Brüche, die

Digitized by Google

Erweiterung des Potenzbegriffs u. dgl. m. handelte; wir geben uns der Hoffnung hin, daß die Fachgenossen unsere Änderungen als Verbesserungen beurteilen werden.

In einem besonderen Anhang haben wir noch eine Zusammenstellung der Fremdausdrücke gegeben, die nun einmal in der Arithmetik eingebürgert und ohne Unzuträglichkeiten auch nicht zu beseitigen sind. Wenngleich diese Ausdrücke vielfach an den Stellen, wo sie zuerst auftreten, bereits ihre Erklärung gefunden haben, schien uns diese Zusammenstellung doch nicht unangebracht zu sein, namentlich aus der Erwägung heraus, daß unter den sechsstufigen Anstalten, für die diese kleinere Sammlung vorzugsweise bestimmt ist, die lateinlosen Schulen bei weitem die Mehrzahl bilden.

Was die äußere Ausstattung angeht, so schien es uns geboten, auch für die theoretischen Erläuterungen einen größeren Schriftsatz als den bisherigen zu verwenden. Der Verlagsbuchhandlung sind wir für die Bereitwilligkeit, mit der sie unseren dahingehenden Wünschen entgegenkam, zu Dank verpflichtet. In seiner neuen Gestalt entspricht das Buch nun auch allen gegenwärtig von der Schulhygiene gestellten Anforderungen; wir hoffen, daß es in dieser Gestalt — in der es, wie wir wiederholt betonen, sehr wohl neben der alten Ausgabe gebraucht werden kann — dem arithmetischen Unterricht auch fernerhin nützliche Dienste leisten werde.

Nordhausen und Hannover, im Februar 1901.

J. Pietzker. O. Presler.

Vorwort zur zweiten und dritten Auflage.

In der zweiten wie in der dritten Auflage haben wir uns inhaltlich meist auf die Beseitigung der Versehen beschränkt, die bei der ersten Auflage untergelaufen waren, nur im Abschnitt XXXI haben wir eine Vermehrung des Inhalts durch Hinzufügung von zwei Figuren eintreten lassen. Ferner hat der sprachliche Ausdruck an einigen Stellen, wo es erforderlich schien, eine Verbesserung erfahren.

Nordhausen und Hannover, im Jahre 1906.

Die Bearbeiter.

Digitized by Google

Inhalt.

		Seite
I.	Einleitung	1
II.	Einführung in die allgemeine Arithmetik	6
III.	Addition und Subtraktion	18
IV.	Positive und negative Zahlen	20
V.	Klammern	31
VI.	Multiplikation	35
VII.	Division. Rechnung mit Quotienten	41
VIII.	Zerlegung in Faktoren. Kürzung der Brüche. Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Teilers zweier Zahlen	54
IX.	Erweiterung von Quotienten. Rechnung mit Bruch-Aggregaten	63
X.	Proportionen	69
XI.	Potenzen mit ganzen positiven Exponenten	83
XII.	Potenzen mit ganzen negativen Exponenten	94
XIII.	Ausziehen der Quadratwurzel	98
XIV.	Ausziehen der Kubikwurzel	105
XV.	Wurzeln und irrationale Zahlen	110
XVI.	Bruchpotenzen	123
XVII.	Imaginäre Zahlen	126
XVIII.	Logarithmen	129
XIX.	Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten	144
XX.	Anwendung	167
XXI.	Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten	193
XXII.	Anwendung	209
XXIII.	Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten	220
XXIV.	Anwendung	244
XXV.	Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten	250
XXVI.	Anwendung	260
XXVII.	Arithmetische Reihen	267
XXVIII	Geometrische Reihen	274
XXIX.	Zinseszins- und Renten-Rechnung	282
XXX.	Maxima und Minima	295
XXXI.	Graphische Darstellungen	302
Anhang.	Übersicht der in der Sammlung auftretenden Fremdwörter	310

Digitized by Google

Digitized by Google

I. Einleitung.

1. Die Mathematik*) ist die Wissenschaft von den Größen. Mit dem Worte Größe bezeichnet man alles, was sich in lauter untereinander gleiche Teile zerlegen läßt, oder aus solchen Teilen zusammengesetzt ist, mit anderen Worten alles, was einer Vermehrung oder Verminderung fähig ist, ohne daß seine Art dabei sich ändert.

2. Man unterscheidet stetige Größen, d. h. Größen, deren Teile in ununterbrochenem Zusammenhange stehen, wie z. B. ein Ackerplan, und Größen, die eine Vielheit von getrennten Gegenständen darstellen, z. B. ein Haufen Nüsse.

Um eine Größe der letzteren Art zu bestimmen, muß man die einzelnen Gegenstände, aus denen sie sich zusammensetzt, zählen. Die Zahlen, durch die man dies ausführt, können selbst einen größeren oder einen geringeren Wert haben, sie gehören also selbst zu den Größen; die Lehre von den Zahlen bildet demnach einen Teil der Mathematik, der den Namen Arithmetik**) führt.

3. Größen, deren Teile in ununterbrochenem Zusammenhange stehen, besitzen, wie man zu sagen pflegt, eine Ausdehnung. Zu diesen Größen gehört beispielsweise die Zeit, ein anderes Beispiel bieten die Raumgebilde, Körper, Flächen, Linien. Will man hier eine größere Größe mit einer kleineren derselben Art vergleichen, so muß man die erstere durch die letztere messen, man erfährt durch die Messung, wie vielmal die kleinere Größe in der größeren enthalten ist. Das Messen ist also, ebenso wie das Zählen, eine Aufgabe der Mathematik, und da das Ergebnis der Messung sich durch eine Zahl ausdrückt, so fallen die Aufgaben der Messung auch in das Gebiet der Arithmetik.

Die Arithmetik findet demgemäß auch auf die stetigen Größen Anwendung, insbesondere auf die Raumgrößen, von deren besonderen Eigenschaften im übrigen ein eigener Teil der Mathematik, die Geometrie***) handelt.

---

*) Das Wort stammt von dem griechischen Zeitwort für lernen und bedeutet wörtlich den Lerngegenstand oder die Wissenschaft schlechtweg.

**) Das Wort stammt von dem griechischen Worte Arithmos (die Zahl).

***) Wörtlich „Erdmessung"; in diesem Sinne wird das Wort auch jetzt noch bei der Bezeichnung der Berufsart gebraucht, die sich mit Vermessung von Stücken der Erdoberfläche beschäftigt (Geometer, Feldmesser, Landmesser — im alten Rom: Agrimensoren).

Digitized by Google

4. Die Begriffe, die in der Mathematik zur Verwendung kommen, müssen zuvor genau erklärt werden. Solche Erklärung oder Begriffsbestimmung heißt **Definition**. Bei den einzelnen Definitionen greift man auf solche Begriffe zurück, die schon früher definiert worden sind. Die letzten Begriffe, auf denen alle Definitionen beruhen, die daher selbst nicht weiter definiert werden können, sondern für jeden vernünftigen Menschen sich von selbst verstehen, heißen Grundbegriffe.

5. Aus den Grundbegriffen der Mathematik ergeben sich einige Folgerungen, deren Richtigkeit jeder vernünftige Mensch ohne weiteres einsieht. Diese führen den Namen „**Grundsätze**" (Axiome). Als solche Grundsätze sind insbesondere die beiden aus dem Begriff der Gleichheit folgenden Sätze zu merken:

Zwei Größen, die einer dritten Größe gleich sind, sind untereinander gleich.

Gleiche Operationen an gleichen Größen vorgenommen führen zu gleichen Ergebnissen.

6. Alle Schlußfolgerungen, deren Richtigkeit man nicht ohne weiteres einsieht, bedürfen eines Beweises, bei dem man sich auf andere, bereits bewiesene Sätze berufen kann. Ein Satz, dessen Richtigkeit erst bewiesen werden muß, heißt ein „**Lehrsatz**" (Theorem).

7. Um ihre Sätze auszudrücken, bedient sich die Mathematik gewisser Zeichen. Diese Zeichen dienen teils zur Bezeichnung der Größen selbst, teils zur Bezeichnung der Operationen, durch welche die Größen miteinander verknüpft werden sollen. Zu den Verknüpfungszeichen gehören erstens die Zeichen für die gewöhnlichen Rechenoperationen $+$ (plus), $-$ (minus), $\times$ oder $\cdot$ (mal) und $:$ (dividiert durch). Die durch einmalige oder wiederholte Anwendung solcher Operationen gebildeten Größenzusammenstellungen, z. B. $4+3$, $8-7$, $4\cdot 5+6$ usw. heißen Größenausdrücke. Ferner gehören dazu die Zeichen $=$, $>$, $<$ und die Klammer. Das Zeichen $=$ heißt Gleichheitszeichen, es wird gelesen „ist gleich" oder kurz „gleich". Durch Verknüpfung zweier Größen oder Größenausdrücke mittels des Gleichheitszeichens entsteht eine Gleichung, z. B. $3+2=5$.

Der Teil der Gleichung, welcher links vom Gleichheitszeichen steht, heißt die **linke Seite** der Gleichung; der Teil, welcher rechts steht, die **rechte Seite** der Gleichung. — Die Zeichen $>$ und $<$ heißen **Ungleichheitszeichen**. Das Zeichen $>$ wird gelesen **größer als**, z. B. $5>4$; das Zeichen $<$ wird gelesen **kleiner als**, z. B. $4<5$. Verbindungen von Größen durch diese Zeichen heißen **Ungleichungen**.

Die Klammer hat den Zweck, die von ihr eingeschlossenen Größen zu einem Ganzen zusammenzufassen, mit dem dann die weiteren Operationen vorzunehmen sind. So bedeutet der Ausdruck $(3+4)\cdot 2$, daß erst 3 und 4 durch die Addition zu verbinden sind und die dadurch entstehende Größe nachher mit 2 zu multiplizieren ist; das Ergebnis ist 14. Dagegen bedeutet $3+(4\cdot 2)$, daß 3 zu der Zahl

Digitized by Google

zu addieren ist, welche durch Multiplikation von 4 mit 2 entsteht, der Schlußwert ist 11.*)

Die Größen werden in der Mathematik vielfach durch Buchstaben bezeichnet**), in der Regel sind dafür die kleinen lateinischen Buchstaben in Gebrauch***). Besonders wichtig ist diese Bezeichnung, wenn es sich um den Ausdruck mathematischer Sätze handelt, es können dann die durch solche Buchstaben bezeichneten Größen jeden beliebigen Wert besitzen; auf diese Weise erlangt man die Möglichkeit, die Sätze der Mathematik auf ganz kurze Weise so auszudrücken, daß sie auf alle denkbaren Fälle passen.

Eine Gleichung, die einen Lehrsatz mittels algebraischer Zeichen zum kurzen Ausdruck bringt, führt den Namen Formel.

Die Lehre von den Operationen mit den Größenzeichen nennt man mit einem aus dem Arabischen stammenden Worte Algebra (Buchstabenrechnung).

8. Allgemeine Zahlgrößen werden, wie alle Zahlen, durch Buchstaben bezeichnet. Für die bestimmten Zahlgrößen hat man besondere Zeichen, mit Hilfe deren man jede auch noch so große Zahl darstellen kann. Diese Zeichen heißen Ziffern, sie dienen zugleich dazu, die kleineren Zahlen von 1 bis 9 selbst zu bezeichnen. Bei der Verwendung zur Darstellung größerer Zahlen macht sich das Bedürfnis geltend, ein besonderes Zeichen dafür aufzustellen, daß überhaupt kein zählbarer (oder meßbarer) Gegenstand vorhanden ist. Dieses Zeichen führt den Namen „Null". Demnach hat man die folgenden 10 Ziffern

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

---

*) Die Wörter plus und minus wurden von italienischen und französischen Mathematikern durch p und m bezeichnet. Die Zeichen + und − kamen erst im 15. Jahrhundert in Gebrauch. — Das Gleichheitszeichen, welches von französischen Mathematikern herrührt, wurde im 17. Jahrhundert gebräuchlich, die Ungleichheitszeichen erst im vorigen Jahrhundert. — Auch die Klammern kamen erst im vorigen Jahrhundert allgemein in Gebrauch. Früher setzte man über die betreffenden Größen horizontale Striche, wie es noch jetzt beim Wurzelausziehen geschieht. — Der Punkt und das Kolon als Zeichen für mal und dividiert durch wurden von Leibniz († 1716 in Hannover) eingeführt.

**) Als Begründer der Buchstabenrechnung ist der französische Mathematiker Vieta († 1603) anzusehen, der sich zuerst in umfassender Weise der Buchstaben bedient hat.

***) Bisweilen empfiehlt es sich, Größen, die eine gewisse Ähnlichkeit oder Verwandtschaft aufweisen, mit denselben Buchstaben zu bezeichnen, um die Verwandtschaft auch äußerlich auffällig zu machen. Dann bedarf man eines weiteren Zeichens, um solche Größen untereinander zu unterscheiden, man bedient sich dazu einer unten rechts dazu geschriebenen Zahl, die man Index (in der Mehrzahl Indices) nennt. So wird man z. B. die Radien dreier Kreise mit $r_1 r_2 r_3$, die 3 Dreieckshöhen mit $h_1 h_2 h_3$ bezeichnen, wofür man auch bisweilen $h_a h_b h_c$ schreibt, um gleich die Seiten, zu denen die Höhen gehören, erkennbar zu machen.

Digitized by Google

9. Die sämtlichen mittels dieser Ziffern dargestellten Zahlen bilden das von allen Kulturvölkern zur Anwendung gebrachte Zahlensystem, das man, weil es auf der Grundzahl 10 beruht, das dekadische (zehnteilige) oder das Dezimal-System zu nennen pflegt.

Der Ursprung dieses Systems*) ist die Gewohnheit, die Zählung mit Hilfe der zehn Finger vorzunehmen. Handelt es sich dabei um nicht mehr als 10 Gegenstände, so genügt dazu eine Person, bei mehr als zehn Gegenständen ist eine zweite Person erforderlich, die an ihren Fingern abzählt, wie oft die erste Person an ihren Fingern durchgezählt hat. Diese beiden Personen können mit ihren Fingern alle Zahlen bis 10 mal 10 = 100 zur Darstellung bringen. Für die Zahlen von 101 bis 1000 ist eine dritte Person erforderlich, die abzählt, wie oft die zweite Person durchgezählt hat, usw. Nach diesem Prinzip sind auch jetzt gewisse Zählwerke eingerichtet, z. B. die Gasuhren, die mit drei Zifferblättern bis 1000 zählen — die Ziffern auf den Zifferblättern vertreten dabei die Finger der oben gedachten Personen.

Statt nun in der eben geschilderten Weise zu verfahren, stellt man die Ziffern so nebeneinander, wie es im elementaren Rechenunterricht gelehrt wird. Dann stellt jede Ziffer die Zählarbeit einer Person in der Weise dar, daß ihr Abzählen den zehnfachen Wert des durch die rechts daneben stehende Ziffer dargestellten Abzählens besitzt. Hierbei ergibt sich die Notwendigkeit für den Fall, daß eine der be-

---

*) Der unermeßliche Vorteil, den die Anwendung dieses von den Indern erfundenen, durch die Araber uns übermittelten und in Europa vom Anfang des elften Jahrhunderts an allmählich im Gebrauch gekommenen Systems, dessen Ziffern wir daher meist als „arabische Ziffern" zu bezeichnen pflegen, beim Rechnen gewährt, wird voll ersichtlich, sobald man die unvollkommene Art der Zahlbezeichnung ins Auge faßt, wie sie bei den Römern und die noch unvollkommenere, die bei den Griechen in Gebrauch war. Eine systematische Ausbildung des Rechenverfahrens ist erst durch die indisch-arabische Zahlenbezeichnung überhaupt möglich geworden.

Im übrigen ist ersichtlich, daß solches Zahlensystem nicht bloß für die Grundzahl 10, sondern ebenso für jede andere Grundzahl möglich ist. In der Tat ist die Zahl Zehn, die sich weder durch 3, noch durch 4 teilen läßt, eben deswegen auch keine sehr geeignete Grundzahl; daraus erklärt es sich, daß im Leben der Völker neben der Zahl Zehn noch stets die Zahl „Zwölf" eine besondere Verwendung als grundlegende Zahl gefunden hat, wozu freilich auch die Rolle dieser Zahl als der ungefähren Zahl der auf das Jahr entfallenden Mondwechsel mitgewirkt haben mag. So rechnet man im praktischen Leben vielfach nach Dutzenden, der Tag wird in zweimal zwölf Stunden eingeteilt, das gegenseitige Verhältnis, in dem dabei die beiden Zeiger auf dem Zifferblatt unserer Uhren stehen, veranschaulicht die ersten Anfänge des Duodezimal- (d. h. zwölfteiligen) Systems. Die Zahl 60, nach der die Stunden in Minuten und Sekunden systematisch eingeteilt sind, vereinigt in sich die Eigenschaften der Zahlen 10 und 12. Die Einteilung des Kreises in $12 \cdot 30 = 6 \cdot 60 = 360$ Grade hängt, wie es scheint, auch wohl mit der ungefähr 360 Tage betragenden Jahreslänge zusammen.

Digitized by Google

teiligten Personen gerade durchgezählt hatte, ohne von neuem angefangen zu haben, den Platz dieser Person durch eine Ziffer zu bezeichnen, die selbst keinen Wert vorstellt. Diese Ziffer ist eben die „Null" (s. o.).

10. Beim Operieren mit den Zahlen kann man die Art der gezählten Gegenstände mit in Betracht ziehen. Zahlen, bei denen dies geschieht, heißen benannte Zahlen (z. B. 7 Äpfel, 10 Pfund, 15 Bataillone).

Sieht man von der Art der gezählten Gegenstände oder, wie man zu sagen pflegt, von der Benennung der Zahlen ab, so hat man mit den unbenannten oder reinen Zahlen zu tun. Die für diese Zahlen aufgestellten Gesetze finden dann auf die besonderen Fälle Anwendung, in denen es sich um Zahlen von bestimmter Benennung handelt. Die für die unbenannten Zahlen geltenden Gesetze sind also allgemeiner Natur und bilden den eigentlichen Gegenstand der Arithmetik.

11. Die Zahlen 1, 2, 3, 4 usw. heißen die *natürlichen Zahlen*, weil sie uns gleichsam von der Natur gegeben sind, und ihre Reihe heißt die *Reihe der natürlichen Zahlen*. Bei der Erweiterung des Zahlbegriffs kommt man zunächst auf Teile der Einheit, d. h. auf *Brüche* oder *gebrochene Zahlen*. Im Gegensatz zu diesen nennt man daher die oben angeführten Zahlen besser *ganze Zahlen* und ihre Reihe die *Reihe der ganzen Zahlen*. Die ganzen Zahlen der Reihe nach hernennen, sei es an sich, sei es, um eine Menge vorhandener Dinge zu bestimmen, heißt *zählen*. Man kann *aufwärts zählen* und *abwärts zählen*. Geht man beim Abwärtszählen über 1 hinaus, so muß man auf 0 (Null, Nichts) kommen; denn wenn man von 1 noch 1 fortnimmt, so kann nichts übrig bleiben, also das Resultat, mathematisch ausgedrückt, nur 0 (Null) sein. Die Zahlenreihe läßt sich beliebig weit fortsetzen. Man hat daher die *erweiterte Zahlenreihe*

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, \ldots \infty.$$

Bei der Bestimmung einer Menge von Dingen wird man stets von 1 zu zählen anfangen. Ohne einen solchen Zweck wird man mit dem Zählen irgendwo anfangen können, also auch bei 0.

12. Zwei oder mehrere Zahlen miteinander verbinden, um aus ihnen eine neue Zahl abzuleiten, heißt *rechnen* oder *mit den Zahlen operieren*. Das Rechnen bildet den wesentlichsten Bestandteil der Arithmetik. Die Arithmetik beschäftigt sich daher zunächst mit den *Rechnungsarten* oder *Operationen*. Man unterscheidet im ganzen *sieben Grundrechnungsarten* oder *sieben Fundamentaloperationen*. Beim gewöhnlichen Rechnen lernt man nur vier Grundrechnungsarten kennen: das *Addieren*, das *Subtrahieren*, das *Multiplizieren* und das *Dividieren*; oder die *Addition*, die *Subtraktion*, die *Multiplikation* und die *Division*. Diese vier Grundrechnungsarten nennt man auch kurz die *vier Spezies*.

Digitized by Google

II. Einführung in die allgemeine Arithmetik.

1. Zwei Größen so zueinander fügen, daß sie ein Ganzes bilden, heißt sie **addieren**. Die Operation, durch die dies geschieht, heißt Addition, sie findet ihren Ausdruck dadurch, daß man zwischen die Größen das Zeichen + (gelesen: **plus**) setzt, die aus den beiden Größen gebildete neue Größe heißt dann **Summe**.

$a + b$ ist die Summe von a und b.

Die Gleichung $4 + 3 = 7$ sagt aus, daß die Summe der Zahlen 4 und 3 den Wert 7 besitzt.

Umgekehrt kann man 7 als Summe von 4 und 3 auffassen. Die Gleichung $7 = 4 + 3$ sagt aus, daß man die Zahl 7 in die beiden Bestandteile 4 und 3 zerlegen kann. Auf benannte Größen angewendet heißt das:

Eine Gruppe von 7 Gegenständen einer gewissen Art (etwa 7 Äpfel) läßt sich in zwei Gruppen, eine zu 4, eine zu 3 Stück zerlegen.

2. Für das Ergebnis der Zusammenfassung ist es offenbar gleichgültig, ob man a zu b oder b zu a addiert

$$a + b = b + a \qquad 4 + 3 = 3 + 4.$$

In jeder Summe kann man die beiden Bestandteile miteinander vertauschen. Diese Bestandteile führen den gemeinschaftlichen Namen **Summanden**.

3. Ebenso erhält man offenbar dasselbe Ergebnis, wenn man statt zu einer Größe a die beiden Größen b und c einzeln hintereinander zu addieren, gleich ihre Summe addiert. Da in dieser Summe b und c miteinander vertauscht werden dürfen, kann man, statt erst b und dann c, auch erst c und dann b addieren

$$(a + b) + c = a + (b + c) = a + (c + b) = (a + c) + b.$$

Hat man mehrere Additionen hintereinander auszuführen, so ist die Reihenfolge, in der dies geschieht, beliebig.

Man schreibt darum für gewöhnlich ohne Klammern

$$a + b + c$$

und nennt diesen Ausdruck eine Summe von drei Summanden. Eigentlich gibt es nur Summen von zwei Summanden, da man immer nur eine Addition auf einmal ausführen kann. Das Weglassen der Klammern hat die Bedeutung, daß es gleichgültig ist, ob man erst b zu a und dann zu der herauskommenden Größe noch c addiert, ob man erst b zu c addiert und die herauskommende Summe zu a hinzufügt, oder ob man noch irgend eine andere Reihenfolge wählt.

Digitized by Google

4. Da das Zeichen Null der Ausdruck für das Nichtvorhandensein einer Größe ist (s. Abschnitt I, 8.), so wird durch Hinzufügung von Null zu einer Größe deren Wert nicht geändert.

$$a + 0 = a.$$

---

5. Die zweite der arithmetischen Operationen ist die Subtraktion. Das Subtrahieren besteht darin, daß man vom Ganzen einen Teil hinwegnimmt. Das Ganze wird dabei vermindert und führt infolgedessen den Namen Minuendus (d. h. die zu vermindernde Größe), während die davon zu subtrahierende (abzuziehende) Größe als Subtrahendus bezeichnet wird. Der verbleibende Rest heißt die Differenz zwischen Minuendus und Subtrahendus. Das Zeichen der Subtraktion ist — (gelesen: minus)

$$(a + b) - b = a.$$

6. $a - b$ ist die Differenz zwischen a und b. Die Gleichung $7 - 3 = 4$ sagt aus, daß die Differenz zwischen 7 und 3 den Wert 4 besitzt.

Fügt man die hinweggenommene (abgezogene oder subtrahierte) Größe zu dem verbliebenen Rest, d. h. zu der Differenz wieder hinzu, so muß man den ursprünglichen Wert des Minuendus erhalten

$$(a - b) + b = a.$$

Die beiden in Nr. 5. und 6. aufgestellten Formeln zeigen, daß Addition und Subtraktion sich gegenseitig aufheben. Beide Operationen sind also einander entgegengesetzt.

7. Vertauscht man auf der linken Seite der Gleichung in Nr. 6. die beiden Summanden miteinander, so nimmt sie die Form an

$$b + (a - b) = a.$$

In dieser Gestalt sagt sie aus:

Die Differenz $(a - b)$ stellt den Betrag vor, den man zu dem Subtrahenden b hinzufügen muß, um den Minuenden a zu erhalten. Die Größe b von der Größe a zu subtrahieren heißt demnach die Frage beantworten, um wieviel a größer ist als b.

8. Subtrahiert man eine Größe von sich selbst, so ist nach der Subtraktion überhaupt keine Größe mehr vorhanden, man kann dies durch die Gleichung ausdrücken

$$a - a = 0.$$

9. Es ist nun leicht einzusehen, daß man statt erst b zu subtrahieren und dann c hinzuzufügen, auch die entgegengesetzte Reihenfolge beobachten kann

$$(a - b) + c = (a + c) - b.$$

Digitized by Google

Man kann in beliebiger Reihenfolge addieren und subtrahieren. Demgemäß pflegt man den ebengenannten Ausdruck unter Weglassung der Klammern einfach in der Form

$$a - b + c$$

zu schreiben.

10. Ferner liegt auf der Hand, daß man, statt die Größen b und c einzeln hinwegzunehmen (zu subtrahieren), ihre Summe mit einem Male abziehen darf

$$a - b - c = a - (b + c).$$

11. Hat man die Differenz $(b - c)$ von a zu subtrahieren, und subtrahiert zunächst den Minuendus b, so hat man offenbar zuviel hinweggenommen und zwar soviel, als der Subtrahendus c angibt, daher muß eine Ausgleichung durch Addition von c erfolgen

$$a - (b - c) = (a - b) + c.$$

12. Vermehrt man die Größe a um den Betrag n, vermehrt aber zugleich die von a abzuziehende Größe b um denselben Betrag n, so wird die erste Vermehrung durch die letztere völlig unwirksam gemacht, es gilt also die Formel

$$(a + n) - (b + n) = a - b.$$

Ganz ebenso heben sich offenbar die Verminderungen, welche man am Minuendus und Subtrahendus um den gleichen Betrag vornimmt, untereinander auf

$$(a - n) - (b - n) = a - b.$$

---

13. Die dritte der arithmetischen Operationen ist die Multiplikation oder Vervielfachung.

Hat man b Größen, die sämtlich den Wert a besitzen, zueinander addiert, so hat man die Größe a offenbar $b$mal erhalten, oder, wie man zu sagen pflegt, a mit b multipliziert.

$$\begin{gathered} a + a + a + a + a = a \cdot 5. \\ \overset{1}{\smile} \quad \overset{2}{\smile} \qquad\qquad \overset{b}{\smile} \\ a + a + \cdots + a = a \cdot b. \end{gathered}$$

Den durch Multiplikation der Größen a und b entstandenen Ausdruck nennt man das Produkt dieser Größen. Das Zeichen $\cdot$ zwischen a und b (für welches man bisweilen auch das Zeichen $\times$ anwendet) wird „multipliziert mit" oder „mal" gelesen.

14. Von den beiden Größen a und b muß die letztere, welche angab, wie viele Summanden vom Werte a zueinander addiert werden sollten, eine reine Zahl sein, sie führt den Namen Multiplikator. Die Größe a, die eine benannte Zahl sein darf, heißt Multiplikandus.

Digitized by Google

15. Besonders wichtig sind die Produkte, bei denen auch der Multiplikandus eine reine Zahl ist.

Habe ich b Gruppen von a Dingen (z. B. Äpfeln), so ist $a \cdot b$ die gesamte Anzahl der vorhandenen Dinge. Diese ganze Menge kann ich offenbar ebenso gut in a Gruppen zu b Stück teilen, dann ist die Gesamtzahl $b \cdot a$. Es ist also

$$a \cdot b = b \cdot a; \qquad 4 \cdot 3 = 3 \cdot 4.$$

In jedem Produkt reiner Zahlen darf man Multiplikator und Multiplikand miteinander vertauschen. Beide führen den gemeinschaftlichen Namen Faktoren.

16. Das Produkt $a \cdot b$ kann ich durch b Reihen darstellen, deren jede a Gegenstände zählt. Habe ich c Gruppen von dieser Anordnung nebeneinander, so kann ich sie zu einer einzigen Gruppe von b Reihen vereinigen, von der jetzt jede Reihe aber offenbar $a \cdot c$ Gegenstände enthält. D. h., wenn ich das Produkt $(a \cdot b)$ mit c zu multiplizieren habe, so erhalte ich dasselbe Ergebnis, wie wenn ich zunächst den einen Faktor a mit c und dann das herauskommende Produkt mit b multipliziere.

$$(a \cdot b) \cdot c = (a \cdot c) \cdot b.$$

Es ist also gleichgültig, ob ich die Größe a erst mit b und dann mit c, oder erst mit c und dann mit b multipliziere, d. h. mehrere hintereinander vorzunehmende Multiplikationen können in beliebiger Reihenfolge vorgenommen werden.

Wegen der Vertauschbarkeit der Faktoren hat man zugleich die Formel

$$c\,(a \cdot b) = (c \cdot a) \cdot b$$

und damit die beiden Sätze:

Die Multiplikation mit einem Produkt $(a \cdot b)$ läßt sich in mehrere aufeinander folgende Multiplikationen mit den Faktoren dieses Produkts (erst mit a, dann mit b) auflösen.

Mehrere hintereinander folgende Multiplikationen (erst mit a, dann mit b) kann man durch eine einzige Multiplikation mit dem Produkt der Multiplikatoren $(a \cdot b)$ ersetzen.

Infolgedessen pflegt man den eben genannten Ausdruck unter Weglassung der Klammern in der Form

$$a \cdot b \cdot c \text{ oder } abc$$

zu schreiben, man nennt ihn ein Produkt von drei Faktoren. Man spricht also von Produkten mehrerer Faktoren, obwohl streng genommen jedes Produkt nur zwei Faktoren besitzt, da man immer nur eine Multiplikation auf einmal vornehmen kann (vgl. die entsprechende Bemerkung über die Summe in Nr. 3.).

Digitized by Google

17. Jede Größe läßt sich als eine Gruppe, die nur ein Glied enthält, ansehen

$$a \cdot 1 = a.$$

Umgekehrt: Setzt man die Zahl Eins $a$mal, so erhält man a

$$1 \cdot a = a.$$

18. Setzt man die Größe Null $a$mal, so ist dann natürlich ebenfalls keine Größe vorhanden

$$0 \cdot a = 0.$$

Die Größe a nullmal setzen, heißt sie überhaupt nicht setzen, so daß dann ebenfalls überhaupt keine Größe vorhanden ist

$$a \cdot 0 = 0.$$

19. Hat man die Produkte $x \cdot a$ und $y \cdot a$ zu addieren, so kann man jedes durch eine Gruppe von a Reihen darstellen; die einzelne Reihe enthält bei der ersten Gruppe x, bei der zweiten y Gegenstände. Nebeneinander gesetzt bilden sie eine Gruppe von a Reihen, deren jede $x + y$ Gegenstände enthält, also eine Gruppe, die das Produkt $(x + y)a$ vorstellt

$$x \cdot a + y \cdot a = (x + y) \cdot a.$$

Entsprechend kann man die Subtraktion des Produkts $y \cdot a$ von dem Produkt $x \cdot a$ dadurch bewirken, daß man aus jeder Reihe der ersten Reihe y Gegenstände hinwegnimmt, worauf eine Gruppe von a Reihen zu $x - y$ Gegenständen übrig bleibt

$$x \cdot a - y \cdot a = (x - y) \cdot a.$$

Hat man zwei Produkte, die in einem Faktor (a) übereinstimmen, zu addieren oder zu subtrahieren, so kann man die Addition oder Subtraktion an den nicht gemeinschaftlichen Faktoren (x und y) vollziehen und den dabei herauskommenden Wert ($x + y$ oder $x - y$) mit dem gemeinschaftlichen Faktor (a) multiplizieren.

Diese Operation bezeichnet man auch als das Herausziehen des gemeinschaftlichen Faktors (a) aus dem Ausdruck $x \cdot a + y \cdot a$, oder aus $x \cdot a - y \cdot a$.

20. Umgekehrt ist nun auch

$$(x + y) \cdot a = x \cdot a + y \cdot a$$
$$(x - y) \cdot a = x \cdot a - y \cdot a.$$

Hat man eine Summe oder eine Differenz zu multiplizieren, so kann man diese Multiplikation an den einzelnen Gliedern der Summe oder Differenz vollziehen.

21. Hat man eine größere Zahl von Produkten, die in einem Faktor übereinstimmen, so kann man sie nach Nr. 19. zu einem Pro-

Digitized by Google

dukt vereinigen, falls die anderen Faktoren von derselben Größenart sind. Andernfalls entstehen soviel Produkte, als Größenarten vorkommen, z. B.

$$3 \cdot \text{Äpfel} \cdot 9 + 4 \cdot \text{Äpfel} \cdot 9 = (3 \text{ Äpfel} + 4 \text{ Äpfel}) \cdot 9$$
$$= 7 \cdot \text{Äpfel} \cdot 9 = 63 \text{ Äpfel}$$
$$3 \text{ Äpfel} \cdot 9 + 17 \text{ Nüsse} \cdot 9 + 8 \text{ Äpfel} \cdot 9 - 5 \text{ Nüsse} \cdot 9$$
$$= (3 \text{ Äpfel} + 8 \text{ Äpfel}) \cdot 9 + (17 \text{ Nüsse} - 5 \text{ Nüsse}) \cdot 9$$
$$= 11 \text{ Äpfel} \cdot 9 + 12 \text{ Nüsse} \cdot 9 = 99 \text{ Äpfel} + 108 \text{ Nüsse}.$$

22. Bei Produkten, deren Faktoren einfache Größen sind, wird das Multiplikationszeichen häufig weggelassen. Statt $a \cdot b \cdot c$ schreibt und liest man meist abc. (Vgl. Nr. 16.)

23. Jede benannte Zahl läßt sich als Produkt aus einer reinen Zahl und der als Benennung dienenden Größe auffassen, die dann als Einheit der betreffenden Größenart auftritt.

Man kann 14 Äpfel als Produkt aus der Zahl 14 und einem Apfel betrachten, dieser ist dann die Größeneinheit. Statt dessen kann man 14 Äpfel auch in der Form $7 \cdot 2$ Äpfel schreiben, hier hat man 2 Äpfel als die siebenmal genommene Größeneinheit anzusehen. Ein Aktienkapital von 360 000 ℳ, das in lauter Aktien zu 500 ℳ geteilt ist, läßt sich in der Form $720 \cdot 500$ ℳ schreiben, dabei hat man als Größeneinheit den Betrag von 500 ℳ.

24. Bisweilen ist in einem Produkt der eine Faktor besonders bedeutsam, so daß er als Hauptfaktor angesehen werden kann. Dann führt der andere Faktor, der Nebenfaktor, den Namen Koeffizient.*)

Z. B. ist in den zueinander zu addierenden Produkten $3x$, $8x$, $20x$ der Faktor x allen Produkten gemeinsam und darum besonders wichtig, also der Hauptfaktor. Die Faktoren 3, 8, 20 sind die Koeffizienten.

---

25. Die Multiplikation lehrte das Ergebnis finden, zu dem man gelangt, wenn man die Größe, die den Wert a hat, b mal als Faktor setzt.

Die Gleichung $a \cdot b = c$ sagt aus: das Ergebnis der Multiplikation der Größen a und b hat den Wert c. Hier kannte man beide Faktoren und fand durch die Multiplikation den Wert des Produkts.

Liegt die Sache so, daß man den Wert des Produkts und den Wert des einen Faktors kennt, so hat man die Aufgabe, den Wert des anderen Faktors zu bestimmen. Man steht vor der Frage: Welche Größe gibt mit b multipliziert ein Produkt vom Werte c?

Die Beantwortung dieser Frage ist die Aufgabe der vierten Hauptoperation, der Division, deren Definition demnach darin be-

*) Benennung von Vieta.

Digitized by Google

steht, daß sie durch die Multiplikation gerade aufgehoben wird. Die Größe, die mit b multipliziert den Wert c ergibt, heißt der Quotient der Größen c und b und wird durch das Zeichen $\frac{c}{b}$ oder $c:b$ (gelesen: c dividiert durch b oder kürzer c durch b) dargestellt. Die Größe c heißt der Dividendus, b der Divisor, den Quotienten von c und b suchen, heißt c durch b dividieren.

Man hat demnach die Formel

$$\frac{c}{b} \cdot b = c,$$

in Worten: Die Multiplikation eines Quotienten mit seinem Divisor muß stets den Dividendus ergeben. Dieser Satz enthält die Definition eines Quotienten.

26. Dividiert man das Produkt zweier Faktoren durch den einen Faktor, so erhält man den anderen

$$\frac{ab}{b} = a,$$

denn der Quotient aus ab und b muß einen Wert haben, der mit b multipliziert gerade ab gibt. Dieser Wert ist die Größe a.

Es wird demnach nicht nur die Division durch die Multiplikation, sondern auch die Multiplikation durch die Division aufgehoben; Multiplikation und Division sind also zwei einander entgegengesetzte Operationen.

27. Da die Faktoren eines Produkts nur dann miteinander vertauscht werden können, wenn beide reine Zahlen sind (s. Nr. 14. und 15.), so hat man bei der Division im allgemeinen zwei Fälle zu unterscheiden. In dem einen ist der Multiplikator bekannt, der Multiplikandus wird gesucht, in dem anderen wird der Multiplikator gesucht, während der Multiplikandus gegeben ist.

Das benannte Produkt $24a$ (24 $\mathcal{M}$) kann ich sowohl durch eine reine Zahl, etwa 6, als durch eine benannte Zahl, etwa $6a$ (6 $\mathcal{M}$) dividieren.

Im ersteren Falle erhalte ich die Gleichung

$$\frac{24a}{6} = 4a.$$

Diese Gleichung gibt auf die Frage: „Wie groß ist der 6. Teil von $24a$?" die Antwort: $4a$.

Dividiere ich dagegen $24a$ durch $6a$, so erhalte ich die Gleichung

$$\frac{24a}{6a} = 4,$$

die die Frage: „Wie oft ist $6a$ in $24a$ enthalten?" mit der Angabe „4 mal" beantwortet.

Digitized by Google

Das Dividieren hat also zwei Bedeutungen. Nur in dem ersten Falle handelt es sich wirklich um ein Teilen, was ja der eigentliche Sinn des Wortes „dividieren" ist, in dem zweiten der beiden vorstehend genannten Fälle handelt es sich vielmehr um ein Messen. Denn wenn ich z. B. eine Strecke durch ein Metermaß messe, so ist der Zweck dieser Operation die Ermittelung, wie oft die Länge eines Meters in der Länge der zu messenden Strecke enthalten ist.

Bei dem Quotienten zweier reinen Zahlen sind beide Auffassungen möglich. Die Gleichung

$$\frac{8}{4} = 2$$

sagt sowohl aus, daß der vierte Teil der Zahl 8 den Wert 2 hat, als auch daß die Zahl 4 in der Zahl 8 zweimal enthalten ist.

28. Aus der Definition der Division folgen nun mit Rücksicht auf Nr. 17. leicht die Gleichungen

$$\frac{a}{a} = 1; \qquad \frac{a}{1} = a.$$

Der Quotient zweier gleichen Größen hat stets den Wert Eins, umgekehrt läßt sich die Zahl Eins stets als Quotient zweier beliebiger untereinander gleicher Größen ansehen.

Jede Größe läßt sich als ein Quotient aus ihr selbst und der Zahl Eins auffassen.

29. Ferner gelten die Formeln

$$\text{I.} \quad \frac{a}{c} \cdot b = \frac{ab}{c}$$

$$\text{II.} \quad \frac{a}{b} : c = \frac{a}{bc}$$

$$\text{III.} \quad \frac{ac}{bc} = \frac{a}{b}$$

$$\text{IV.} \quad \frac{a}{c} + \frac{b}{c} = \frac{a+b}{c}$$

$$\text{V.} \quad \frac{a}{c} - \frac{b}{c} = \frac{a-b}{c}.$$

Jede dieser Formeln enthält zwei Sätze, je nachdem man sie „von links nach rechts" oder „von rechts nach links liest", d. h. sie sagt aus, daß man statt die auf der einen Seite der Formel angegebenen Operationen auszuführen, auch so verfahren kann, wie die andere Seite der Formel vorschreibt.

So sagt die erste Formel, von links nach rechts gelesen, aus: „Habe ich einen Quotienten $\left(\text{nämlich } \frac{a}{c}\right)$ mit einer Größe (b) zu multiplizieren, so kann ich die Multiplikation am Dividendus aus-

Digitized by Google

führen und das entstehende Produkt (d. i. $a \cdot b$) durch den Divisor (c) dividieren."

Von rechts nach links gelesen sagt dieselbe Formel: „Habe ich ein Produkt (ab) durch eine Größe c zu dividieren, so kann ich die Division an dem einen Faktor (z. B. a) vornehmen und den entstehenden Quotienten mit dem anderen Faktor (b) multiplizieren."

Demgemäß ist jede der 5 anderen Formeln auf doppelte Weise in Worten auszudrücken.

30. Der Beweis der Formeln in 29. (ebenso wie in 28.) ist überall mit Hilfe der Definition des Quotienten (Nr. 25.) zu führen. Nun hat bei jeder Formel wenigstens die eine Seite die Form eines Quotienten. Soll die andere Seite den Wert dieses Quotienten darstellen, so muß sie bei der Multiplikation mit dem Divisor dieses Quotienten dessen Dividendus ergeben. So gestaltet sich z. B. der Beweis der Formel 29, II folgendermaßen:

Es soll $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}$ der Wert des Quotienten $\frac{a}{bc}$ sein, folglich muß $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c} \cdot (bc)$ den Wert a besitzen. Statt mit bc auf einmal zu multiplizieren, kann ich erst eine Multiplikation mit c und dann eine mit b vornehmen (Nr. 16.). Multipliziere ich $\frac{\left(\frac{a}{b}\right)}{c}$ zunächst mit c, so erhalte ich $\left(\frac{a}{b}\right)$ und multipliziere ich nun noch $\left(\frac{a}{b}\right)$ mit b, so erhalte ich a, wie verlangt war. Damit ist der geforderte Beweis erbracht.

Beweise auf ähnlichem Wege die übrigen Formeln in Nr. 29.

---

31. Die vier Operationen: Addition, Subtraktion, Multiplikation und Division kann man auf doppelte Art einteilen.

Addition und Multiplikation nennt man direkte Operationen, weil sie sich durch sich selbst erklären. Im Gegensatz dazu heißen Subtraktion und Division indirekte oder Umkehrungs-Operationen, weil man zu ihrer Erklärung auf Addition und Multiplikation zurückgehen muß. Die Subtraktion ist das Gegenteil der Addition, die Division das Gegenteil der Multiplikation.

Man kann auch sagen:

Subtrahieren heißt, aus der Summe und dem einen Summanden den anderen Summanden finden.

Dividieren heißt, aus dem Produkt und dem einen Faktor den anderen Faktor finden.

Digitized by Google

32. Addition und Subtraktion heißen Operationen der ersten, Multiplikation und Division solche der zweiten Stufe. Die Operationen derselben Stufe sind von gleichem Range, die der zweiten von höherem Range als die der ersten Stufe.

33. Alle vier Operationen sind eindeutig, d. h. jede solche Operation gibt, wenn sie an derselben Größe vorgenommen wird, immer das gleiche Resultat. (Weiterhin werden auch Operationen auftreten, von denen dies nicht gilt, solche Operationen heißen mehrdeutig.) Auf diese Operationen kann man dann den zweiten in Abschnitt I, Nr. 5. angegebenen Grundsatz anwenden; dadurch gelangt man zu den vier Sätzen:

1) Gleiches zu Gleichem addiert gibt Gleiches.
2) Gleiches von Gleichem subtrahiert gibt Gleiches.
3) Gleiches mit Gleichem multipliziert gibt Gleiches.
4) Gleiches durch Gleiches dividiert gibt Gleiches.

34. Durch fortwährende Anwendung der Operationen entstehen zusammengesetzte Ausdrücke, die selbst wieder Größen darstellen. Für einen auf diese Weise gebildeten Ausdruck gilt die Regel, daß die Operationen, durch die er entsteht, der Reihe nach, wie sie von links nach rechts gelesen auftreten, hintereinander auszuführen sind. Dabei gilt das Ergebnis der bisherigen Operationen für jede neue Operation als ein Ganzes*). So bedeutet z. B. der Ausdruck $a \cdot b + c$, daß erst a mit b zu multiplizieren, zu dem entstandenen Produkt nachher c zu addieren ist.

Eine Abweichung von dieser Regel wird jedoch dadurch herbeigeführt, daß, wenn Operationen von ungleichem Range miteinander wechseln, das Zeichen der höheren Operation sich immer nur auf die unmittelbar daneben stehenden Größen bezieht. Es bedeutet also

$$a + b \cdot c,$$

daß c mit b multipliziert und das entstehende Produkt nachher zu a addiert werden soll.

35. Soll der Gang der Rechnung ein anderer sein, als der soeben angegebene, so muß man einen Größenausdruck, der für eine Operation als Ganzes gelten soll, durch eine Klammer einschließen. So bedeutet z. B. der Ausdruck

$$a \cdot (b + c),$$

daß man a mit der Summe $(b + c)$ multiplizieren, der Ausdruck

$$(a + b) : c,$$

*) Als solches müßte es eigentlich durch eine Klammer gekennzeichnet werden. Die obenstehenden Regeln haben den Zweck, die Anwendung von Klammern, durch welche ein Ausdruck leicht unübersichtlich wird, möglichst entbehrlich zu machen.

Digitized by Google

daß man die Division mit c nicht an b, sondern an $(a + b)$ vornehmen soll.

Schreibt man den letztgenannten Quotienten in der Form $\frac{a+b}{c}$, so übernimmt der Bruchstrich die Rolle der Klammer.

36. Auch da, wo der Gang der Rechnung willkürlich ist, weil das Ergebnis in allen Fällen dasselbe ist (vgl. Nr. 3., 9., 16.), kann man Klammern setzen, um einen bestimmten Gang der Rechnung anzudeuten. Es geschieht dies namentlich, wenn es sich darum handelt, einen Lehrsatz durch eine Formel auszudrücken. So sagt die Formel

$$(a + b) - c = a + (b - c)$$

aus, daß die um c verminderte Summe $(a + b)$ auch gleich der Summe von a und der Differenz $(b - c)$ ist oder daß man die Subtraktion von c statt an $(a + b)$ an dem einen Summanden b vornehmen und das Resultat dann zu dem anderen Summanden a addieren darf.

37. Gib den Gang der Rechnung an in:

1) $a + b - c$, $a - b + c$, $a - b \cdot c$, $a - b \cdot c + d$
2) $a - b : c$, $a : b - c$, $a : b + c \cdot d$, $b \cdot d - a : c$.

38. Setze in den Ausdrücken der vorigen Aufgabe $a = 24$, $b = 6$, $c = 3$, $d = 2$, und berechne dieselben.

39. Gib an, ob in folgenden Ausdrücken die Klammern für den Gang der Rechnung überflüssig sind oder nicht, und wie man in dem letzten Falle ohne die Klammern rechnen müßte.

1) $(a + b) - c$,	$a + (b - c)$,	$a - (b + c)$
2) $(a \cdot b) - c$,	$a - (b \cdot c)$,	$(a - b) \cdot c$
3) $a \cdot (b + c)$,	$(a : b) - c$,	$a : (b - c)$
4) $(a + b) : c$,	$a + (b : c)$,	$a : (b \cdot c)$.

40. Berechne

1) $18 - 3 \cdot 2 + 4$,	$18 - (3 \cdot 2 + 4)$,	$(18 - 3) \cdot 2 + 4$
2) $18 - 3 \cdot (2 + 4)$,	$(18 - 3)(2 + 4)$,	$(18 - 3 \cdot 2) + 4$
3) $20 - 10 : 2 + 8$,	$20 - 10 : (2 + 8)$,	$(20 - 10) : 2 + 8$
4) $36 - 4 \cdot 3 + 6 : 3$,	$36 - 4(3 + 6) : 3$,	$36 - 4(3 + 6 : 3)$
5) $(36 - 4)3 + 6 : 3$,	$36 - (4 \cdot 3 + 6) : 3$,	$(36 - 4 \cdot 3 + 6) : 3$.

41. Ausdrücke, deren Bestandteile durch Addition und Subtraktion, also durch die Zeichen + oder − untereinander verbunden sind, werden, namentlich wenn sie aus einer größeren Zahl von Teilen zusammengesetzt sind, Aggregate genannt. Die einzelnen Bestandteile werden mit ihren Vorzeichen zusammen als Glieder des Aggregats bezeichnet, ein solches ist demnach aus positiven und negativen

Digitized by Google

Gliedern zusammengesetzt. Je nach der Gliederzahl unterscheidet man die Aggregate, eine einzelne Größe ist ein eingliedriger Ausdruck.

Die Glieder eines Aggregats können selbst wieder zusammengesetzte Größen der verschiedensten Art sein, die durch Klammern als einheitliche Größen gekennzeichnet sind.

So ist $\frac{a+b}{c} - (x - y)$ ein zweigliedriger Ausdruck, eine Differenz. Das erste Glied dieses Aggregats $\frac{a+b}{c}$ ist ein Quotient, dessen Dividend zweigliedrig (eine Summe) ist. Das zweite Glied ist eine Differenz, folglich für sich betrachtet selber ein zweigliedriges Aggregat.

Gib die Natur der folgenden Ausdrücke an:

1) $a + b$, $a - 3b$, $\frac{a}{b}$, $(a - b)c$

2) $a + bc$, $a - b : c$, $(a - b) : c$, $a : (b + c)$

3) $\frac{a-b}{c}$, $a - \frac{b}{c}$, $\frac{a}{b} - \frac{c}{d}$, $\frac{a-b}{c-d}$

4) $(a + \frac{b}{c} - d) \cdot x$, $\frac{a}{b} - \frac{c}{d} + x$

5) $\frac{x-y}{a} + b \cdot c$, $\frac{a-b}{x} - (c + d)$

6) $\frac{a-b+c}{d} - ax + 1$, $a + 2b - \frac{1}{3}c - 2\frac{1}{2}x$.

42. Setze in den Ausdrücken
1) $2n$, 2) $2n - 1$, 3) $3n - 2$, 4) $n(n - 1)$, 5) $\frac{1}{6}n(n - 1)(n - 2)$ der Reihe nach $n = 1, 2, 3, 4, 5 \ldots 10$, und berechne dieselben.

43. Welche drei ganzen Zahlen folgen 1) auf a, 2) auf $x + 1$, 3) auf $y + 7$, 4) auf $n - 7$, 5) auf $n - 3$?

44. Welche drei ganzen Zahlen gehen den Zahlen 1) a, 2) $x + 5$, 3) $y - 3$, 4) $n + 3$, 5) $n + 1$ voran?

45. Zwischen welchen beiden ganzen Zahlen liegt 1) a, 2) $x + 1$, 3) $y - 1$, 4) $y + 5$, 5) $n - 3$?

46. Bezeichnen nachstehende Ausdrücke gerade Zahlen oder ungerade Zahlen, wenn man für n ganze Zahlen setzt? 1) $2n$, 2) $2n - 1$, 3) $2n + 1$, 4) $3n$, 5) $4n - 7$, 6) $7n + 4$.

47. Setze 1) in $7n + 1$, 2) in $8n + 5$ der Reihe nach $n = 1, 2, 3, 4, 5$, und gib an, welchen Rest die Zahlen unter 1) bei der Teilung durch 7, die unter 2) bei der Teilung durch 8 lassen.

48. Wie muß die Form aller Zahlen sein, welche 1) durch 4, 2) durch 3, 3) durch 6 aufgehen?

49. Welche Reste kann eine Zahl haben in bezug auf die Teiler 1) 3, 2) 5, 3) 3, 4) 2, und wie müssen danach die Formen aller Zahlen in bezug auf die genannten Teiler sein?

Digitized by Google

III. Addition und Subtraktion.

A. Vorbemerkung.

Im Abschnitt II, Nr. 1. bis 12. sind bereits die nachstehend wiedergegebenen Formeln aufgestellt und begründet worden.

I. $a + b = b + a$

$a + b + c = a + c + b = b + a + c = a + (b + c)$ usw.

II. $a + b - b = a - b + b = a$

III. $a + b - c = a - c + b = a + (b - c)$

$a - b + c = a + c - b = a - (b - c)$

IV. $a - b - c = a - c - b = a - (b + c)$

V. $a - b = (a + n) - (b + n) = (a - n) - (b - n)$.

Diese Formeln sind in Worte zu fassen, sowohl für den Fall, daß sie von links nach rechts, als für den, daß sie von rechts nach links gelesen werden.

Aus ihnen läßt sich die allgemeine Regel folgern, daß bei einer beliebigen Zahl aufeinanderfolgender Additionen und Subtraktionen die Reihenfolge willkürlich ist. Z. B. ist

$9 - 3 + 4 + 2 = 9 + 4 - 3 + 2 = 9 + 2 + 4 - 3$ usw.

B. Aufgaben.

Berechne folgende mehrgliedrige Ausdrücke (Aggregate)*):

1. $7 + 65,\ 9 + 386$ $\quad$ $2 + 927,\ 17 + 385$
2. $795 + 873 + 5$ $\quad$ $8 + 583 + 92$
3. $863 + 471 + 29$ $\quad$ $9 + 673 + 117$
4. $7a + b + 3a + b$ $\quad$ $a + 7b + b + 2a$
5. $6a + x + c + 3x$ $\quad$ $a + 2b + 3b + 5a$
6. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12$
7. $30 + 31 + 32 + 33 + 34 + \ldots + 40$
8. $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \ldots + 100$
9. $101 + 102 + 103 + 104 + \ldots + 1000$
10. $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$
11. $2 + 4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14 + \ldots + 50$
12. $a + 2a + 3a + 4a + 5a + 6a + 7a + 8a + 9a$

*) Hier kommen unter den Zahlenfaktoren auch Dezimalzahlen vor, die an sich zu den Bruchgrößen gehören, aber äußerlich wie ganze Zahlen behandelt werden und hier auch demgemäß nach den Vorschriften der Dezimalrechnung behandelt werden sollen.

Digitized by Google

13. $5a + b + 7c + 3b + a + 8c + 3a + 9b$
14. $8x + 7y + 9z + y + 7x + z + 5y + 6z + x$
15. $8{,}5 + 9{,}75 + 3{,}83 + 7{,}5 + 4{,}17 + 2{,}25 + 5$
16. $7{,}2 + 8{,}28 + 3{,}17 + 5{,}4 + 4{,}3 + 3{,}72 + 2{,}4 + 5{,}7 + 1{,}5$
17. $753 - 58 + 58$ $\quad$ $927 + 354 - 354$
18. $9a - 7x + 7x$ $\quad$ $4x - 5a + 5a$
19. $7a - y + y + 3a$ $\quad$ $4x + 6a + 3x - 6a$
20. $8a + 3b - 5a$ $\quad$ $19x - 7a + 11x$
21. $57 - 3x + 13$ $\quad$ $49 + x - 17$
22. $983 + 423 - 583$ $\quad$ $784 + 369 - 269$
23. $625 - 583 + 374$ $\quad$ $1978 + 693 - 1278$
24. $3{,}568 + 0{,}78 - 3{,}468$ $\quad$ $5{,}3 + 2{,}987 - 0{,}587$
25. $7{,}67 + 9{,}83 - 7{,}5$ $\quad$ $4{,}79 + 3{,}71 - 2{,}5$
26. $9a + 8b - 5b$ $\quad$ $a - 17b + 8b$
27. $7p - 23x + 19x$ $\quad$ $8q + 37y - 28y$
28. $3m - x + 27x$ $\quad$ $5n - 8p + p$
29. $47x + 7y - 57x$ $\quad$ $35a + 43x - 36a$
30. $24a - 7b - 18a$ $\quad$ $9x - y - x$
31. $48m - 39n - 34m$ $\quad$ $27p - q - 26p$
32. $54a - 8b - 19b$ $\quad$ $36x - 10y - 24y$
33. $26a - 25b - b$ $\quad$ $45a - 7x - 37x$
34. $7a - 3b + 5c - 7b + 2c - 6a + 9b - 6c$
35. $8a + 5b - 7c + 2a - 9a - 8b + 7c + 2b$
36. $5a - 7x + 8a + 3a - 9x + 11x - 14a + a + 3x$
37. $3m - 7n + 5m - 7m + 5n + 3n - 8p - 5n + 8p$
38. $4a + b - 7c + 3x - c - 9a + 8x + 8c + 5a - b$
39. $x - 5y + 8 + 7x - 3y + 5 - 7x + 9y - 13 + y$
40. $27a - 35b + 49c - 43a + 69b + 24a - 43b - 56c$
41. $45a + 57b - 36a + 54x - 73b + 10x + 19b - 71x$
42. $78m - 45n + 73p - 54p + 78n - 93m + 23m - 19p$
43. $61x - 98y + 85z - 39x - p + 89y - 28z - 58z + p$
44. $7{,}38a - 5{,}37b - 8{,}3a + 2{,}765a + 4{,}87b - 0{,}745a$
45. $9a + 8b - 6{,}543a - 0{,}87b + 5{,}763a - 4{,}63b + 0{,}78a$
46. $3{,}567a - 0{,}308b - 2{,}8a + 5{,}79b - 3{,}582b + 2{,}633a$
47. $6{,}75a - 83{,}7x + 5{,}3y - 6{,}78y + 100x - 5{,}55a + 1{,}48y$
48. $3{,}5a - 5b + 7{,}33c - 2{,}75a - 4{,}5b + 0{,}17c - 6{,}5c + 1{,}25a + 8b$
49. $0{,}25a - 0{,}33b + 4{,}5b - 0{,}83c + 3{,}67a - 1{,}67c + 0{,}08a - 0{,}17b + 9{,}5c$

Digitized by Google

50. $3{,}25a - 2{,}5b + 2{,}3c + 5{,}25a + b - c - 7{,}5a + 3{,}5b + 1{,}2c$
51. $7{,}38a - 2{,}73b - 5{,}5a + 0{,}385b + 1{,}75b + 0{,}12a - 0{,}405b$
52. $8{,}3a - 6{,}35b + 0{,}3c - 5{,}7a - 2{,}08b + 1{,}2a - 0{,}3c + 7{,}33b$.

Beweise folgende Formeln, und drücke dieselben in Worten aus*):

53. $(a + b) + c = (a + c) + b$ oder $= a + (b + c)$
54. $(a + b) - b = a$, $(a + b) - a = b$
55. $(a - b) + c = (a + c) - b$
56. $(a + b) - (c + d) = (a - c) + (b - d)$ oder $= (a - d) + (b - c)$.

Drücke folgende Sätze durch Formeln aus und beweise dieselben:

57. Eine Summe bleibt ungeändert, wenn man den einen Summanden um eine Zahl vermehrt und den anderen um dieselbe Zahl vermindert. Beispiele!

58. Anstatt eine Zahl von einer Summe zu subtrahieren, kann man sie auch von einem Summanden dieser Summe subtrahieren.

59. Anstatt eine Zahl von einer Differenz zu subtrahieren, kann man sie auch vom Minuenden subtrahieren.

60. Anstatt eine Differenz zu subtrahieren, kann man auch den Minuenden subtrahieren und den Subtrahenden addieren.

61. Forme folgende Differenzen so um, daß der Subtrahend eine möglichst kleine ganze Zahl wird:

1) 0,78563 — 1,5 2) 0,10547 — 3,6
3) 2,68735 — 3,57 4) 3,15271 — 5,46.

IV. Positive und negative Zahlen.

A. Theorie.

1. Faßt man in der Summe $(a + b)$ nur den zweiten Summanden mit dem vor ihm stehenden Pluszeichen ins Auge, so erweist er sich als eine Größe, durch deren Hinzufügung der erste Summand vergrößert wird. Faßt man ebenso in der Differenz $(a - b)$ den Subtrahenden b samt dem vor ihm stehenden Minuszeichen ins Auge, so erweist er sich als eine Größe, durch deren Hinzufügung der Minuend (a) verkleinert wird. In diesem Sinne nennt man $+ b$ eine positive, $- b$ eine negative Größe, die Hinzufügung der letzteren hat die entgegengesetzte Wirkung, wie die Hinzufügung der

*) Die Formeln und Sätze von 53.—60. sind nicht sehr wichtig. Sie sollen nur zur Übung dienen, aus einer Formel einen Satz abzulesen und einen Satz durch eine Formel darzustellen und zu beweisen. Zugleich ist bei ihnen überall anzugeben, ob die Klammern für den Gang der Rechnung notwendig sind oder nicht.

Digitized by Google

ersteren. Positive und negative Größen sind also entgegengesetzte Größen.*)

Positive und negative Größen begreift man unter dem Gesamtnamen relative Größen, im Gegensatz dazu nennt man eine Größe, die man ohne Rücksicht auf ihr Vorzeichen betrachtet, eine absolute Größe. Man kann annehmen, daß solche Größe durch Hinzufügung zu Null entstanden ist und dies durch das Vorzeichen + zum Ausdruck bringen. Demnach ist eine absolute Größe im Zusammenhang mit anderen Größen als positive Größe aufzufassen.

Die Hinzufügung von $-b$ hat dieselbe Wirkung wie die Subtraktion von b, mithin muß die Subtraktion der negativen Größe $-b$ dieselbe Wirkung haben wie die Hinzufügung der positiven Größe $+b$ oder die Addition von b. In dieser Auffassung denkt man sich den Ausdruck $a+b-c$ aus den Teilen a, $+b$ und $-c$ bestehend, oder als die Summe der Größen a, $+b$ und $-c$, d. h. $a+b-c=a+(+b)+(-c)$.

2. Zu der Einführung negativer Größen wird man besonders durch gewisse praktische Verhältnisse veranlaßt, bei denen man von einem willkürlichen Ausgangspunkt aus nach zwei einander entgegengesetzten Richtungen zu zählen hat. Ein besonders wichtiges und lehrreiches Beispiel hierfür bietet das Thermometer, bei dem durch die Verlängerung der Quecksilbersäule eine Zunahme, durch die Verkürzung dieser Säule eine Abnahme der Temperatur angezeigt wird. Will man diese Verlängerung und Verkürzung messen, so ist man genötigt, irgend einen Stand des Quecksilbers als Ausgangspunkt zu nehmen; bekanntlich hat man dazu den sogenannten „Gefrierpunkt" gewählt, der der Temperatur des schmelzenden Eises entspricht und die Strecke, um die sich die Quecksilbersäule von da aus verlängert, bis sie den der Siedetemperatur des Wassers entsprechenden „Siedepunkt" erreicht hat (bei der Celsiusschen Einrichtung), in 100 gleiche Teile, sogenannte Grade geteilt. Jetzt ist es klar, was die Angabe bedeutet, daß das Thermometer auf 17 Grad steht, das will sagen, zu der Höhe, die die Quecksilbersäule am Schmelzpunkt hat, sind noch 17 Grad hinzugekommen; der Stand des Quecksilbers am Schmelzpunkt selbst muß demnach als „Null Grad" bezeichnet werden, der Schmelzpunkt ist Nullpunkt.

Es fragt sich nun, wie sich der Vorgang ausdrückt, bei dem die Quecksilbersäule unter den Nullpunkt sinkt. Jedes Fallen der Quecksilbersäule in der Richtung vom Siedepunkt nach dem Schmelzpunkt bedeutet eine Verringerung des Quecksilberstandes, drückt sich also durch das Zeichen — aus, von 17° fällt das Thermometer um 3°, um den Stand von 14° zu erreichen, $14^\circ = 17^\circ - 3^\circ$. Fällt das Thermometer um 17°, so erreicht es den Nullpunkt. Fällt es um mehr als 17°, z. B. um 20°, so sinkt es um soviel Grad unter den

*) Die Wörter affirmativ (statt positiv) und negativ wurden zuerst von Vieta gebraucht.

Digitized by Google

Nullpunkt, als die Zahl 20 die Zahl 17 übertrifft, der erreichte Stand hat gegen den Nullpunkt dieselbe Lage wie der Stand von 14^0 gegen 17^0, er läßt sich also entsprechend der Gleichung $14^0 = 17^0 - 3^0$ durch den Ausdruck $0^0 - 3^0$ darstellen; zugleich hat man offenbar

$$17^0 - 20^0 = 0^0 - 3^0.$$

Wie man nun für $0 + a$ einfach a schreibt, so läßt man bei $0 - a$ das Zeichen für die Null fort und schreibt $-a$.

Ganz ähnlich liegt die Sache auch bei anderen Sachverhältnissen, bei denen man ebenfalls zur Annahme eines willkürlichen Ausgangspunktes der Zählung genötigt ist, so namentlich bei der Zeitrechnung. Mag man, wie die moderne Kulturwelt, von der Geburt Christi an, mag man, wie die Römer, von der Erbauung Roms, wie die Mohammedaner von der Hedschra an zählen, immer wird man auch für die vor diesem Ausgangspunkt der Zählung liegende Zeit eine passende Bezeichnung brauchen, wie sie durch die Einführung der negativen Zahlen gegeben wird. Um auf den Beginn der Kreuzzüge zu kommen, muß ich vom Jahre 1900 um 804 Jahre zurückgehen, die Jahreszahl dieses Zeitpunktes wird erhalten, indem ich die Differenz $1900 - 804 = 1096$ bilde. Will ich den Zeitpunkt der Gründung Roms in der christlichen Zeitrechnung zum Ausdruck bringen, so muß ich um $1900 + 753 = 2653$ Jahre zurückgehen, also die Differenz $1900 - 2653$ bilden, ein Ergebnis, zu dem ich auch gelangen kann, wenn ich von dem Ausgangspunkt der christlichen Zeitrechnung unmittelbar um 753 Jahre zurückgehe. Dieses Zurückgehen findet seinen Ausdruck durch die Verminderung der Jahreszahl um den Betrag des Zurückgehens; für den Ausgangspunkt selbst ergibt sich bei der Zeitrechnung ebenso wie bei dem Thermometer die Bezeichnung Null. Mithin findet der Zeitpunkt der Erbauung Roms durch die Jahreszahl

$$1900 - 2653 = 0 - 753 = -753$$

seine Bezeichnung.

3. Diese Beispiele lassen auch deutlich den Sinn erkennen, der den negativen Größen beiwohnt. Die Verminderung der Größe a um die Größe b bedeutet nichts anderes, als die teilweise Aufhebung des Vorwärtsrechnens um den Betrag a durch ein Rückwärtsrechnen um den Betrag b; dieses Rückwärtsrechnen als *selbständige Operation* aufgefaßt findet seinen Ausdruck durch das Operieren mit der negativen Zahl $-b$.

Die Zeichen $+$ und $-$ sind demnach Zeichen für zwei von der Stelle Null ausgehende einander entgegengesetzte Operationen; die Zahlen, die durch fortwährende Anwendung des Zeichens $+$ entstehen, heißen *positiv*, die durch fortwährende Anwendung des Zeichens $-$ entstehenden Zahlen heißen *negativ*.

4. Von negativen Zahlen, als solchen, die durch ein Rückwärtsrechnen entstehen, kann man nur dann sprechen, wenn schon vorher der Begriff Vorwärts feststeht. Das Negative ist also kein selbständiger

Digitized by Google

(absoluter), durch sich selbst erklärter Begriff, sondern ein unselbständiger, nur durch Beziehung auf einen anderen Begriff verständlicher, sogenannter relativer Begriff.

Dagegen sind die durch das Vorwärtsrechnen entstehenden positiven Zahlen einer solchen Beziehung nicht bedürftig. Sie sind absolute Begriffe, was darin seinen Ausdruck findet, daß man, sobald der Gegensatz zum Negativen nicht besonders betont wird, das Zeichen + nicht besonders schreibt. Die Zahl 7 ist eine absolute Zahl, die nur dann, wenn sie der durch die entgegengesetzte Operation entstehenden Zahl — 7 ausdrücklich gegenübergestellt wird, das Zeichen + erhält. Durch diese Gegenüberstellung erhält sie dann eine Beziehung zu einem anderen Begriff und rückt damit in die Reihe der relativen Größen ein. Die natürlichen Zahlen an sich betrachtet sind also absolute Größen. Im Gegensatz zu den negativen Größen heißen sie positive Größen und erfüllen mit den negativen Größen zusammen das Gebiet der relativen Größen. Aus positiven und negativen Zahlen zusammen besteht die beiderseits sich bis ins Unendliche (∞) erstreckende erweiterte Zahlenreihe

$$-\infty, \cdots -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4 \cdots +\infty.$$

Die Null als die Übergangsstelle aus dem Positiven ins Negative kann sowohl als positiv, wie als negativ angesehen werden

$$\pm 0 = 0.$$

5. Die Zeichen + und — heißen, wenn sie zur Bezeichnung der positiven und negativen Zahlen verwendet werden, Vorzeichen. Zahlen mit gleichem Vorzeichen heißen gleichstimmige, Zahlen mit entgegengesetztem Vorzeichen entgegengesetzte oder ungleichstimmige Zahlen.

Wie aus der Entstehung der relativen Begriffe ersichtlich ist, sind diese Vorzeichen ihrer Entstehung nach Operationszeichen, nämlich Zeichen für die Operationen, durch welche die positiven und negativen Größen von Null aus allmählich entstanden sind. Man hat daher in der Rechnung mit ihnen nach den Regeln zu verfahren, die für ihren Gebrauch als Additions- und Subtraktions-Zeichen aufgestellt worden sind.

Dabei kann nunmehr nach Einführung der erweiterten Zahlenreihe jeder Buchstabe je nach den Umständen sowohl eine positive, als eine negative Größe vorstellen. Hat diese Größe selbst noch ein Zeichen (Vorzeichen oder Operationszeichen) vor sich, so ergibt sich aus dem Voranstehenden, daß der Sinn der Größe durch das Zeichen + nicht geändert, durch das Zeichen — aber in sein Gegenteil verwandelt wird. Es muß also z. B., wenn erstens $a = +4$ ist, $+a = +(+4) = +4$, $-a = -(+4) = -4$; wenn zweitens $a = -4$ ist, $+a = +(-4) = -4$, $-a = -(-4) = +4$ gesetzt werden.

6. Negative Größen sind, wie aus ihrer Entstehung hervorgeht, den positiven Größen entgegengesetzt, stehen aber zueinander in ganz

Digitized by Google

derselben Beziehung, in der die positiven Größen untereinander stehen. Wie eine positive Zahl sich aus lauter positiven Einheiten zusammensetzt, so entsteht eine negative Zahl durch das Aneinanderfügen von negativen Einheiten. Der positiven Einheit $+1$ steht die negative -1 gegenüber.

Daraus ergeben sich für die Rechnung mit relativen Größen folgende allgemeine Gesichtspunkte.

Gleichstimmige Größen verstärken sich gegenseitig durch Addition, sie heben einander ganz oder teilweise auf durch Subtraktion.

Ungleichstimmige Größen heben bei der Addition einander ganz oder teilweise auf. Bei der Subtraktion ungleichstimmiger Größen erfährt der Minuendus eine Verstärkung.

7. Das Ergebnis der Rechnung ist selbst stets entweder positiv oder negativ (worin die sowohl als positiv wie als negativ anzusehende Null mit eingeschlossen ist).

In der praktischen Rechnung operiert man zweckmäßigerweise zunächst mit den absoluten Werten der in Betracht kommenden Größen und gibt dem Endergebnis am Schluß das gehörige Vorzeichen.

Die Rechnung erfolgt in Gemäßheit der nachstehenden Regeln.

8. 7 Schritt vorwärts und noch 4 Schritt vorwärts geben 11 Schritt vorwärts. 7 Schritt rückwärts und noch 4 Schritt rückwärts geben 11 Schritt rückwärts.

$$(+a)+(+b)=+(a+b)$$
$$(-a)+(-b)=-(a+b).$$

Gleichstimmige Zahlen werden addiert, indem man ihre absoluten Beträge addiert und dann der Summe das gehörige (bei allen Summanden gemeinschaftlich vorkommende) Vorzeichen gibt.

9. 7 Schritt vorwärts, dann 3 Schritt rückwärts ergeben 4 Schritt vorwärts. Dasselbe Ergebnis findet sich, wenn erst 3 Schritt rückwärts, dann 7 Schritt vorwärts getan werden.

7 Schritt rückwärts, sodann 4 Schritt vorwärts ergeben 3 Schritt rückwärts. Dasselbe Ergebnis findet sich, wenn erst 4 Schritt vorwärts, dann 7 Schritt rückwärts gemacht werden.

Es sei $a > b$, dann hat man

$$\text{I.}\quad (+a)+(-b)=+(a-b)$$
$$\text{II.}\quad (-a)+(+b)=-(a-b).$$

Ungleichstimmige Zahlen addiert man, indem man die dem absoluten Betrag nach kleinere Zahl von der dem absoluten Betrag nach größeren subtrahiert und der Differenz das Zeichen der letzteren Größe vorsetzt.

10. Um relative Größen voneinander zu subtrahieren, muß man sich der in Abschnitt II, Nr. 7. gegebenen Definition der Subtraktion erinnern. Danach bedeutet die Subtraktion die Ermittelung des Betrages, den man zu dem Subtrahenden hinzufügen muß, um den Minuenden zu erhalten.

Digitized by Google

I. Habe ich $+3$ von $+7$ zu subtrahieren, so ist $+7$ der Minuend, $+3$ der Subtrahend. Zu $+3$ habe ich $+4$ zu addieren, um $+7$ herauszubringen

$$+7-(+3)=+4$$
$$(+a)-(+b)=+(a-b), \text{ wenn } a>b.$$

II. Habe ich $+7$ von $+3$ zu subtrahieren, so ist der Minuend kleiner als der Subtrahend. Ich habe zu $+7$ die Zahl -4 zu addieren, um $+3$ zu erhalten. Wenn $a<b$, so habe ich zu $+b$ die Größe $-(b-a)$ zu addieren, um $+a$ herauszubringen.

Um von dem Punkte, der 7 (oder b) Schritte weiter nach vorn liegt, zu dem Punkte zu gelangen, der nur 3 (oder a) Schritte nach vorn liegt, habe ich 4 (oder $a-b$) Schritte rückwärts zu machen,

$$(+3)-(+7)=-4$$
$$(+a)-(+b)=-(b-a), \text{ wenn } b>a.$$

III. Soll (-4) von $(+3)$ subtrahiert werden, so ist $+3$ der Minuend, -4 der Subtrahend. Es entsteht die Frage, was muß geschehen, um von einem 4 Schritt zurück liegenden Punkte nach dem 3 Schritt vorwärts liegenden Punkte zu gelangen (oder was muß am Thermometer vorgehen, um von -4 Grad auf $+3$ Grad zu kommen)? Es sind 7 Schritt nach vorwärts erforderlich (das Thermometer muß um 7 Grad steigen)

$$(+a)-(-b)=+(a+b).$$

IV. Ist umgekehrt $(+4)$ von (-3) zu subtrahieren, so ist der Minuend negativ, der Subtrahend positiv. Es ist zu ermitteln, was man machen muß, um von einem um 4 Schritt nach vorwärts gelegenen Punkte zu einem um 3 Schritt rückwärts gelegenen Punkte zu gelangen. Offenbar muß man 7 Schritt in der Richtung nach rückwärts machen (das Thermometer muß, um von $+4$ auf -3 Grad zu kommen, um 7 Grad fallen),

$$(-a)-(+b)=-(a+b).$$

V. Ist eine negative Größe von einer anderen negativen Größe zu subtrahieren, so macht es einen Unterschied, ob der Minuend oder der Subtrahend den größeren absoluten Wert hat.

Zunächst sei der Minuend größer als der Subtrahend, es sei also etwa (-2) von (-7) zu subtrahieren. Dann handelt es sich um die Beantwortung der Frage: Was muß geschehen, um von einem um 2 Schritt rückwärts gelegenen Punkte zu dem um 7 Schritt rückwärts gelegenen Punkte zu gelangen? Offenbar sind dazu 5 Schritt rückwärts erforderlich

$$(-7)-(-2)=-5$$
$$(-a)-(-b)=-(a-b), \text{ wenn } a>b.$$

VI. Jetzt sei der Minuend dem absoluten Betrag nach kleiner, als der Subtrahend, es handle sich z. B. darum, -7 von -2 zu

Digitized by Google

subtrahieren, also zu ermitteln, was man machen muß, um von einem um 7 Schritt rückwärts gelegenen Punkte zu einem nur um 2 Schritt rückwärts gelegenen Punkte zu gelangen. Dazu braucht man offenbar 5 Schritt nach vorwärts

$$(-2)-(-7)=+5$$
$$(-a)-(-b)=+(b-a), \text{ wenn } b>a.$$

11. Die Einführung der positiven und negativen Zahlen erleichtert die Rechnung mit Buchstaben wesentlich. Hat man z. B. die mehrgliedrigen Größen $5a-4b+3c-6d$ und $4a+7b-8c-2d$ zu addieren, so wird das am einfachsten geschehen, indem man die Glieder mit gleichen Hauptfaktoren untereinander setzt:

$$\begin{array}{r} 5a-4b+3c-6d \\ 4a+7b-8c-2d \\ \hline 9a+3b-5c-8d. \end{array}$$

Bei der Ausrechnung betrachtet man zur Zeit nur die untereinander stehenden Glieder mit ihren Zeichen; man rechnet, als ob die Aufgabe aus vier Aufgaben bestände:

$$\begin{array}{cccc} 5a & -4b & +3c & -6d \\ 4a & +7b & -8c & -2d \\ \hline 9a & +3b & -5c & -8d. \end{array}$$

Dann sind $9a$, $+3b$, $-5c$ und $-8d$ die Teile der gesuchten Summe, für die man somit den Wert $9a+3b-5c-8d$ erhält, indem man die Teile zu einem Ganzen, der Summe, vereinigt. Für $9a+3b-5c-8d$ kann man in diesem Sinne auch schreiben $9a+(+3b)+(-5c)+(-8d)$. — In der angeführten Aufgabe treten die Summanden und Subtrahenden mit ihren Zeichen *selbständig* auf; sie können daher als positive und negative Zahlen angesehen werden. Sind daher die Gesetze der Addition und Subtraktion für relative Zahlen festgestellt, so bedarf es bei solchen Aufgaben der Anwendung der mannigfaltigen, früher über Addition und Subtraktion aufgestellten Gesetze nicht weiter.

12. Ein besonderer Vorteil der Einführung negativer Zahlen liegt ferner darin, daß *alle Differenzen als Summen dargestellt werden können*. Nach dem Obigen besteht die Differenz $a-b$ aus den Teilen a und $-b$; für dieselbe kann folglich auch die Summe $a+(-b)$ geschrieben werden. Versteht man es daher mit negativen Zahlen zu rechnen, so müssen sich alle Gesetze, welche für Summen aufgestellt sind, auch sofort auf Differenzen übertragen lassen.

Digitized by Google

B. Aufgaben.*)

1.	$+8$ $+5$	$+9$ -4	-7 $+3$	-6 -2
2.	$+14$ 8	-17 $+9$	18 -17	-27 -53
3.	-43 $+75$	$+83$ -54	-16 -44	-47 27
4.	$+357$ -281	-823 -757	$+954$ -231	$+534$ -674
5.	$+4a$ $+7a$	$-9b$ $-5b$	$8c$ $-3c$	$-8d$ $+5d$
6.	$8x$ $3x$	$-13y$ $5y$	$19p$ $-11p$	$13q$ $-12q$
7.	m $2m$	n $-5n$	$7u$ $-u$	$-8v$ $-v$
8.	a b	$+a$ $-b$	$-a$ $-b$	$-a$ $+b$
9.	$2a$ $3b$	$5b$ $-a$	a $-3b$	$-a$ $-7b$
10.	$+2{,}32$ $+5{,}9$	$-0{,}37$ $+2{,}1$	$8{,}356$ $-9{,}376$	$-0{,}837$ $-9{,}163$
11.	$+3{,}86$ $-4{,}7$	$-7{,}6$ $-8{,}35$	$-0{,}387$ $0{,}57$	$+0{,}42$ $-0{,}348$
12.	$+\frac{1}{2}$ $-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$ $+\frac{1}{6}$	$-\frac{5}{6}$ $-\frac{2}{3}$	$-\frac{3}{4}$ $\frac{1}{12}$
13.	$+2\frac{1}{6}$ $-3\frac{2}{3}$	$7\frac{5}{12}$ $-5\frac{2}{3}$	$-2\frac{5}{6}$ $3\frac{1}{2}$	$-5\frac{7}{12}$ $-3\frac{3}{4}$
14.	x -1	$+x$ $+5$	-7 $+n$	$+p$ -8
15.	$a-1$ 1	$2-b$ $+3$	$c-5$ 4	$5+m$ -7

*) Die Aufgaben Nr. 1.—39. stellen zunächst Additionsaufgaben vor. Nr. 1.—25. und Nr. 28.—37. können auch als Subtraktionsaufgaben verwendet werden.

Digitized by Google

16.

$5x - 3$	$4 - 3y$	$7 - a$	$5 - b$
$-x$	x	$+2a$	$-b$

17.

$-c+5$	$-2m+1$	$-5n-1$	$-7+8m$
-3	$+2m$	$+5n$	$-7m$

18.

m	3	-6	$+m-9$
$9-m$	$b-5$	$-p+7$	8

19.

$-a$	$-3n$	$+5h$	$+7k$
$1-a$	$7-4n$	$-8-4h$	$-8k+1$

20.

$a-1$	$7-b$	$8-3b$	$2-a$
$a+1$	$b+3$	$2b-5$	$a+2$

21.

$3x-5$	$p-1$	$2q+1$	$2n+7$
$4+x$	$1+2p$	$1-2q$	$2n-7$

22.

$a-x$	$a+b$	$2b-3c$	$x-a$
$a+x$	$b-a$	$2c-b$	$a-x$

23.

$2a-3b$	$5c-2d$	$6m-5x$	$7a-3b$
$4b-a$	$5d-2c$	$3x-5m$	$7b+a$

24.

$a-7xy$	$1+ab$	$2a-3by$	$7x-5$
$b+5xy$	$ax-1$	$4by-1$	$6-y$

25.

$0{,}5a-3b$	$0{,}5a-0{,}3x$	$5{,}5n-7{,}5xy$	$0{,}7x-0{,}8p$
$2b-0{,}3a$	$0{,}3x-0{,}25a$	$3{,}5n+5{,}2xy$	$p-1{,}2x$

26.

$+6a$	$-5b$	$19cx$	$18dy$
$-7a$	$+7b$	$-5cx$	$+14dy$
$+2a$	b	$-7cx$	$-27dy$
$-a$	$-3b$	$+5cx$	$-dy$

27.

$7ax$	$+9mx$	$-5mp$	$8xy$
$-2bc$	$-7by$	$-nq$	$+ab$
$-5ax$	$+5by$	$-3mp$	$-5xy$
$+bc$	$-8mx$	$+9mp$	$-4xy$

28.

$3a-5b+7cx-8dy$	$+2x-7y+m-8uv$
$4a-7b-3cx-5dy$	$-x-5y-m+5uv$

29.

$7m-3n+5pq-4r$	$-3a-5b+7x-5ty$
$8m-2n-6pq+r$	$4a+2b-8x+ty$

30.

$2a-4b+7c-3d-5e-8f+7-4x$
$9a-2b-8c+7d+e+7f-7+3x-y$

Digitized by Google

31. $+a-5b-7c+8d+e-7f+5h-3k+8n$
$-a+6b+3c-9d-e+5f+h-4k-9n$

32. $58a-45b-73c-59d-35x+63y-38z$
$22a+29b+37c-11d+71x-89y+57z$

33. $19a-47b+32c-59x-61y+81u-45v$
$21a+57b-61c+39x-19y-81u+71v$

34. $0{,}35a-5{,}4b+2{,}83c-1{,}84d-3{,}8x-7{,}2y$
$0{,}65a+6{,}7b-7{,}5c-2{,}76d+3{,}8x-0{,}88y$

35. $2{,}7a+3{,}5b-5{,}67c-0{,}85d+2{,}7x+8y-0{,}9t$
$1{,}3a-7b+7{,}8c-9{,}15d-0{,}36x-7{,}4y+3{,}56t$

36. $0{,}5a-0{,}75b+0{,}8c-3d+0{,}4h-3{,}5x+2{,}3y+1{,}5u$
$0{,}8a+0{,}4b-1{,}3c-2{,}5d+0{,}2h-6{,}5x-1{,}1y-u$

37. $5{,}5a-7{,}25b-5{,}7c+2{,}75d-4{,}5m-3{,}5n+5{,}75p-7q$
$1{,}5a-2{,}05b+6{,}7c-3{,}25d+2{,}8m-4{,}5n-6{,}75p+0{,}8q$

38. $8a-3b+7c+x+5m-7n-3p+7q$
$-4a+b-7x-3m-4n+2p-4q$
$-5a+4b-5c+8x+3m+8n-p-7q$
$+2a-2b-3c-x-4m+2n+7p+5q$

39. $1{,}37a-7{,}8b+2{,}92x \quad 0{,}83p-2{,}75t-12y$
$-2{,}6a+4{,}9b-7{,}55x \quad 0{,}27p-1{,}9t+9y$
$9{,}33a-5{,}2b+0{,}83x \quad -13{,}5p+8t-3{,}8y$
$-8{,}1a+8{,}4b+2{,}8x \quad 17{,}4p-3{,}35t+7{,}8y$

40.*) A hat 375 ℳ Vermögen und keine Schulden, B hat 285 ℳ Schulden und kein Vermögen. Es fragt sich: 1) Wieviel Vermögen haben A und B zusammen? 2) Wieviel Vermögen hat A mehr als B?

41. A hat 573 ℳ Vermögen, B hat 986 ℳ Schulden. Wieviel Vermögen haben 1) A und B zusammen? 2) Wie viel Vermögen hat A mehr als B? 3) Wieviel Schulden haben A und B zusammen? 4) Wieviel Schulden hat B mehr als A?

*) Die folgenden Aufgaben sollen zum weiteren Verständnis der positiven und negativen Zahlen dienen. Es ist daher eine eingehende Erörterung derselben notwendig: Ansatz in mathematischen Zeichen, Ausrechnung, Resultat, Deutung des Resultats, Übereinstimmung des Resultats mit dem der gewöhnlichen Rechnung, Allgemeinheit der mathematischen, Besonderheit der gewöhnlichen Auffassung.

Digitized by Google

42. Es hat jemand an Vermögen 7350 ℳ, 8940 ℳ und 810 ℳ; an Schulden 5730 ℳ, 3920 ℳ und 6350 ℳ. Wieviel hat er im ganzen 1) an Vermögen, 2) an Schulden?

43. P hat p ℳ Vermögen, Q hat q ℳ Vermögen. a) Wieviel Vermögen haben P und Q zusammen? b) Wieviel hat P mehr als Q? Wende dies auf folgende besondere Fälle an: 1) P hat 500 ℳ Vermögen, Q 450 ℳ; 2) P hat 570 ℳ Vermögen, Q 750 ℳ; 3) P hat 630 ℳ Vermögen, Q 270 ℳ Schulden; 4) P hat 540 ℳ Schulden, Q 360 ℳ Vermögen.

44. Es wurde A im Jahre a nach Christus geboren, B im Jahre b. Um wieviel Jahre wurde A später geboren als B? Wende dies an auf folgende Fälle: 1) a = 1880, b = 1750; 2) a = 1470, b = 1648.

45. Wie läßt sich die vorige Aufgabe ausdehnen auf folgende Fälle: 1) A wurde geboren 93 nach Christus, B 54 vor Christus; 2) A 75 vor Christus, B 45 vor Christus; 3) A 35 vor Christus, B 81 vor Christus; 4) A 47 vor Christus, B 31 nach Christus.

46. Es wurde jemand geboren im Jahre a und starb im Jahre b. Wie alt ist derselbe geworden? Wende dies auf folgende Fälle an: 1) geb. im Jahre 1812, gest. im Jahre 1880; 2) geb. im Jahre 41 vor Christus, gest. im Jahre 39 nach Christus.

47. Ein Thermometer zeigte an einem Tage a Grad, an einem anderen Tage b Grad. Wieviel Grad stand es am ersten Tage höher als am zweiten Tage? Wende dies auf folgende Fälle an: 1) a = 19 Grad Wärme, b = 12 Grad Wärme; 2) a = 17 Grad Wärme, b = 10 Grad Kälte*); 3) a = 2 Grad Kälte, b = 26 Grad Kälte; 4) a = 9 Grad Wärme, b = 19 Grad Wärme; 5) a = 15 Grad Kälte, b = 10 Grad Wärme.

48. Am Morgen stand das Thermometer auf a Grad, um 2 Uhr nachmittags auf b Grad. Um wieviel Grad war es gestiegen? Was bedeutet das 1) für a = 8 Grad Wärme, b = 17 Grad Wärme; 2) für a = 2 Grad Kälte, b = 10 Grad Wärme?

49. Im Juli hatte man eine mittlere Temperatur von a Grad, im August von b Grad. Um wieviel Grad war es im Juli wärmer als im August? Setze hierbei 1) a = 19 Grad, b = 15 Grad; 2) a = 14 Grad, b = 17 Grad.

50. Im Juli war die durchschnittliche Temperatur a Grad, im Januar b Grad. Um wieviel höher war die Temperatur im Juli als im Januar? Was macht das 1) für a = 18 Grad Wärme, b = 1 Grad Wärme; 2) a = 16 Grad Wärme, b = 7 Grad Kälte?

*) Richtiger sollte man statt Wärme und Kälte bez. über Null und unter Null sagen. Grund!

Digitized by Google

51. Die Zahl 7 ist näherungsweise bestimmt worden durch 1) 7,03, 2) 6,99, 3) 6,97, 4) 7,01. Wie groß sind die Fehler?

52. Das (arithmetische) Mittel zwischen den Zahlen 74, 81, 72, 79, 80, 76 ist 77. Um wieviel weichen die einzelnen Zahlen vom Mittel ab?

53. A und B spielen Kegel. Sie fangen von 100 an abzuschreiben. A hat 70 Points gemacht, B 120. Wie steht die Partie?

54. A und B spielen Kegel. Sie fangen von 100 an abzuschreiben. Nach einer gewissen Anzahl von Würfen hat A schon a Points gut, B ist noch mit b Points in der Kasse. Wieviel Points hat 1) A mehr als B? 2) Wieviel Points hat A überhaupt mehr gemacht als B? 3) Wieviel Points haben A und B zusammen gemacht?

55. Addiere zu der Summe $a + b$ die Differenz $a - b$, und drücke die so gewonnene Formel in Worten aus.

56. Was erhält man nach dem in der vorigen Aufgabe entwickelten Satze: 1) wenn man zu der Summe der Zahlen 9385 und 7963 die Differenz derselben addiert? 2) wenn man zu der Summe der Brüche $\frac{1}{2}$ und $\frac{5}{13}$ die Differenz derselben addiert? 3) wenn man zu der Summe der Brüche $\frac{315}{648}$ und $\frac{371}{987}$ die Differenz derselben addiert?

57. Subtrahiere von der Summe $a + b$ die Differenz $a - b$, und drücke die so gewonnene Formel in Worten aus.

58. Was erhält man nach dem in der vor. Aufgabe entwickelten Satze: 1) wenn man von der Summe der Zahlen 8753 und 45 die Differenz derselben subtrahiert? 2) wenn man von der Summe der Brüche $\frac{35}{67}$ und $\frac{1}{2}$ die Differenz derselben subtrahiert? 3) von der Summe der Zahlen 2,386 und 1,75 die Differenz derselben?

V. Klammern.

A. Theorie.

1. Ein in Klammern stehender Ausdruck kann *erstens* an sich betrachtet werden. Insofern können die Klammern eine Summe einschließen, wie in $a - (b + c)$ und $(a + b)x$; eine Differenz, wie in $a - (b - c)$ und $(a - b)x$; eine mehrgliedrige Größe, wie in $(a + b - c)x$; ein Produkt, wie in $(a \cdot b) : c$ usw. Ein in Klammern stehender Ausdruck kann *zweitens* in bezug auf die außerhalb der Klammern stehenden Größen betrachtet werden. Insofern können Klammern einen Summanden, einen Minuenden, einen Subtrahenden, einen Faktor, einen Dividenden, einen Divisor umschließen, wie es bezw. der Fall ist in $a + (b + c)$, $(a + b) - c$, $a - (b + c)$, $(a + b)x$, $(a - b) : x$, $a : (b + c)$. Nur im zweiten Sinne ist in diesem Abschnitte von Klammern die Rede, und zwar

Digitized by Google

nur von den Klammern, welche einen Summanden, einen Minuenden oder einen Subtrahenden einschließen.

2. Klammern, die einen Summanden oder einen Minuenden einschließen, also entweder das Zeichen + oder überhaupt kein Zeichen vor sich haben, können ohne weiteres weggelassen werden. Das Ergebnis der Rechnung wird dadurch nicht geändert.

$$m + (a + b) = m + a + b, \qquad m + (a - b) = m + a - b,$$
$$(a - b) - m = a - b - m.$$

3. Klammern, welche einen Subtrahenden einschließen, werden dadurch aufgelöst, daß man das Zeichen jedes Gliedes in der Klammer umkehrt, d. h. + in — und — in + verwandelt. Das erste Glied in der Klammer erhält demnach, wenn es selbst kein Zeichen hat, bei der Auflösung der Klammer das Zeichen — (minus)

$$m - (a + b) = m - a - b, \qquad m - (a - b) = m - a + b.$$

4. Um mehrere Glieder eines Ausdrucks zu einem Summanden oder Minuenden zusammenzufassen, hat man sie nur mit einer Klammer zu umgeben und vor die Klammer das Zeichen + zu setzen. War das erste dieser Glieder selbst ein Summand, so kann sein Vorzeichen für die ganze Klammer benutzt und innerhalb der Klammer also bei diesem Gliede weggelassen werden.

$$m + a + b = m + (a + b), \qquad m + a - b = m + (a - b),$$
$$m - a + b = m + (b - a).$$

5. Will man mehrere Glieder zu einem Subtrahenden zusammenfassen, so hat man vor jedem Gliede das Zeichen umzukehren und dann die betreffenden Glieder mit einer Klammer zu umgeben, der das Zeichen — vorgesetzt wird. War das erste dieser Glieder selbst ein Subtrahend, so wird es in der Klammer zum Summanden, sein Minuszeichen kann dann als Zeichen vor der ganzen Klammer Verwendung finden, während das Glied selbst in der Klammer ein Zeichen nicht erhält. Man wird die zu vereinigenden Glieder immer so ordnen, daß das erste selbst ein Subtrahend ist

$$m - a - b = m - (a + b), \qquad m - a + b = m - (a - b),$$
$$m + a - b = m - (b - a).$$

6. Kommen Klammern in Klammern vor, so kann man beliebig erst die inneren und dann die äußeren auflösen, oder umgekehrt, erst die inneren und dann die äußeren. Bei einiger Übung ist es leicht, alle Klammern zugleich aufzulösen.*)

*) Die Beweise für die hier angeführten Sätze ergeben sich leicht aus den Sätzen im III. Abschnitt.

Digitized by Google

B. Aufgaben.

Schaffe in folgenden Ausdrücken die Klammern fort, und führe die Rechnung aus, soweit es sich tun läßt. Zugleich ist anzugeben, ob die Klammern für den Gang der Rechnung notwendig sind, oder nicht, und wie im ersten Falle der Gang der Rechnung ohne die Klammern sein würde.

1. $587 + (13 + 768)$ $(759 + 17) + 983$
2. $573 + (429 - 73)$ $247 + (328 - 37)$
3. $(7a + 5b) + 2a$ $8a + (7b - 3a)$
4. $(3x - b) + 5b$ $(5x - 7a) + 4a$
5. $725 - (25 - 268)$ $327 - (98 + 127)$
6. $7x - (3x + 5)$ $5a - (3a - b)$
7. $2a - (a + b - c)$ $a - (a - b + c)$
8. $x + (a - b - x)$ $x - (x - a - b)$
9. $(a + 3b) - (a - 2b)$ $(2a - 5b) - (a - 3b)$
10. $(a - 7x) - (a - 8x)$ $(3a + x - 2y) - 3a$
11. $(2a - 3b) + (3a - 5b) - (a - 7b) - (2a - 2b)$
12. $(3a - 5b) - (4a + 8b) + (2a + 6b) - (a - 9b)$
13. $(7x - 5) - (3x + 7) + (8 - 2x) - (x - 3)$
14. $3a + (a + 7b - 4c) - (3a + 5b - 3c) - (b - c)$
15. $(2x - 7y + 5z) - (5x - 3y + 4z) + (6x + 3y - z)$
16. $(9m - 8n + 7p) + (5n - 7p - 8m) - (2p - m - 3n)$
17. $(5x - 3a - 5b) - (7x + 2a - 5b) + (3x + 4a - b)$
18. $(73a - 49b + 18c) - (53a - 87b + 35c) - (8b - 17c)$
19. $(84a - 57b) - (29a - 73b) - (53a + 31b) + 5b$
20. $aa - (9ab - 7bb) + (aa + 7ab - 6bb) - (aa - 2ab)$
21. $(3ax - 5by - 6cx) - (2ax - 3by + cx) + (3by + 7cx)$
22. $(3ab - 7xy) - (5ab - 3xy + 1) + (3ab + 3xy)$
23. $(5xx - 2x + 7) - (6xx - 3x + 5) + (4xx + 4x - 3)$
24. $(6xx + 3x - 5) + (3xx - 7x + 2) - (9xx - 3x - 4)$
25. $(3{,}5a - 7{,}2b) - (5{,}4a + 3{,}6b) + (2{,}7a + 11{,}8b)$
26. $9{,}4a + (3{,}5a + 7{,}6b) - (8{,}7a + 9{,}3b) - (a + b)$
27. $(2x - 8{,}5y) - (2x - 3{,}8y - 5{,}4z) - (6{,}5z - 5{,}7y)$
28. $(0{,}5a - 0{,}33b + 0{,}25c) - (0{,}17a - 0{,}25b - 0{,}5c)$
$- (0{,}33a - 0{,}33b + c)$
29. $(0{,}67a - 0{,}75b - 0{,}5c) + (0{,}5a + 0{,}67b + 0{,}25c)$
$- (0{,}17a - 0{,}08b + 0{,}75c)$
30. $(3{,}5a - 2{,}3b) - (2{,}75a - 7{,}5b) - (0{,}25a - 0{,}8b)$

Digitized by Google

31. $(2{,}25x - 1{,}5y) + (1{,}33x - 3{,}17y) - (2{,}08x - 3{,}67y)$
32. $(a - x) + ((2a - x) - 7) - (a - 2x - 6)$
33. $2a + ((a - b) + (c - d)) + (b - c)$
34. $(a - b) - ((b + x) - a) - (a - x)$
35. $5a + (3x - (2a - b)) - (4x + b - a)$
36. $(3a - 2b) - (a + c) - (a - (b + c))$
37. $(7a - (5b - c)) - (3a + (8b - c)) - (3a - 9b + 2c)$
38. $5x - (3x - (7 - 5y)) + (x - (9 - 6y)) - (2x + y)$
39. $(3x - y) - ((x - y) - (3x - 5y)) - (2x - 4y)$
40. $((2x - 5y) - (7x - 3y)) - ((3x - 5y) - (8x - 7y))$
41. $(0{,}5a - 0{,}33b) - (3{,}5a - (1{,}5b - 5a)) + (8{,}5a - 2{,}5\,b)$
42. $7{,}83a + ((2{,}25x - 1{,}5b) - (7{,}5a + 3x)) + (1{,}5b - 0{,}25x)$
43. $(2{,}5x - 3{,}25y) - ((1{,}33x - 2y) - (1{,}75y - 2{,}5z)) - (0{,}67x - 2{,}5z)$
44. $3{,}75x - ((2{,}17y - 0{,}85z) - 0{,}45x) + (1{,}57y + 0{,}15z)$
45. $x - (0{,}38x - (4{,}54y - 3{,}25x)) - (0{,}14y - 2{,}63x)$
45_1. $(2a + b) - [(2a - 3b) + (5a + 7b)] - [b - 13a]$
45_2. $(7a - 4b) - [(4a - c) - (4b - 3c)]$
45_3. $(10a - 5c) - [\{(3b - 5c) + 6a\} - 3b]$
45_4. $(7a + 4b) - [4b - \{4c + (x - 8a)\}]$
45_5. $(2x + 7y) - [(6x - y) - (5x - 7y)] + (x + y)$
45_6. $\{(4a - 3b) - 2x\} - \{(3x + 4b) - (4x - a + b)\}$
45_7. $(9m - l) + 3p - [(39 + 4p - l) + 6m - (29 - 3p)]$
45_8. $[(8x - y) - 7y + 6] - [(5x - 3y) - (3x - 6)] - (6x - 5y)$
45_9. $2z - [(7u - 6v) + (3u - 4v) - (z - u - v)]$
45_{10}. $(7u + 9v) + [(12u - 13v) - \{(10v + 11w) - (5w - 4u)\}]$
45_{11}. $(8k + 7l) + [(11m - 12l) - \{(8l + 9m) - (4m - 3k)\}]$
45_{12}. $[(7a + 4b) - (3b + 6c)] + [4a + (2b - 11c) - \{3a - (4c + b)\}]$
45_{13}. $(17a - 2b + 5c) - (8a - 26b - 3c) - (2c + b - 4a)$
45_{14}. $18a - [15a - (3b + 5c)] - [(2b - 3c) + 6a]$
45_{15}. $[75a - 45b] - [(34c - 65a) - \{58c - (120a - 76c)\}]$
45_{16}. $8u + [v - \{6u + (v + 2u)\}] - (10u - 5v)$
45_{17}. $(4a - 11b) + [7a + 10b - \{b + 4c + (3c - 4a)\}]$
45_{18}. $(2y - z) - [\{y - (2x + 3y)\} - \{(5x - 3y) - 7z\}]$
45_{19}. $(5u - 6v) + [8u + 10v - \{3u + 4w - (3w - 5u)\}]$
45_{20}. $(3m - 4o) - [\{4n - (m - 2n)\} - \{(5m - 2n) - 6o\}]$.

46. Die Differenz zweier Zahlen soll zu ihrem Subtrahenden addiert werden Was gibt das, und wie folgt das aus der Rechnung?

Digitized by Google

47. Die Differenz zweier Zahlen soll von ihrem Minuenden subtrahiert werden. Was gibt das, und wie folgt das aus der Rechnung?

48. Beweise: Die Differenz zweier Zahlen (a und b) zu ihrer Summe addiert gibt die doppelte erste Zahl ($2a$). Zeige die Richtigkeit des Satzes an den Zahlen: 1) 385 und 239; 2) 7,25 und 6,937; 3) 117 und 201; 4) 0,48 und 2,22.

49. Beweise: Die Summe zweier Zahlen (a und b) um deren Differenz vermindert gibt die doppelte zweite Zahl ($2b$). Zeige die Richtigkeit des Satzes an den Zahlen: 1) 783 und 465; 2) 83 und 97; 3) 5,324 und 3,7; 4) 6,23 und 0,481.

Schließe in folgenden mehrgliedrigen Ausdrücken alle Glieder außer dem ersten in Klammern ein, in den Aufgaben links in einen Summanden, in denen rechts in einen Subtrahenden. Das erste Glied in der Klammer soll positiv sein.

50. $x + a + b$	$a - x + y$
51. $x + 3a - 2b$	$a - x - y$
52. $p - a + x$	$a - b - c$
53. $a - b + y$	$a - x + 1$
54. $a + 3x - 5y + 1$	$a - b + c - d$
55. $5x - 3a + m + q$	$a + b - x - y$
56. $x - 3a + 7b + y$	$a + 3x - 5y - m$
57. $a - 7x - 3y + b$	$x + 2y - 4a - b$.

VI. Multiplikation.

A. Theorie.

1. Im Abschnitt II, Nr. 13. bis 24. waren die Hauptgesetze der Multiplikation bereits aufgestellt worden, von denen die nachfolgenden unter Nr. 15., 16. und 20. aufgestellten Formeln nochmals hier wiedergegeben werden sollen.

$$\text{I. } a \cdot b = b \cdot a$$
$$\text{II. } abc = acb = bac = bca \text{ usw.}$$
$$\text{III. } (a + b) \cdot c = ac + bc$$
$$(a - b) \cdot c = ac - bc.$$

2. Die beiden unter Nr. III zusammengefaßten Formeln lassen sich gemeinsam in den Satz zusammenfassen:

Statt eine mehrgliedrige Größe im ganzen zu multiplizieren, kann man die Multiplikation an jedem einzelnen Gliede vornehmen.

$$(a + b)m = am + bm, \quad (a - b)m = am - bm.$$

Digitized by Google

3. Multipliziert man eine mehrgliedrige Größe mit einer zweiten ebenfalls mehrgliedrigen Größe, so kann man die oben aufgestellte Regel wiederholt anwenden. Man hat dann die Gleichungen:

$$(a+b)(x+y) = (a+b)x + (a+b)y = ax + bx + ay + by$$
$$(a+b)(x-y) = (a+b)x - (a+b)y = ax + bx - ay - by$$
$$(a-b)(x-y) = (a-b)x - (a-b)y = ax - bx - ay + by.$$

Aus dem Schlußergebnis ersieht man, daß hierbei tatsächlich jedes Glied des einen Faktors mit jedem Gliede des anderen Faktors multipliziert wird, wobei gleichstimmige Größen ein positives und ungleichstimmige ein negatives Produkt ergeben.

4. Da bei diesen Einzelmultiplikationen immer nur die Faktoren jedes einzelnen Teilprodukts in Betracht kommen, muß diese Regel auch dann gültig sein, wenn man nur mit solchen einzelnen Produkten zu tun hat. Es gelten also nachstehende vier Multiplikationsregeln:

$$(+a)\cdot(+b) = +ab$$
$$(+a)\cdot(-b) = -ab$$
$$(-a)\cdot(+b) = -ab$$
$$(-a)\cdot(-b) = +ab.$$

5. Bei diesen Formeln wird man vor allem nach dem Sinn fragen, den die Verwendung negativer Größen bei der Multiplikation besitzt. Um diesen Sinn zu ergründen, muß man auf den Begriff der Multiplikation zurückgehen, den man auch in die Worte fassen kann, daß die Multiplikation der Größe a mit b nichts anderes bedeutete, als daß das Produkt ab aus dem Multiplikandus a ganz ebenso entstehen sollte, wie der Multiplikator b aus der (absoluten) Einheit. Wie durch $b$maliges Setzen der Zahl Eins als Summanden die Zahl b entsteht, so entsteht durch $b$maliges Setzen der Größe a das Produkt ab; d. h. $(+a)(+b) = +ab$.

Auch der Fall macht dann keine Schwierigkeiten, in dem der Multiplikandus negativ ist. Diesen negativen Multiplikandus $-a$ hat man $b$mal als Summanden zu setzen, das gibt $-ab$;

$$(-a)(+b) = -ab.$$

Hat jetzt der Multiplikandus den positiven Wert $+a$, der Multiplikator den negativen Wert $-b$, so fragt es sich: Wie entsteht $-b$ aus der absoluten Einheit, also aus $+1$? Offenbar dadurch, daß man zunächst das Zeichen $+$ in sein Gegenteil verwandelt und die so entstehende entgegengesetzte Größe $b$mal als Summanden setzt. Entsprechend hat man an der Größe $+a$ das Zeichen zu ändern und die entstehende Größe $-a$ nunmehr $b$mal als Summanden zu setzen: $(+a)\cdot(-b) = (-a)\cdot b = -ab$.

Ist der Multiplikandus ebenfalls negativ, so ergibt das ganz entsprechende Verfahren die Gleichung

Digitized by Google

$$(-a)\cdot(-b) = (+a)\cdot b = +ab.$$*)

6. Hat man eine größere Zahl relativer Faktoren, so muß man die Regel unter Nr. 4. wiederholt anwenden. Es kommt in solchem Produkt auf die Zahl der negativen Faktoren an. Ist diese gerade, so hat das Produkt einen positiven, ist sie ungerade, so hat es einen negativen Wert.

7. Klammern, die einen Faktor einschließen, werden durch Ausführung der Multiplikation aufgelöst. Dies geschieht in Gemäßheit der folgenden Formeln, deren Begründung sich aus dem Voranstehenden ergibt:

$$m + (a + b - c)x = m + ax + bx - cx$$
$$m - (a + b - c)x = m - ax - bx + cx$$
$$m + (a + b - c)(-x) = m - ax - bx + cx$$
$$m - (a + b - c)(-x) = m + ax + bx - cx.$$

Kommen Klammern in Klammern vor, so kann man auch hier (vgl. Abschn. V, Nr. 6.) erst die äußeren Klammern auflösen und dann die inneren, oder umgekehrt. Bald ist dies, bald jenes vorteilhafter. Das Ergebnis muß schließlich bei beiden Verfahrungsarten dasselbe sein.

8. Ein Produkt, dessen Faktoren sämtlich untereinander gleich sind, wird eine Potenz dieses immer wiederkehrenden Faktors genannt. So sind aa, aaa, $aaaa$ usw. Potenzen von a. aa ist die 2. Potenz von a, wird kurz geschrieben a^2 und dann gelesen a zur zweiten (Potenz), oder a (im) Quadrat, oder a hoch 2. aaa ist die 3. Potenz von a, wird geschrieben a^3 und dann gelesen a zur dritten (Potenz), oder a (im) Kubus, oder a hoch 3. $aaaa$ ist die 4. Potenz von a, wird geschrieben a^4 und dann gelesen a zur vierten (Potenz), oder a hoch 4 usw.

Jede Zahl wird dabei als die erste Potenz von sich selbst betrachtet

$$a^1 = a.$$

Hat man einen Ausdruck, in dem viele Potenzen derselben Größe vorkommen, so pflegt man ihn nach steigenden oder fallenden Potenzen dieser Größe zu ordnen.

---

*) Man kann sich von der Richtigkeit der oben in Rede stehenden Formeln auch durch eine geometrische Betrachtung überzeugen. Die Größe $(-a)$ wird durch eine Strecke dargestellt, deren Richtung der Richtung der Strecke, die die Größe $+a$ darstellt, gerade entgegengesetzt ist. Nun ist $(-a) = a\cdot(-1)$, d. h. a in $-a$ verwandeln oder mit (-1) multiplizieren, bedeutet die Strecke a um einen Winkel von 180° drehen, wodurch sie die gerade entgegengesetzte Richtung erhält. Ferner ist $(-a)(-b) = a(-1)\cdot b(-1)$. Hier treten zwei Faktoren vom Werte (-1) auf, d. h. es finden zwei Drehungen um 180° statt, wodurch wieder die ursprüngliche Richtung erhalten wird. Es muß also $(-a)(-b) = +ab$ sein.

Digitized by Google

So nimmt z. B. der Ausdruck

$$24a^3 + 8a^2b - 9ab^3 + 7a^5 + 20ab^2 + 11b + 13$$

bei der Ordnung nach fallenden Potenzen von a die Gestalt an

$$7a^5 + 24a^3 + 8a^2b - 9ab^3 + 20ab^2 + 11b + 13,$$

indem die höheren Potenzen von a den niederen voraufgehen.

Das vierte und das fünfte Glied dieses Ausdrucks enthalten die gleiche Potenz von a, sie sind dann unter sich nach fallenden Potenzen von b geordnet.

Welche Gestalt nimmt der vorstehende Ausdruck bei Ordnung nach steigenden Potenzen von a an?

9. Folgende Formeln sind zu beweisen, fest einzuprägen und in Worten auszudrücken:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$
$$(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$$
$$(a + b)\,(a - b) = a^2 - b^2$$
$$(a + b + c)^2 = a^2 + 2ab + b^2 + 2ac + 2bc + c^2.$$

B. Aufgaben.*)

1.	$2a \cdot 5$	$4 \cdot 3x$	$7 \cdot 8b$	$6x \cdot 9$
2.	$8 \cdot 7 \cdot 25$	$6 \cdot 37 \cdot 5$	$7 \cdot 8 \cdot 15$	$4 \cdot 47 \cdot 75$
3.	$125 \cdot 9 \cdot 8$	$16 \cdot 19 \cdot 375$	$37 \cdot 8 \cdot 3$	$4 \cdot 13 \cdot 625$
4.	$0{,}25 \cdot 8a$	$4b \cdot 3{,}75$	$6c \cdot 13{,}5$	$8x \cdot 0{,}15$
5.	(12.) $2a \cdot 3b$	$8a \cdot 5b$	$7c \cdot 13d$	$5x \cdot 18y$
6.	(15.) $0{,}4a \cdot 15b$	$1{,}5x \cdot 8y$	$0{,}3a \cdot 0{,}2b$	$0{,}8a \cdot 0{,}5c$
7.	(17.) $(+4ab) \cdot (-15xy)$		$(-4abc) \cdot (-7axy)$	
8.	(19.) $(-a) \cdot (-b) \cdot (-c)$		$(-a) \cdot (-b) \cdot (-c) \cdot (-d)$	
9.	(20.) $(-2) \cdot (+3) \cdot (+4) \cdot (-5)$		$(+1) \cdot (-2) \cdot (-3) \cdot (+4) \cdot (-5)$	
10.	(21.) $(a - b + c) \cdot 5$		$(3a + 5b - 7c) \cdot 6$	
11.	(22.) $7(2a - 3b + 8)$		$8(a - 7b + 5c)$	
12.	(23.) $(3a - 4b + 5c) \cdot 2x$		$3(5n - 3p - 7q)y$	
13.	(24.) $(3a - 2b + 7c)(+5a)$		$(a - 7b + 8c) \cdot (-5x)$	
14.	(25.) $(-a + 3b - 5c) \cdot (-7ax)$		$(-a - 5b + 8c) \cdot (-2by)$	
15.	(26.) $(2a - 3b + 6c) \cdot (+2x)$		$(6a - 8b - 9x) \cdot (-3a)$	
16.	(30.) $(3x^2 - 2x + 1) \cdot 2x$		$(ax^2 + bx - c) \cdot 3x$	
17.	(31.) $(8x^2 + 6x - 5) \cdot 1{,}5x$		$(ax^2 - by + c) \cdot x^2$	
18.	(32.) $3(a + b) + 5(a - b) - 6(a + b) - (a - 7b)$			
19.	(33.) $2(x - y) - 3(x + y) - 7(x - y) + 8(x + y)$			

*) Unter den Aufgaben finden sich auch solche, bei denen die Koeffizienten keine ganzen Zahlen, sondern Dezimalbrüche sind. Für diese gilt dasselbe, wie für die entsprechenden Aufgaben des Abschnitts III, B; s. d. Anm. auf S. 18.

Digitized by Google

20. (34.) $5(a-b+c)+6(-a+b-c)-7(-a+b+c)$
21. (35.) $3(2a-6b-5c)-2(a-5b-8c)-4(a-2b)$
22. (36.) $5a(3a-2b-2c)+2b(5a-3b+5c)+10c(a-b)$
23. (37.) $5(a-2b-3c)x-3(3a-4b-5x)c+2(5x-6c)b$
24. (38.) $3(4a+2b-5c)a-2(3a-5b+9c)b+3c(5a+6b)$
25. (43.) $(a+b)(x-y)$ $(a-b)(n-p)$
26. (44.) $(2a-3b)(3x-2y)$ $(5a-7b)(2x-8y)$
27. (45.) $(5a-b)(2a+3b)$ $(3a+5b)(7a-b)$
28. (46.) $(3x-2y)(5x+3y)$ $(5a+4b)(3a-5b)$
29. (47.) $(3n+1)(5n-2)$ $(7+3x)(5-2x)$
30. (48.) $(a+x)(a+x)$ $(b+y)(b+y)$
31. (49.) $(x+y)^2$, $(x+5)^2$ $(3x+4y)^2$, $(7a+3b)^2$
32. (50.) $(a-x)(a-x)$ $(b-y)(b-y)$
33. (51.) $(a-3)^2$, $(5-x)^2$ $(2a-5b)^2$, $(7a-x)^2$
34. (52.) $(8b-3y)^2$, $(5n-1)^2$ $(a+1)^2$, $(1-b)^2$
35. (53.) $(x+y)(x-y)$ $(a+x)(a-x)$
36. (54.) $(a+5)(a-5)$ $(x+1)(x-1)$
37. (55.) $(3x+2)(3x-2)$ $(7a-3)(7a+3)$
38. (56.) $(5a+7b)(5a-7b)$ $(9a-2x)(9a+2x)$
39. (57.) $(20+5)^2$, $(50+4)^2$ $(20-1)^2$, $(40-3)^2$
40. (58.) $(30+1)(30-1)$ $(60+2)(60-2)$
41. (59.) $(90+7)(90-7)$ $(100+8)(100-8)$
42. (62.) $(3{,}5a-7b)(4a+3{,}5b)$ $(0{,}4x+8{,}5y)(5x-0{,}4y)$
43. (63.) $(2{,}75n-0{,}8)(3{,}6n-1{,}25)$ $(3{,}25a+1{,}6x)(2{,}4a-7{,}5x)$
44. (64.) $(0{,}3a-0{,}2b)(0{,}2b+0{,}3a)$ $(1{,}4a-2{,}5x)(1{,}4a+2{,}5x)$
45. (65.) $(1{,}2a-0{,}5b)(0{,}5a+1{,}2b)$ $(3{,}5a+2{,}8x)(4a-3{,}2x)$
46. (68.) $(a+b)^2+(a-b)^2$ $(a+b)^2-(a-b)^2$
47. (69.) $(x+1)^2+(x-1)^2$ $(1+x)^2-(1-x)^2$
48. (70.) $(a+b+x)^2$ $(a+b-x)^2$
49. (71.) $(3a+2b-5c)^2$ $(7a-5b-6c)^2$
50. (72.) $(a-3b+7x)^2$ $(3a-5x+y)^2$
51. (74.) $(a+b+x)(a+b-x)$ $(a-x+y)(a+x-y)$
52. (75.) $(3a-2b+x)(3a+2b+x)$ $(2a-x-3y)(2a+x-3y)$
53. (76.) $(aa+ab+bb)(a-b)$ $(aa-ab+bb)(a+b)$
54. (77.) $(xx+2xy+yy)(2x-y)$ $(2aa-3ax+xx)(2a+3x)$
55. (78.) $(aa+ab+bb)(aa-ab+bb)$
56. (79.) $(xxx+xxy+xyy+yyy)(x-y)$
57. (80.) $(aa+2ab+bb)(aa-2ab+bb)$
58. (81.) $(27aaa-18aab+12abb-8bbb)(3a+2b)$

Digitized by Google

59. (82.) $(a+b+c+d)^2$ $(a+b-x-y)^2$
60. (83.) $(3a-4b+5c-2d)^2$ $(2a-3b-5x+y)^2$
61. (84.) $(a+b)(c-d)-(a-b)(c+d)$
62. (85.) $(a+x)(b+y)+(a-x)(b-y)$
63. (86.) $(a+2)(a-1)-(a+1)(a-2)$
64. (87.) $(x+4)(x-2)-(x+2)(x-1)$
65. (88.) $(a+2)(a-1)-(a+3)(a-2)$
66. (89.) $(n+7)(n-5)-(n+9)(n-7)$
67. (90.) $(683+2)(683-3)-(683+5)(683-6)$
68. (91.) $(5397+4)(5397-1)-(5397+8)(5397-5)$
69. (92.) $(853+7)(853-5)-(853+4)(853-3)$
70. (93.) $(a+b+c+d)(a+b-c-d)$
71. (94.) $(a-b+c-d)(a-b-c+d)$
72. (95.) $(x+y-u+v)(x-y+u+v)$
73. (96.) $(5ab-15ac+bd-3cd)(5ab+15ac-bd-3cd)$
74. (97.) $(9ac+3ad-2bd-6bc)(9ac-3ad-2bd+6bc)$
75. (98.) $(a+b)(a+b)(a+b)$ $(a-b)(a-b)(a-b)$
76. (99.) $(x+y)^3$, $(x-y)^3$ $(n+1)^3$, $(n-1)^3$
77. (100.) $(3a-2b)^3$, $(2x-5y)^3$ $(2x-3)^3$, $(1+2x)^3$
78. (101.) $(x-1)(x-2)(x+3)$ $(x-1)(x+2)(x-3)$
79. (102.) $(2x-1)(3x+5)(x+1)$ $(3x+5)(2x-3)(x-1)$

80. (107.) Berechne im Kopfe die Werte von $31^2, 41^2, 91^2, 17^2, 19^2$. Das Ergebnis ist mit Hilfe der Formel für $(a+b)^2$ von rechts nach links hinzuschreiben.

81. (108.) Desgl. 32^2, 43^2, 74^2, 82^2, 63^2, 54^2, 23^2, 27^2, 38^2, 46^2, 87^2, 96^2.

82. (109.) Desgl. 121^2, 122^2, 123^2, 124^2; 131^2, 132^2, 133^2, 135^2, 141^2, 143^2; 152^2, 154^2; 162^2, 165^2. Dabei ist als bekannt hinzuzunehmen, daß $12^2 = 144$, $13^2 = 169$, $14^2 = 196$, $15^2 = 225$, $16^2 = 256$ ist.

83. (110.) Was gibt mit Hilfe der Formel $(a+b)(a-b) = a^2-b^2$ berechnet: $21 \cdot 19$, $29 \cdot 31$, $61 \cdot 59$, $22 \cdot 18$, $28 \cdot 32$, $43 \cdot 37$, $57 \cdot 63$, $75 \cdot 85$, $96 \cdot 84$?

84. (111.) Was gibt $19^2 - 9^2$, $37^2 - 27^2$, $57^2 - 47^2$, $78^2 - 68^2$, $27^2 - 7^2$, $36^2 - 16^2$, $58^2 - 38^2$, $95^2 - 45^2$?

85. (112.) Was gibt $24^2 - 6^2$, $28^2 - 2^2$, $23^2 - 17^2$, $34^2 - 16^2$, $85^2 - 15^2$, $73^2 - 27^2$, $54^2 - 26^2$, $87^2 - 33^2$?

86. (113.) Was gibt $3978 \cdot 2641$, $3979 \cdot 2643$, wenn $3980 \cdot 2640 = A$ ist?

87. (114.) Was gibt $7932 \cdot 3087$, $7934 \cdot 3089$, $7931 \cdot 3088$, wenn $7930 \cdot 3090 = A$ ist?

Digitized by Google

88. Um wieviel wird das Produkt $739 \cdot 571$ größer, wenn man jeden Faktor um 1 vermehrt?

89. Um wieviel wird das Produkt $639 \cdot 471$ größer, wenn man den Faktor 639 um 1 vermindert und 471 um 1 vermehrt?

90. (115.) Um wieviel wächst ein Produkt ab, wenn man den größeren Faktor a um 1 verkleinert, den kleineren b um 1 vergrößert?

91. Um wieviel wird das Produkt $549 \cdot 331$ kleiner, wenn man jeden Faktor um 1 vermindert?

92. Um wieviel wird das Produkt $783 \cdot 627$ kleiner, wenn man den Faktor 783 um 1 vermehrt, den Faktor 627 um 1 vermindert?

93. (116.) Um wieviel nimmt ein Produkt ab, wenn man den größeren Faktor a um 1 vermehrt, den kleineren b um 1 vermindert?

94. (117.) Was geben folgende Differenzen, in einfachster Weise berechnet: $82 \cdot 58 - 83 \cdot 57$, $37 \cdot 96 - 36 \cdot 97$, $458 \cdot 672 - 456 \cdot 674$, $7387 \cdot 9375 - 7384 \cdot 9378$, $6758 \cdot 5839 - 6760 \cdot 5837$?

95. (118.) Ein Quadrat und ein Rechteck haben gleichen Umfang. Welche Figur hat den größeren Flächeninhalt? Wie groß ist der Unterschied, wenn die lange Seite des Rechtecks um 5 größer, die kurze um 5 kleiner als die Seite des Quadrats ist?

96. (119.) Zwei Rechtecke haben gleichen Umfang. Welches von beiden hat den größeren Inhalt? Weshalb?

97. (120.) Für ein Stück Acker, welches die Form eines Quadrats hat, soll man ein anderes wählen, welches die Form eines Rechtecks hat. Es stehen zwei zur Auswahl. Bei dem ersten ist die lange Seite um 8 m länger als die Seite des Quadrats, die kurze um 5 m kürzer; bei dem zweiten ist die lange Seite um 6 m länger, die kurze um 3 m kürzer. Welches hat man zu wählen?

98. Die Seite eines Buches hat durchschnittlich 40 Zeilen und in jeder Zeile 45 Buchstaben. Wie viele Buchstaben würde die Seite mehr enthalten, wenn auf derselben 1 Zeile weniger, in jeder Zeile aber 3 Buchstaben mehr ständen?

VII. Division.

A. Theorie.

1. Im Abschnitt II, Nr. 25. bis 30. waren die Hauptgesetze der Division bereits aufgestellt worden. Als Ausdrücke für dieselben hatten sich dort die nachstehend wiedergegebenen Formeln gefunden, für deren Begründung ebendaselbst die erforderlichen Grundlagen gegeben worden sind.

$$\text{I.}\quad \frac{a}{b} \cdot b = a, \quad \frac{a \cdot b}{b} = a$$

Digitized by Google

$$\text{II. } \frac{ab}{c} = \frac{a}{c} \cdot b = \frac{b}{c} \cdot a$$

$$\text{III. } \frac{a}{bc} = \frac{a}{b} : c$$

$$\text{IV. } \frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}$$

$$\text{V. } \frac{a+b-c}{x} = \frac{a}{x} + \frac{b}{x} - \frac{c}{x}$$

2. Der Inhalt dieser Formeln drückt sich in den nachstehenden Sätzen aus:

I. Multipliziert man einen Quotienten mit seinem Divisor, so erhält man den Dividenden. — Dividiert man ein Produkt durch den einen Faktor, so erhält man den anderen.

II. Die Division eines Produkts kann statt am ganzen Produkt an einem Faktor vorgenommen werden. — Die Multiplikation eines Quotienten kann durch die Multiplikation des Zählers ersetzt werden.

III. Die Division durch ein Produkt kann in zwei aufeinanderfolgende Divisionen durch die Faktoren dieses Produkts aufgelöst werden. — Zwei aufeinanderfolgende Divisionen lassen sich zu einer Division durch das Produkt der Divisoren zusammenfassen.

IV. Dividend und Divisor des Quotienten lassen sich durch einen gemeinschaftlichen Faktor dividieren, ohne daß der Wert des Quotienten sich ändert (Kürzung des Quotienten). —

Der Wert eines Quotienten bleibt ungeändert, wenn Dividend und Divisor mit derselben Zahl multipliziert werden (Erweiterung des Quotienten).

V. Die Division eines Aggregats kann statt am ganzen Aggregat an den einzelnen Gliedern desselben vorgenommen werden. — Ein Aggregat von Quotienten, die im Divisor übereinstimmen, läßt sich in einen Bruch mit demselben Divisor verwandeln, der das entsprechende Aggregat der Dividenden zum Dividendus hat.

3. Diese Gesetze sollen jetzt noch eine Erweiterung nach verschiedenen Richtungen erfahren.

Der Multiplikator war seiner Erklärung (Abschnitt II, Nr. 14.) nach notwendig eine ganze Zahl. In dem Produkt $\frac{b}{c} \cdot a$ (s. die vorstehende Formel II) wird man also, wenn der Quotient $\frac{b}{c}$ keine ganze Zahl ist, diesen Quotienten als Multiplikanden, b als Multiplikator ansehen.

Andererseits besteht für ein Produkt, dessen Faktoren keine benannten Zahlen sind, das Gesetz, daß die Faktoren untereinander vertauscht werden können. Dann würde also a der Multiplikandus und $\frac{b}{c}$ der Multiplikator sein. So erhebt sich von selbst die Frage: Hat

Digitized by Google

die Wahl eines Quotienten als Multiplikator überhaupt einen Sinn und, wenn diese Frage bejaht wird, was ist der Sinn solcher Multiplikation?

4. Die Größe a mit der ganzen Zahl b multiplizieren, heißt sie $b$mal als Summanden setzen, das will sagen, mit ihr dieselben Operationen vornehmen, durch die b selbst aus der Einheit entstanden war. Wie die Zahl 3 selbst durch Zusammenfügen dreier Summanden vom Werte Eins entsteht, so entsteht die Größe $3a$ durch Aneinanderfügen dreier Summanden vom Werte a.

Habe ich nun a mit dem Quotienten b zu multiplizieren, so muß ich das Produkt $a \cdot \frac{b}{c}$ aus a auf dieselbe Weise entstehen lassen, auf welche $\frac{b}{c}$ aus der Einheit hervorgeht. Um $\frac{b}{c}$ aus der Einheit entstehen zu lassen, muß ich zunächst die Einheit $b$mal setzen, und dann die entstandene Größe, d. i. b in c Teile teilen, das Ergebnis ist eben der Quotient $\frac{b}{c}$. Entsprechend erhalte ich nun das Produkt $a \cdot \frac{b}{c}$, indem ich die Größe a zunächst $b$mal setze, d. i. das Produkt ab bilde und dieses dann durch c dividiere, damit ergibt sich die die Formel II erweiternde Formel

$$\text{VI.} \quad a \cdot \frac{b}{c} = \frac{ab}{c} = \frac{b}{c} \cdot a.$$

5. Nunmehr ist man berechtigt, die Forderung der Ganzzahligkeit aufzugeben und für die bei der Multiplikation wie bei der Division auftretenden Größen neben ganzzahligen Größen auch Quotienten zuzulassen. Dadurch ergeben sich eine Reihe neuer Formeln

$$\text{VII.} \quad \frac{a}{x} \cdot \frac{b}{y} = \frac{ab}{xy}.$$

Um einen Quotienten mit einem anderen Quotienten zu multiplizieren, kann man so verfahren, daß man das Produkt der Dividenden durch das Produkt der Divisoren dividiert. Sind die Quotienten $\frac{a}{x}$ und $\frac{b}{y}$ ganzzahlig, so ist der Satz selbstverständlich (z. B. $\frac{12}{3} \cdot \frac{35}{5} = \frac{420}{15} = 28$). Welchen Sinn die Multiplikation der Quotienten auch in dem Falle hat, wo keiner von beiden ganzzahlig ist, ergibt sich aus Nr. 4. Um $\frac{a}{x}$ mit $\frac{b}{y}$ zu multiplizieren, muß ich $\frac{a}{x}$ erst mit b vervielfachen, das gibt $\frac{ab}{x}$, diesen Quotienten muß ich durch y dividieren, das gibt nach der von rechts gelesenen Formel III den Wert $\frac{ab}{xy}$.

6. Man ist ferner jetzt in der Lage die Frage zu beantworten: Welchen Wert hat der Quotient $a : \frac{b}{c}$? Die Antwort liegt in der Formel

$$\text{VIII.} \quad a : \frac{b}{c} = a \cdot \frac{c}{b} = \frac{ac}{b}.$$

Digitized by Google

Um eine Größe durch einen Quotienten zu dividieren hat man sie mit dem Divisor dieses Quotienten zu multiplizieren und durch den Dividenden zu dividieren.

Wenn die Formel richtig ist, so muß der Wert des Quotienten $\frac{ac}{b}$ mit $\frac{b}{c}$ multipliziert a geben. In der Tat ist aber nach VII und IV

$$\frac{ac}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{a \cdot cb}{bc} = a.$$

Aus VIII und VII zusammen folgt endlich die Formel

$$\text{IX.} \quad \frac{a}{b} : \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \cdot \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}.$$

Drücke diese Formel in Worten aus.

7. Hat man relative Größen durcheinander zu dividieren, so gelten die Formeln

$$\text{X.} \quad \frac{+a}{+b} = +\frac{a}{b}; \quad \frac{-a}{-b} = +\frac{a}{b}; \quad \frac{+a}{-b} = -\frac{a}{b}; \quad \frac{-a}{+b} = -\frac{a}{b}.$$

Diese Formeln sind unmittelbare Folgerungen aus den Multiplikationsformeln Abschnitt VI, Nr. 4. Sie lassen sich in den Satz zusammenfassen:

Der Quotient gleichstimmiger Größen hat einen positiven, der Quotient ungleichstimmiger Größen einen negativen Wert.

---

8. Für jede Größe a kann man (Abschnitt II, Nr. 17.) das Produkt $a \cdot 1$ setzen. Demgemäß kann man die Gleichung

$$\frac{a}{b} = \frac{a \cdot 1}{b} = a \cdot \frac{1}{b}$$

aufstellen. Der Ausdruck $\frac{a}{b}$ bedeutet, daß man die Zahl a in b Teile teilen soll. Der Ausdruck $a \cdot \frac{1}{b}$ besagt, daß man die Einheit in b Teile zu teilen und a solcher Teile zusammenzufassen hat. Beides führt, wie die vorstehende Gleichung zeigt, zu demselben Ergebnis.

Die Schreibweise $a \cdot \frac{1}{b}$ ist nicht üblich, die in ihr zum Ausdruck kommende Auffassung des Quotienten liegt aber dem sehr verbreiteten Sprachgebrauch zugrunde, der z. B. den Quotienten $\frac{3}{4}$ in der Form „Drei Viertel" ausdrückt.

In dieser Auffassung pflegt man einen Quotienten als Bruch, seinen Dividendus als Zähler, seinen Divisor als Nenner zu bezeichnen, Namen, die sich eben daraus erklären, daß der Zähler die Zahl der Teile angibt, in die die Einheit durch den Nenner geteilt ist; Nenner heißt dieser letztere darum, weil er für die vom Zähler gezählten Größen (Drittel, Viertel, Zehntel usw.) die Benennung liefert.

Digitized by Google

Für die Rechnung macht es keinen Unterschied, ob man den Quotienten $\frac{a}{b}$ als eigentlichen Quotienten oder als Bruch auffaßt.

9. Nur in der Schreibweise besteht ein gewisser Unterschied insofern, als man für den als Bruch aufgefaßten Quotienten in der Regel nur den Bruchstrich, für den eigentlichen Quotienten je nach den Umständen sowohl den Bruchstrich als das Divisionszeichen (:) verwendet.

Die gleichzeitige Verwendung beider Zeichen für Ausdrücke, in denen mehrere Divisionen neben- oder nacheinander auftreten, ist geeignet, solche Ausdrücke übersichtlicher zu machen. Doch kann man auch dann sowohl lauter Bruchstriche, als auch lauter Divisionszeichen verwenden.

Wenn man unter Vermeidung des Bruchstrichs das Divisionszeichen verwendet, hat man wohl zu beachten, daß man die Setzung von Klammern nicht versäumt, die durch den Bruchstrich unter Umständen entbehrlich gemacht werden (vgl. Abschnitt II, Nr. 35).

Bei gleichzeitiger Verwendung mehrerer Bruchstriche hat man darauf zu achten, daß der Hauptbruchstrich die gehörige Stellung erhält. Dieser muß in der Höhe des Hauptoperationszeichens (+, —) und des Gleichheitszeichens stehen.

10. Schreibe die Formeln I, II, IV, V, VI, VII, X in der Weise, daß statt des Bruchstrichs das Divisionszeichen auftritt.

11. Schreibe die Formeln III, VIII, IX mit ausschließlicher Anwendung des Divisionszeichens.

12. Schreibe dieselben Formeln unter Verwendung von lauter Bruchstrichen.

13. Schreibe die Ausdrücke

$$\frac{a+b}{x} \qquad \frac{a}{x-y} \qquad \frac{a-b}{x+y}$$

unter Ersetzung des Bruchstrichs durch das Divisionszeichen.

14. Gib an, an welcher Stelle in den Gleichungen

$$\frac{\frac{a}{b}}{c} = d; \qquad \frac{\frac{p}{q}}{r} = s; \qquad \frac{\frac{u}{v}}{\frac{x}{y}} = z$$

sich jedesmal der Hauptbruchstrich befindet. Gib die Art des auf der linken Seite einer jeden von diesen Gleichungen befindlichen Ausdrucks an und schreibe diese Seite in der Weise, daß statt des Hauptbruchstrichs das Divisionszeichen auftritt.

15. Verfahre entsprechend mit den Gleichungen

$$a + \frac{b}{\frac{c}{3}} = d; \qquad \frac{a}{b} - \frac{\frac{c}{4}}{d} = e; \qquad \frac{a+b}{c} = \frac{d}{e} - \frac{\frac{x}{y}}{z}.$$

Digitized by Google

16. Durch Vertauschung von Zähler und Nenner entsteht aus einem Bruch ein zweiter, der der **reziproke Wert** des ersten Bruchs genannt wird. Der reziproke Wert von $\frac{a}{b}$ ist $\frac{b}{a}$.

17. Bildet man von $\frac{b}{a}$ wieder den reziproken Wert, so erhält man den ursprünglichen Bruch $\frac{a}{b}$ (daraus erklärt sich die Bezeichnung „reziproker Wert". Beide Brüche stehen zueinander in derselben Beziehung).

18. Jede Zahl a kann ebenso, wie sie durch das Produkt $a \cdot 1$ ersetzt werden konnte, in die Form $\frac{a}{1}$ gebracht werden. Denn es ist $\frac{a}{1} \cdot 1 = a$.

19. Demnach ist $\frac{1}{a}$ der reziproke Wert von a.

20. Hat man statt der Größe a den Bruch $\frac{b}{c}$, so muß $1 : \frac{b}{c}$ der reziproke Wert von $\frac{b}{c}$ sein. In der Tat ist auch $1 : \frac{b}{c} = \frac{1 \cdot c}{b} = \frac{c}{b}$. **Das Produkt zweier zueinander reziproker Zahlengrößen hat stets den Wert Eins.**

---

21. Ist der Divisor ein Aggregat, das im Dividendus als Faktor vorkommt, so kann man die Division nach Satz I in Nr. 2. sofort ausführen $(x + 2y)(a - b) : (x + 2y) = a - b$. Auf diesen Fall lassen sich auch manche Aufgaben zurückführen, bei denen auch der Dividend die Form eines Aggregats hat, denn bisweilen lehrt der erste Anblick, daß dies Aggregat in ein Produkt umgewandelt werden kann, das den Divisor als Faktor enthält. So hat man z. B. $3ax - bx : 3a - b = (3a - b)x : 3a - b = x$.

22. Wenn diese Umwandlung des Dividendus nicht ohne weiteres ausführbar oder erkennbar ist, muß man zur Ermittelung des Quotienten ein systematisches Verfahren einschlagen; dieses besteht darin, daß man solche Division einer mehrgliedrigen Größe durch eine mehrgliedrige schrittweise ausführt.

Zu diesem Zwecke ordnet man den Dividenden, wie den Divisor nach fallenden*) Potenzen einer und derselben Größe, der „Hauptgröße". Bei Auswahl dieser Größe richtet man sich nach dem Alphabet oder man wählt eine besonders häufig vorkommende Größe.

Hat man z. B. $9a^2 - 25b^2 + 20bx - 4x^2$ durch $3a + 5b - 2x$ zu dividieren, so kann man beide Ausdrücke in dieser Gestalt belassen, bei der sie nach fallenden Potenzen von a geordnet sind. Dann gestaltet sich die Division nach dem folgenden Schema:

*) Man kann auch die entgegengesetzte Ordnung nach steigenden Potenzen der Hauptgröße eintreten lassen, doch empfiehlt sich in der Regel die oben genannte Ordnung nach fallenden Potenzen.

Digitized by Google

$$9a^2 - 25b^2 + 20bx - 4x^2 : 3a + 5b - 2x = 3a - 5b + 2x$$
$$9a^2 + 15ab - 6ax$$
$$\overline{-15ab + 6ax - 25b^2 + 20bx - 4x^2}$$
$$-15ab \qquad -25b^2 + 10bx$$
$$\overline{6ax + 10bx - 4x^2}$$
$$6ax + 10bx - 4x^2$$

Hier sind die einzelnen Teile des Quotienten, erstens $3a$, zweitens $-5b$, drittens $2x$ der Reihe nach ermittelt worden. Um den ersten Teilquotienten ($3a$) zu finden, wurde das erste Glied des Dividenden ($9a^2$) durch das erste Glied des Divisors ($3a$) dividiert, mit dem erhaltenen Teilquotienten wurde der ganze Divisor multipliziert und dies Produkt vom Dividenden abgezogen. Der sich ergebende Subtraktionsrest wurde wieder nach fallenden Potenzen von a geordnet und mit ihm nun ebenso verfahren, wie vorher mit dem ganzen Dividenden, das ergab den zweiten Teilquotienten; mit dem nun auftretenden Rest wurde entsprechend weiter verfahren.

Dabei ist klar, daß die Multiplikation des erhaltenen Quotienten mit dem Divisor gerade den Dividenden ergeben muß.

Dadurch, daß man die Teilquotienten findet, indem man immer das erste Glied des geordneten Dividenden und des geordneten Restes durch das erste Glied des Divisors dividiert, erzielt man, daß die höheren Potenzen der Hauptgröße der Reihe nach verschwinden, So ist in dem vorstehenden Rechnungsbeispiel schon nach der ersten Teildivision a^2 ganz verschwunden, dafür treten allerdings zwei Glieder mit der ersten Potenz von a auf, die aber nach der zweiten und dritten Teildivision ebenfalls verschwinden.

Führe dieselbe Division aus, indem du Dividendus und Divisor nach fallenden Potenzen der Größe b ordnest, desgl. unter Ordnung der Glieder nach der Größe x.

Hier ergibt sich in allen Fällen zuletzt der Rest Null, die Division ist, wie man sagt, aufgegangen.

Kommt man auf einen Rest, in dem die höchste Potenz der Hauptgröße niedriger ist, als die höchste Potenz der Hauptgröße im Divisor, so geht die Division nicht auf, der volle Wert des Quotienten wird dann dadurch erhalten, daß man zu den durch die Division herausgebrachten Teilquotienten noch einen Bruch fügt, der den letzten Divisionsrest zum Zähler, den Divisor zum Nenner hat

Wie verfährt man, wenn die Glieder der durcheinander zu dividierenden Aggregate selber Brüche sind?

B. Aufgaben.

1. $\frac{a}{7} \cdot 7$ $\quad \frac{a}{b-c}\ (b-c)$ $\quad \frac{x-1}{x+1} \cdot (x+1)$ $\quad \frac{a+b}{a-b} \cdot (a-b)$
2. $4a \cdot \frac{1}{2}$ $\quad \frac{2}{3} \cdot 9b$ $\quad 12c \cdot \frac{3}{4}$ $\quad \frac{4}{5} \cdot 10c$

Digitized by Google

3. $ab \cdot \frac{a}{b}$ $\frac{a}{x} \cdot ax$ $\frac{3}{4}a \cdot 8$ $9 \cdot \frac{5}{3}b$

4. $3\frac{2}{3}n \cdot 15$ $7\frac{1}{2}a \cdot 4$ $8\frac{1}{5}b \cdot 6$ $\frac{1}{2}a \cdot 6b$

5. $8ac \cdot 3\frac{1}{4}ax$ $2\frac{1}{2}ab \cdot 6ax$ $8x \cdot 5\frac{3}{4}y$

6. (2.) $9a : 9$ $7x : x$ $6a : 3$ $28x : 4x$

7. (3.) $a \cdot x : x$ $b \cdot 14 : 7$ $x \cdot 10 : 2x$ $a \cdot 9x : 3a$

8. (4.) $\frac{8a}{8}$ $\frac{5b}{b}$ $\frac{12a}{3}$ $\frac{18y}{6}$

9. (5.) $\frac{24a}{3a}$ $\frac{36b}{12b}$ $\frac{3ax}{3x}$ $\frac{6by}{2y}$

10. (6.) $\frac{24ab}{3a}$ $\frac{36acd}{9ad}$ $\frac{51abxy}{17bx}$ $\frac{57uvxy}{19vy}$

11. (7.) $39abcx : 13acx$ $76abxy : 19aby$

12. (8.) $85abnpq : 17anq$ $90aapqx : 18apx$

13. $221aabbcc : 13abc$ $343aaabbc : 49aab$

14. $\frac{2a}{3a}$ $\frac{ax}{bx}$ $\frac{7apq}{7bpx}$ $\frac{8abxy}{5buvy}$

15. $\frac{12ab}{15ac}$ $\frac{18abx}{30acx}$ $\frac{42npy}{63nqx}$ $\frac{54abxy}{72acnx}$

16. $\frac{3(a-x)}{5(a-x)}$ $\frac{27(a+x)}{36(a-x)}$ $\frac{a(b-c)}{(b-c)x}$ $\frac{a(x-3)}{b(x-1)}$

17. $\frac{6a(c+d)}{3b(c+d)}$ $\frac{8x(a-b)}{12(a-b)y}$ $\frac{9(a-1)x}{3x(a+1)}$ $\frac{12(n+2)x}{18(n+1)x}$

18. $35a : 15b$ $51x : 68y$ $7xy : 9xy$ $18ax : 42ay$

19. $8acx : 6aby$ $21bx : 14cx$ $25ab : 15ac$ $38ax : 57bx$

20. $\frac{+15}{+5}$ $\frac{-15}{-5}$ $\frac{+15}{-5}$ $\frac{-15}{+5}$

21. $\frac{+12a}{+4}$ $\frac{-18x}{+6x}$ $\frac{-20a}{-5a}$ $\frac{+3ab}{-3b}$

22. $\frac{18a}{+3a}$ $\frac{-20x}{5x}$ $\frac{24y}{-6y}$ $\frac{28u}{+7u}$

23. $(+6) : (-2)$ $(-8) : (+4)$ $(-9) : (-3)$ $(-5) : (+5)$

24. $(+3) : (+4)$ $(-1) : (+7)$ $(-2) : (-3)$ $(-7) : (-1)$

25. $(-\frac{1}{2}) : (+\frac{1}{3})$ $(-2\frac{1}{4}) : (-1\frac{1}{2})$ $3\frac{1}{3} : (-2\frac{1}{2})$ $(-\frac{2}{3}) : \frac{4}{5}$

26. $(+24abx) : (-6acy)$ $(-42abxy) : (14acux)$

27. $(-48anpq) : 16abnp$ $(+39acnp) : 65anpx$

28. $15abc \cdot 7acx : 21bcx$ $39abx \cdot 28bcy : 91acy$

29. $4 \cdot \frac{7}{8}x$ $3h \cdot 7\frac{5}{6}$ $8k \cdot 1\frac{1}{2}$ $5\frac{1}{4}p \cdot 14$

30. $\frac{2}{3}c \cdot 10$ $\frac{2}{3}c \cdot 7d$ $\frac{2}{3}d \cdot 7e$ $6x \cdot 2\frac{3}{4}$

Digitized by Google

31. $\frac{3}{a} \cdot 2$ $\frac{a}{8} \cdot 4$ $\frac{a}{5b} \cdot 5$ $\frac{a}{12y} \cdot 8y$

32. $a \cdot \frac{2x}{7ab}$ $2x \cdot \frac{3}{8xy}$ $4a \cdot \frac{5x}{6ab}$ $9x \cdot \frac{5a}{12bx}$

33. $a \cdot \frac{a}{b}$ $5x \cdot \frac{a}{7a}$ $a \cdot \frac{1}{ax}$ $\frac{a}{x} \cdot ax$

34. $\frac{1}{2}a : 2$ $\frac{3}{4}b : 5$ $\frac{4}{5}x : 2$ $\frac{8}{9}y : 4$

35. $7\frac{1}{2}a : 3a$ $3\frac{1}{5}b : 4b$ $3\frac{1}{3}c : 5c$ $8\frac{1}{4}x : 3x$

36. $\frac{8}{x} : 4$ $\frac{a}{x} : 7$ $\frac{1}{x} : a$ $a : \frac{1}{x}$

37. $\frac{3ab}{5x} : 6a$ $\frac{9ax}{2y} : 12x$ $\frac{8an}{5b} : 12n$ $\frac{5pq}{3y} : 10x$

38. $\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c}$ $\frac{3a}{4} \cdot \frac{5b}{6}$ $\frac{2a}{b} \cdot \frac{b}{a}$ $\frac{5x}{4} \cdot \frac{4x}{5}$

39. $\frac{5ax}{6by} \cdot \frac{3x}{5y}$ $\frac{7}{a} \cdot \frac{5ax}{14by}$ $\frac{2ab}{7cd} \cdot \frac{5cx}{6by}$ $\frac{8ax}{5by} \cdot \frac{3ay}{4bx}$

40. $\frac{7}{3}a \cdot 1\frac{1}{5}b$ $2\frac{1}{2}g \cdot 1\frac{3}{5}h$ $3\frac{1}{3}k \cdot 7\frac{1}{2}h$ $7\frac{1}{2}ay \cdot 1\frac{3}{5}ax$

41. $\frac{4a}{3b} \cdot \frac{3}{8}b$ $\frac{6x}{5y} \cdot \frac{2}{3}y$ $\frac{3a}{5x} \cdot \frac{1}{3}bx$ $\frac{5n}{4p} \cdot \frac{3}{5}px$

42. $3\frac{1}{2}ab \cdot \frac{4a}{7bx}$ $1\frac{1}{3}ax \cdot \frac{6b}{xy}$ $\frac{8a}{15bx} \cdot 2\frac{1}{2}x$ $\frac{3a}{5y} \cdot 3\frac{1}{3}xy$

43. $(-8\frac{1}{4}acx) \cdot (+12aby)$ $(+3\frac{1}{3}anp) \cdot (-2\frac{1}{4}bnx)$

44. $(-4abc) \cdot (-7\frac{1}{2}axy)$ $(-3\frac{1}{2}uvw) \cdot (-1\frac{1}{7}xyz)$

45. $\frac{2a}{3b} \cdot \frac{5b}{8c} \cdot \frac{3}{4}x$ $\frac{3a}{5b} \cdot \frac{10b}{9x} \cdot 1\frac{1}{2}x$

46. $\frac{10a(x-1)}{7b(x+1)} \cdot \frac{m(x+1)}{5a(x+2)} \cdot 3\frac{1}{2}m$ $\frac{4a(2n-1)}{5b(x+2)} \cdot \frac{5bx}{16an} \cdot 1\frac{1}{3}(x+2)$

47. $2a : \frac{1}{2}$ $3x : \frac{3}{2}$ $6b : \frac{2}{3}$ $8y : \frac{4}{5}$

48. $3a : 1\frac{1}{2}$ $5b : 1\frac{1}{4}$ $7c : 1\frac{2}{5}$ $8d : 1\frac{1}{3}$

49. $9 : \frac{3}{a}$ $a : \frac{a}{x}$ $ab : \frac{a}{b}$ $aa : \frac{a}{b}$

50. $9x : \frac{12ax}{5b}$ $8a : \frac{20ab}{3x}$ $15n : \frac{5nx}{3y}$ $18p : \frac{9p}{5x}$

51. $\frac{a}{x} : \frac{b}{x}$ $\frac{a}{b} : \frac{a}{x}$ $\frac{7}{a} : \frac{1}{a}$ $\frac{a}{b} : \frac{a}{3b}$

52. $1\frac{1}{2}ab : 2\frac{1}{4}a$ $3\frac{1}{3}ax : 2\frac{1}{2}x$ $3\frac{3}{4}xy : 1\frac{2}{3}y$ $8\frac{1}{3}ay : 1\frac{2}{3}a$

53 $\frac{3ab}{7xy} : \frac{2ab}{7by}$ $\frac{ax}{by} : \frac{3ab}{5xy}$ $\frac{2x}{3y} : \frac{7bx}{9ay}$ $\frac{8a}{9b} : \frac{5ax}{6by}$

54. (29.) $\frac{2}{3}abx \cdot \frac{3}{4}cy : \frac{1}{2}by$ $\frac{1}{2}abc \cdot \frac{3}{5}xy : 1\frac{1}{5}bcy$

55. (30.) $1\frac{1}{2}abn \cdot 2\frac{1}{3}xy : 1\frac{1}{6}bnx$ $3\frac{1}{2}axy \cdot 1\frac{1}{3}by : 2\frac{1}{3}ax$

Digitized by Google

56. $\frac{7a}{3} : \frac{5a}{9}$ $\frac{2}{5x} : \frac{8}{3x}$ $\frac{6n}{5p} : \frac{6a}{5b}$ $\frac{8x}{9y} : \frac{4a}{3b}$

57. $\frac{5ab}{7xy} : \frac{3ax}{7by}$ $\frac{2an}{5bp} : \frac{4nx}{15by}$ $\frac{8ac}{9bd} : \frac{10a}{15b}$ $\frac{9ax}{8by} : \frac{18x}{12y}$

58. $\frac{5ax}{3b} : \frac{2}{3}x$ $\frac{6ab}{5c} : \frac{3}{4}b$ $\frac{9an}{2np} : 7\frac{1}{2}a$ $\frac{8xy}{3a} : 5\frac{1}{3}y$

59. $1\frac{1}{3}ab : \frac{8a}{3x}$ $2\frac{1}{4}x : \frac{3a}{5x}$ $3\frac{1}{5}y : \frac{8x}{5a}$ $7\frac{1}{2}ax : \frac{3x}{8y}$

60. $\frac{7ab}{5x} : 3\frac{1}{2}a$ $\frac{9ax}{7b} : 2\frac{1}{7}x$ $\frac{3xy}{10p} : 1\frac{1}{2}x$ $\frac{10ab}{9x} : 8\frac{1}{3}b$

61. $\frac{8n(x+3)}{5p(x-3)} \cdot \frac{3px}{2y} : 2\frac{2}{5}(x+3)$ $\frac{5x}{3y}(x-1) \cdot \frac{3ab(n-1)}{4xy(n+1)} : \frac{b(x-1)}{(n+1)y}$

62. (31.) $(5a + 5b - 5c) : 5$ $(ax - bx + cx) : x$

63. (32.) $(8a - 6b + 10c) : 2$ $(ax^2 + bx - 5x) : x$

64. (33.) $(6ax - 9bx - 15x) : 3x$ $(8a^2 - 4ac + 12a) : 4a$

65. (34.) $(27ab - 36bx - 36by) : (-9b)$

66. (35.) $(49an - 21nn - 91np) : (+7n)$

67. (36.) $(12a^2x - 8abx + 20axy) : 1\frac{1}{3}a$

68. (37.) $(\frac{1}{2}abx - \frac{1}{3}aby + \frac{1}{4}abc) : \frac{1}{6}ab$

69. (38.) $(\frac{3}{4}axy - \frac{2}{5}bxy + \frac{7}{10}cxy) : \frac{1}{20}xy$

70. (39.) $(2\frac{1}{2}abx - 3\frac{1}{3}bcy + 3\frac{3}{4}bd) : \frac{5}{4}b$

71. (40.) $(1\frac{1}{4}ab - 1\frac{2}{3}ax - 3\frac{1}{3}acy) : (-2\frac{1}{2}a)$

72. (41.) $(ax - bx) : (a - b)$ $(am + m) : (a + 1)$

73. (42.) $(2a - 10) : (a - 5)$ $(7x + 14) : (2 + x)$

74. (43.) $(ab + ay - bx - xy) : (a - x)$

75. (44.) $(mx - nx - my + ny) : (m - n)$

76. (45.) $(ax + a - bx - b) : (a - b)$

77. (46.) $(10ax + 8ay - 25bx - 20by) : (5x + 4y)$

78. (47.) $(6ax - 9ay - 4bx + 6by - 2cx + 3cy) : (2x - 3y)$

79. (48.) $(3ax - 3ay - 9az + 2bx - 2by - 6bz) : (2b + 3a)$

80. (49.) $(3a^3 + 5ab + 2b^2) : (a + b)$ $(4a^2 - 7ab + 3b^2) : (4a - 3b)$

81. (50.) $(a^3 - 2ab - 3b^2) : (a - 3b)$ $(2x^2 - xy - 3y^2) : (x + y)$

82. (51.) $(3a^2 + 2a - 5) : (3a + 5)$ $(5x^2 - 2x - 7) : (1 + x)$

83. (52.) $(n^2 - p^2) : (n + p)$ $(4x^2 - 9) : (3 + 2x)$

84. (53.) $(36a^2 - 25x^2) : (5x + 6a)$ $(9x^2 - 30x + 25) : (3x - 5)$

85. (54.) $(12a^3 - 11a^2b - 71ab^2 + 40b^3) : (3a - 8b)$

Digitized by Google

86. (55.) $(6x^3 - 5x^2 + 9x + 10) : (3x + 2)$

87. (56.) $(21a^3 - 34a^2b + 25b^3) : (7a + 5b)$

88. (57.) $(x^2 - 2xy + y^2 - z^2) : (x - y - z)$

89. (58.) $(a^2 - 2ac - b^2 + c^2) : (a + b - c)$

90. (59.) $(9x^2 - 25y^2 + 10yz - z^2) : (3x + 5y - z)$

91. (60.) $(49a^2 - 9b^2 - 30bx - 25x^2) : (5x + 7a + 3b)$

92. (61.) $(a^3 - a^2b + 2b^3) : (a + b)$ $(9x^3 - 7xy^2 + 2y^3) : (3x - 2y)$

93. (62.) $(x^3 + y^3) : (x + y)$ $(x^3 - y^3) : (x - y)$

94. (63.) $(a^3 - 8) : (a - 2)$ $(64x^3 + 27a^3) : (3a + 4x)$

95. (64.) $(a^4 - b^4) : (a - b)$ $(a^4 - b^4) : (a + b)$

96. (65.) $(16x^4 - 625) : (5 + 2x)$ $(256a^4 - 81x^4) : (3x + 4a)$

97. (66.) $(36a^2b^2 - 9a^2x^2 - 4b^2y^2 + x^2y^2)$
$: (6ab + 3ax - 2by - xy)$

98. (67.) $(9x^2y^2 - 4n^2x^2 - 81p^2y^2 + 36n^2p^2)$
$: (3xy - 2nx + 9py - 6np)$

99. (68.) $(1{,}2a^2 - 0{,}93ab - 18{,}9b^2) : (1{,}5a + 5{,}4b)$

100. $(4{,}32a^2 - 6{,}9ab + 4{,}62ac + 1{,}25b^2 + 2{,}65bc - 5{,}44c^2)$
$: (2{,}4a - 0{,}5b - 1{,}7c)$

101. $(2a^2 + 8{,}37ab + 0{,}31ac - 16{,}2b^2 + 3{,}51bc - 0{,}07c^2)$
$: (0{,}8a + 4{,}5b - 0{,}1c)$

102. $(2{,}99x^2 - 8{,}16xy - 7{,}01xz + 4{,}05y^2 + 3{,}09yz - 2{,}8z^2)$
$: (1{,}3x - 2{,}7y - 3{,}5z)$

103. $(8a^2 - 9{,}19ab + 0{,}79ac + 2{,}55b^2 - 0{,}74bc - 0{,}21c^2)$
$: (2{,}5a - 1{,}7b - 0{,}3c)$

104. $(3{,}06a^2 - 7{,}51ab + 11{,}39ac + 3{,}68b^2 - 9{,}39bc + 4{,}93c^2)$
$: (0{,}9a - 1{,}6b + 2{,}9c)$

105. $(8{,}05x^2 - 12{,}16xy - 0{,}19xz + 4{,}59y^2 + 0{,}05yz - 1{,}04z^2)$
$: (2{,}3x - 1{,}7y + 0{,}8z)$

106. $(9\frac{8}{25}a^2 - 18\frac{4}{15}ab + 4\frac{1}{20}ac + 7\frac{7}{9}b^2 + 5\frac{5}{12}bc - 15\frac{15}{16}c^2)$
$: (2\frac{2}{5}a - 3\frac{1}{3}b + 3\frac{3}{4}c)$

107. $(13\frac{1}{8}x^2 - 20\frac{11}{14}xy + 18\frac{1}{12}xz + 5\frac{19}{49}y^2 + 4\frac{20}{21}yz - 26\frac{4}{9}z^2)$
$: (2\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{7}y + 5\frac{2}{3}z)$

108. $(8\frac{8}{9}a^2 - 12\frac{1}{2}ab - 5\frac{7}{15}ac + 4\frac{3}{8}b^2 + 2\frac{9}{10}bc - 10\frac{14}{25}c^2)$
$: (2\frac{2}{3}a - 1\frac{3}{4}b + 2\frac{1}{5}c)$

109. $(6\frac{9}{16}a^2 - 15\frac{5}{12}ab + 6\frac{3}{10}ac - 18\frac{8}{9}b^2 + 22\frac{14}{15}bc - 6\frac{18}{25}c^2)$
$: (1\frac{3}{4}a - 5\frac{2}{3}b + 2\frac{4}{5}c)$

Digitized by Google

110. (69.) $(2x^2 - 1{,}31xy - 1{,}6y^2) : (0{,}8x + 0{,}5y)$

111. (70.) $(0{,}06a^2 + 0{,}27ax - 6x^2) : (2{,}5x + 0{,}2a)$

112. (71.) $(6a^2 + 10{,}11ax - 27x^2) : (7{,}5x + 2{,}4a)$

113. (72.) $(a^2 - \frac{1}{2}ab - \frac{1}{9}b^2) : (2a + \frac{1}{3}b)$
$(\frac{1}{2}x^2 + 1\frac{1}{6}xy - y^2) : (\frac{3}{2}x + 2y)$

114. (73.) $(\frac{1}{8}a^2 - \frac{1}{3}a - \frac{1}{4}) : (\frac{1}{2}a + \frac{1}{4})$ $(\frac{1}{2}x^2 + 5\frac{5}{6}x - 2) : (\frac{1}{4}x + 3)$

115. (74.) $(1\frac{2}{3}a^2 + 3\frac{1}{4}ab - 1\frac{1}{8}b^2) : (2\frac{1}{2}a - \frac{3}{4}b)$

116. (75.) $(\frac{3}{5}x^2 - \frac{5}{24}xy - 2\frac{1}{2}y^2) : (1\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{8}y)$

117. (76.) $(\frac{1}{2}a^2 - 2) : (1 + \frac{1}{2}a)$ $(\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{3}b^2) : (\frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b)$

118. (77.) $(\frac{1}{3}x^2 - \frac{3}{4}) : (\frac{2}{3}x + 1)$ $(\frac{2}{9}x^2 - \frac{2}{9}y^2) : (\frac{2}{3}x - \frac{2}{2}y)$

119. (78.) $(\frac{1}{3}a^2 + \frac{19}{18}ab + 1\frac{5}{6}ac - 2b^2 + 9\frac{2}{9}bc - c^2) : (\frac{2}{3}a + 3b - \frac{1}{3}c)$

120. (79.) $(\frac{1}{2}a^2 - 3\frac{1}{6}ab - \frac{1}{12}ac + 5b^2 + \frac{1}{3}bc - \frac{1}{12}c^2) : (\frac{3}{4}a - \frac{5}{2}b + \frac{1}{4}c)$

121. (80.) $(1\frac{1}{2}x^2 - 2\frac{1}{4}xy + \frac{1}{3}y^2 - \frac{23}{12}x - \frac{5}{72}y - \frac{1}{2}) : (\frac{1}{3}x - \frac{2}{3}y - \frac{3}{4})$

122. (81.) $(\frac{5}{6}a^2 + ax - \frac{3}{8}x^2 + \frac{127}{36}a - \frac{35}{24}x - 1) : (\frac{5}{2}a - \frac{3}{4}x - \frac{2}{3})$

123. (82.) $(\frac{1}{4}a^2 - \frac{4}{9}b^2 + \frac{1}{3}bc - \frac{1}{16}c^2) : (\frac{1}{2}a + \frac{2}{3}b - \frac{1}{4}c)$

124. (83.) $(\frac{9}{16}a^2 - ac - \frac{25}{36}b^2 + \frac{4}{9}c^2) : (\frac{3}{4}a + \frac{5}{6}b - \frac{2}{3}c)$.

125. (91.) Welche Reste lassen folgende Ausdrücke bei der Division durch h? Die Multiplikationen sollen nicht ausgeführt werden.

1) $(2h+3)(h+1)$ 2) $(7h+3)(8h+3)+4h-7$

3) $(3h-1)(h-5)-9h+8$ 4) $(2h+3)(7h-2)+8h+6$.

126. (92.) Zahlen, welche in bezug auf eine ganze Zahl als Teiler (Divisor) dieselben Reste geben, nennt man kongruent, und bezeichnet das durch $\equiv$. So ist $(ah+n)(bh+p)+c \equiv np+c$ für den Teiler h. Um den Wochentag für ein Datum zu bestimmen, kommt es darauf an, leicht und schnell den Rest zu ermitteln, den ein Zahlenausdruck läßt, wenn er durch 7 geteilt wird. So hat man für 7 z. B. $68 \cdot 375 + 46 + 31 \equiv 5 \cdot 4 + 4 + 3 \equiv 6 \equiv -1$. — Welche Reste geben folgende Produkte bei der Division durch 7: 1) $53 \cdot 87$, 2) $65 \cdot 95$, 3) $983 \cdot 427$, 4) $3805 \cdot 7368$?

127. (93.) Desgleichen folgende Summen: 1) $47 \cdot 365 + 28 + 30$, 2) $365 \cdot 17 + 31 + 30 + 29$, 3) $365 \cdot 283 + 3 \cdot 31 + 2 \cdot 30 + 28$, 4) $365 \cdot 1573 + 4 \cdot 31 + 3 \cdot 30 + 29$.

128. Schneidet man von einer dekadischen Zahl den mit den letzten zwei Ziffern geschriebenen Teil ab, so besitzt der übrig gebliebene Teil den Faktor 100, so ist z. B. $28|37 = 28 \cdot 100 + 37$. 100 ist durch 4 teilbar, also kann man schreiben

$$2837 \equiv 37 \text{ für den Teiler } 4.$$

Digitized by Google

Welche Regel ergibt sich hieraus für die Untersuchung der Teilbarkeit einer Zahl durch 4?

129. Die Zahl 1000 ist durch 8 teilbar. Welche Regel ergibt sich daraus für die Beurteilung der Teilbarkeit einer Zahl durch 8?

130. Es ist $10^n = 2^n \cdot 5^n$, d. h. 10^n ist durch 2^n teilbar. Welche Regel ergibt sich hieraus für die Beurteilung der Teilbarkeit einer Zahl durch 2^n?

131. Wie beurteilt man die Teilbarkeit einer Zahl durch 5^n?

132. Die Zahl 84632 kann man in der Form schreiben

$$\begin{aligned} &8 \cdot 10000 + 4 \cdot 1000 + 6 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 2 \\ &= (8 \cdot 9999 + 4 \cdot 999 + 6 \cdot 99 + 3 \cdot 9) \\ &\quad + (8 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 + 3 \cdot 1 + 2), \end{aligned}$$

da nun die Faktoren 9999, 999, 99, 9 sämtlich durch 9 teilbar sind, kann man schreiben

$$84632 \equiv 8 + 4 + 6 + 3 + 2 \text{ für den Teiler } 9.$$

Drücke diesen Sachverhalt in Worten aus und gib das Kennzeichen für die Teilbarkeit einer Zahl durch 9 an.

133. Welchen Teiler gibt es noch außer 9, für den jede Zahl ihrer Quersumme kongruent ist?

134. Die Zahl 784632 läßt sich ferner in der Form schreiben $7 \cdot 100001 + 8 \cdot 9999 + 4 \cdot 1001 + 6 \cdot 99 + 3 \cdot 11 - 7 \cdot 1 + 8 \cdot 1 - 4 \cdot 1 + 6 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2$. Nun sind die Zahlen 100001, 9999, 1001, 99, 11 durch 11 teilbar, also kann man die Gleichung aufstellen

$$784632 \equiv (8 + 6 + 2) - (7 + 4 + 3) \text{ für den Teiler } 11.$$

Drücke diesen Sachverhalt in Worten aus und suche auf Grund desselben das Kennzeichen für die Teilbarkeit einer Zahl durch 11 zu ermitteln.

135. Es ist $99 = 9 \cdot 11$; $9999 = 909 \cdot 11$; $999999 = 90909 \cdot 11$ usw. $1001 = 990 + 11$; $100001 = 99990 + 11$ usw. Gib die allgemeine Form der in Nr. 134. erwähnten Zahlen an, die stets durch 11 teilbar sind.

---

136. (94.) Nach dem für die katholischen Länder bereits 1582 (für die protestantischen erst 1700) als normierend eingeführten Gregorianischen Kalender ist jedes Jahr, dessen Zahl durch 4 ohne Rest teilbar ist, ein Schaltjahr, ausgenommen die auf zwei Nullen ausgehenden, aber nicht durch 400 teilbaren Jahreszahlen, z. B. 1700, 1800. Diese sind Gemeinjahre zu 365 Tagen. Die Jahre 1600, 2000 sind Schaltjahre. — Das Jahr 1700 fing mit einem Freitag an; mit welchen Wochentagen

Digitized by Google

müssen danach die Jahre 1719, 1740, 1822, 1844, 1600, 1648 angefangen haben?*)

137. (95.) Auf welche Wochentage fielen 1) der 18. Januar 1701 (Friedrich, Kurfürst von Brandenburg, wird König von Preußen); 2) der 22. Jan. 1729 (Lessing geb.); 3) der 19. Jan. 1736 (James Watt, der Erfinder der Dampfmaschine, geb.); 4) der 28. Aug. 1749 (Goethe geb.); 5) der 10. Nov. 1759 (Schiller geb.); 6) der 5. Dez. 1757 (Sieg bei Leuthen); 7) der 15. Febr. 1763 (Friede zu Hubertusburg); 8) der 14. Juli 1789 (Bastille erstürmt)?**)

138. (96.) Auf welche Wochentage fielen: 1) der 30. Septbr. 1681 (Straßburg durch Verrat von Ludwig XIV. genommen und vom Deutschen Reich losgerissen); 2) der 25. Febr. 1634 (Wallenstein ermordet); 3) der 6. Nov. 1632 (Schlacht bei Lützen); 4) der 10. Mai 1631 (Eroberung Magdeburgs durch Tilly); 5) der 5. Nov. 1630 (Kepler gest.); 6) der 23. April 1616 (Shakespeare gest.)?

139. (97.) Das Jahr 1800 fing mit einem Mittwoch an. Auf welche Wochentage fielen danach: 1) der 2. Dez. 1805 (Schlacht bei Austerlitz); 2) der 18. Juni 1815 (Schlacht bei Waterloo); 3) der 6. Mai 1859 (A. v. Humboldt gest.); 4) der 3. Juli 1866 (Schlacht bei Königgrätz); 5) der 18. Aug. 1870 (Schlacht bei Gravelotte); 6) der 2. Sept. 1870 (Kapitulation von Sedan); 7) der 18. Jan. 1871 (Kaiser-Proklamation in Versailles)?

VIII. Zerlegung in Faktoren. Kürzung der Brüche. Aufsuchung des größten gemeinschaftlichen Teilers zweier Zahlen.

A. Theorie.

1. Schon im Abschnitt II, Nr. 19. waren die Formeln

$$ax + ay = a \cdot (x + y)$$
$$ax - ay = a \cdot (x - y)$$

*) So fing 1753 mit einem Montag an. Von 1700 bis 1752 einschließlich sind 13 Schaltjahre, da 1700 kein solches ist. Man hat daher: $53 \cdot 365 + 13 \equiv 4 \cdot 1 + 6 \equiv 3$ (für 7). Man muß vom Freitag an um 3 Wochentage weiter gehen.

**) Man hat z. B. für den 9. Juni 1783 (Stephenson, der Gründer der Eisenbahnen und Erbauer der ersten Lokomotive, geb.) diese Rechnung: $83 \cdot 365 + 20$ (Schalttage) $+ 31 + 28 + 31 + 30 + 31 + 8$ (8 statt 9, weil der 1. Januar schon in Anschlag gebracht ist), oder besser gleich $83 + 20 + 3 \cdot 31 + 30 + 8 \equiv -1 - 1 + 2 + 2 + 1 \equiv 3$, d. h. Montag. — Diese Rechnungen lassen sich über 1582 hinaus nicht wohl ausdehnen, oder man muß nach dem Julianischen Kalender rechnen, der alle 4 Jahre ein Schaltjahr hatte.

Digitized by Google

aufgestellt worden, die aussagen, daß man die Summe $ax + ay$ ebenso wie die Differenz $ax - ay$ in ein Produkt verwandeln kann.

Diese Formeln lassen sich offenbar auf Ausdrücke von mehr als zwei Gliedern erweitern, so ist z. B.

$$a \cdot d + b \cdot d - c \cdot d = (a + b - c) \cdot d$$
$$ax - bx + x = ax - bx + 1 \cdot x = (a - b + 1) \cdot x.$$

2. Zerlegungen anderer Art ergeben sich aus Abschnitt VI, Nr. 9. So ist

$$a^2 - 2ax + x^2 = (a - x)^2 = (a - x)(a - x)$$
$$p^2 - q^2 = (p + q)(p - q)$$
$$25a^2 - 49b^2 = (5a + 7b)(5a - 7b)$$
$$x^4 - y^4 = (x^2 + y^2)(x^2 - y^2) = (x^2 + y^2)(x + y)(x - y).$$

3. Im Abschnitt VI, Nr. 3. waren mehrere Formeln aufgestellt, die lehren, wie ein Produkt von zwei mehrgliedrigen Faktoren in ein Aggregat von positiven und negativen Gliedern aufgelöst werden kann.

So wurde dort z. B. das Produkt $(a + b)(x - y)$ in das Aggregat $(ax + bx - ay - by)$ verwandelt.

4. Die entgegengesetzte Operation ist die Verwandlung eines solchen Aggregats in ein Produkt, oder wie man diese Operation auch noch bezeichnet, die Zerlegung eines Aggregats in Faktoren.

Um das eben erwähnte Aggregat

$$ax + bx - ay - by$$

in ein Produkt zu verwandeln, wird man etwa zunächst das erste und dritte Glied unter Herausziehung des Faktors a zu dem Produkt $a(x - y)$, das zweite und vierte Glied ebenso unter Herausziehung des Faktors b zu dem Produkt $b(x - y)$ zusammenfassen. Dann hat man zunächst die Gleichung

$$ax + bx - ay - by = a(x - y) + b(x - y),$$

aus deren rechter Seite man nun offenbar den gemeinschaftlichen Faktor $(x - y)$ herausziehen kann, um damit zu dem Schlußergebnis

$$ax + bx - ay - by = (a + b)(x - y)$$

zu gelangen.

5. Man hätte statt dessen auch die beiden ersten Glieder des gegebenen Aggregats zusammenfassen können, aus denen sich der Faktor x herausziehen läßt, sie geben das Produkt $(a + b)x$.

Aus den beiden letzten Gliedern läßt sich der Faktor y absondern; indem man auch diese Absonderung vornimmt, erhält man

$$(a + b)x + (-a - b)y.$$

Hier fehlt zunächst ein Anhalt zu weiterer Umformung, weil beide Produkte keinen gemeinschaftlichen Faktor besitzen. Aber man sieht sofort, daß man auf solchen gemeinschaftlichen Faktor gekommen sein würde, wenn man aus den beiden letzten Gliedern statt des Faktors y

Digitized by Google

vielmehr den Faktor $(-y)$ ausgesondert hätte. Dann würde sich zunächst der Ausdruck

$$(a+b)\,x - y\cdot(a+b)$$

ergeben haben, der dann durch Absonderung des gemeinschaftlichen Faktors $(a+b)$ zu demselben Schlußergebnis

$$(a+b)\,(x-y)$$

wie in Nr. 4. geführt haben würde.

6. Hat man den Ausdruck x^2+6x+8, so könnte man zwar aus den beiden ersten Gliedern zusammen den Faktor x aussondern, würde dann aber zu dem Ausdruck $x(6+x)+8$ gelangen, mit dem offenbar nichts weiter anzufangen ist, weil der zweite Teil nur ein Glied aufweist.

Ebenso würde, wenn man aus den beiden letzten Gliedern den Faktor 2 aussonderte, der zu weiterer Umformung nicht geeignete Ausdruck $x^2+2\cdot(3x+4)$ herauskommen.

Hieraus folgt, daß, wenn der Ausdruck überhaupt in Faktoren zerlegbar ist, man das mittlere Glied weder ausschließlich mit dem ersten, noch ausschließlich mit dem letzten Glied zusammenfassen darf. Man muß es vielmehr auf passende Weise in zwei Teile zerlegen, deren einer zu dem ersten, deren anderer zu dem letzten Gliede hinzuzunehmen ist. Eine solche Zerlegung bietet sich z. B., wenn man schreibt

$$\begin{aligned} x^2+6x+8 &= x^2+2x+4x+8 \\ &= x(x+2)+4(x+2) = (x+4)\cdot(x+2). \end{aligned}$$

Ähnlich hat man

$$\begin{aligned} a^2+3a-28 &= a^2+7a-4a-28 \\ &= a(a+7)-4\cdot(a+7) = (a-4)(a+7) \\ &= a(a-4)+7(a-4) = (a+7)(a-4). \end{aligned}$$

Auf diese Zerlegungen wird man geführt, indem man bemerkt, daß der Koeffizient 6 in dem ersten Beispiel aus denselben beiden Zahlen (2 und 4) durch Summierung entsteht, die multipliziert gerade 8 geben. Im zweiten Falle bedurfte man einer Zerlegung mittels zweier Zahlen, die miteinander multipliziert gerade die Zahl -28 ergeben. Da diese Zahl negativ ist, müssen beide Zahlen verschiedene Zeichen haben; man sieht nun bald, daß man $3a$ in die beiden Teile $+7a$ und $-4a$ zu spalten hat.

$$\begin{aligned} x^2-8x+15 &= x-5x-3x+15 \\ &= x(x-5)-3(x-5) = (x-3)(x-5) \text{ usw.} \end{aligned}$$

Bei den angegebenen Beispielen wurde die Auffindung der vorzunehmenden Zerlegung dadurch vereinfacht, daß das Glied x^2 gerade den Koeffizienten Eins hatte. Ist dies nicht der Fall, so muß man suchen, den zu zerlegenden Ausdruck auf die Form zu bringen, bei der das erste Glied ein mit dem Koeffizienten Eins behaftetes voll-

Digitized by Google

ständiges Quadrat ist. Wie dies geschehen kann, zeigt das nachstehende Beispiel

$$10x^2 + 41x + 21 = \frac{10(10x^2 + 41x + 21)}{10}$$
$$= \frac{(10x)^2 + 41 \cdot 10x + 210}{10} = \frac{z^2 + 41z + 210}{10},$$

wenn man die Größe $10x$ mit dem Buchstaben z bezeichnet. Will man jetzt den Zähler dieses Bruches zerlegen, so muß man 210 in zwei Faktoren zerfällen, deren Summe 41 beträgt; man erkennt leicht, daß dies die Zahlen 35 und 6 sind. Also hat man weiter

$$\frac{z^2 + 35z + 6z + 35 \cdot 6}{10} = \frac{(z + 35)(z + 6)}{10}$$
$$= \frac{(10x + 35)(10x + 6)}{10} = \frac{10x + 35}{5} \cdot \frac{10x + 6}{2} = (2x + 7)(5x + 3).$$

Um den Ausdruck $ax^2 + bx + c$ in Faktoren zu zerlegen, muß man, wie aus dem voranstehenden Beispiel ersichtlich ist, zwei Zahlen ausfindig machen, deren Produkt den Wert ac und deren Summe den Wert b besitzt.

---

7. Das Kürzen eines Bruchs besteht darin, daß man Zähler und Nenner durch einen etwa vorhandenen gemeinsamen Faktor dividiert, wodurch (s. Abschnitt VII, 1, Formel IV) der Wert des Bruchs nicht geändert wird.

Man muß nun Mittel suchen, um solche gemeinschaftliche Faktoren zu erkennen.

Haben zwei Zahlen den gemeinsamen Faktor x, so kann man die eine ax, die andere bx nennen, ax sei die größere von beiden Zahlen.

Dividiert man nun die größere durch die kleinere Zahl und erhält als ganzzahligen Teil des Quotienten die Zahl q, als Rest die Zahl r, so ist

$$ax = q \cdot (bx) + r;$$
$$r = ax - qbx = x(a - qb).$$

Man sieht hieraus, daß der gemeinschaftliche Faktor x der beiden gegebenen Zahlen auch im Rest r als Faktor enthalten sein muß.

8. Diesen Sachverhalt kann man benutzen, um einen unbekannten gemeinschaftlichen Faktor zweier Zahlen zu finden. Man dividiert die größere Zahl durch die kleinere; geht die Division auf, so ist die kleinere Zahl selbst der gesuchte Faktor.

Geht die Division nicht auf, so bleibt ein Rest, der den gesuchten Faktor ebenfalls als Faktor enthalten muß. Man kann dann eine neue Division vornehmen, bei der der bisherige Divisor als Dividendus, der bisherige Rest als Divisor auftritt; die Zahlen, an denen man diese Division vornimmt, sind kleiner als die, an denen man die vorherige Division vollzog. Geht diese Division auf, so ist der erwähnte Rest der gesuchte Faktor, geht sie nicht auf, so verfährt man

Digitized by Google

entsprechend weiter, indem man den Divisor der vorhergehenden Division als neuen Dividendus, den Rest der vorhergehenden Division als neuen Divisor verwendet.

Da bei jeder neuen Division immer kleinere Zahlen auftreten, muß die Division früher oder später einmal aufgehen; im ungünstigsten Falle geschieht dies, wenn der immer kleiner werdende Divisionsrest schließlich auf den Wert Eins heruntergekommen ist. Dann ist eben diese Eins der größte gemeinschaftliche Faktor, d. h. die beiden Zahlen haben neben diesem selbstverständlichen gemeinsamen Faktor keinen weiteren (es sind „relative Primzahlen").*)

Geht die Division bereits bei einem früheren Rest auf, so ist dieser der gesuchte gemeinsame Faktor.

Um den gemeinsamen Faktor der Zahlen 2635 und 2356 zu finden, stellt man die Rechnung auf

$$\begin{aligned} 2635 &= 1 \cdot 2356 + 279 \\ 2356 &= 8 \cdot 279 + 124 \\ 279 &= 2 \cdot 124 + 31 \\ 124 &= 4 \cdot 31. \end{aligned}$$

Der größte gemeinschaftliche Faktor der Zahlen 2635 und 2356 hat den Wert 31.

$$\begin{aligned} 1848 &= 2 \cdot 625 + 598 \\ 625 &= 1 \cdot 598 + 27 \\ 598 &= 22 \cdot 27 + 4 \\ 27 &= 6 \cdot 4 + 3 \\ 4 &= 1 \cdot 3 + 1 \\ 3 &= 3 \cdot 1. \end{aligned}$$

Die Zahlen 1848 und 625 haben keinen größeren gemeinschaftlichen Faktor als Eins.

9. Durch Verwendung negativer Reste läßt sich die Rechnung abkürzen

$$\begin{aligned} 1848 &= 3 \cdot 625 - 27 \\ 625 &= 23 \cdot 27 + 2 \\ 27 &= 13 \cdot 2 + 1 \\ 2 &= 2 \cdot 1. \end{aligned}$$

Dieses Verfahren ist auch für die Ermittelung des gemeinsamen Faktors von Buchstabenausdrücken verwendbar.

10. Die Rechnung läßt sich im einzelnen Falle häufig noch vereinfachen. Hat der Rest einen Faktor, der ersichtlicherweise weder im

*) Eine absolute Primzahl ist eine Zahl, die an sich keinen ganzzahligen Faktor außer Eins und sich selbst hat, z. B. 23. — Von den Zahlen 24 und 35 ist keine eine absolute Primzahl, da die erste durch 2, 3, 4, 6, 8, 12, die zweite durch 5, 7 teilbar ist. Wohl aber sind beide, da sie keinen gemeinsamen Faktor haben, zueinander relative Primzahlen.

Digitized by Google

Dividendus, noch im Divisor vorkommt, so kann man diesen Faktor vor der weiteren Rechnung ausscheiden.

So hatte man in dem erstgenannten Beispiel zum Anfang die Gleichung

$$2635 = 1 \cdot 2356 + 279,$$

der Rest 279 ist durch 9 teilbar, während, wie leicht zu sehen, weder 2635 noch 2356 durch 9 teilbar sind. Man wird darum sofort statt mit 279 mit $\frac{279}{9} = 31$ weiterrechnen

$$2356 = 76 \cdot 31 + 0.$$

11. Für den gemeinsamen Buchstabenfaktor von Buchstabenausdrücken spielen die Zahlenfaktoren keine Rolle, man wird darum die Glieder der Division mit solchen Zahlen multiplizieren, daß die Zahlenfaktoren ineinander aufgehen.

Hat man z. B. den gemeinschaftlichen Faktor der Ausdrücke $2x^2 - x - 3$ und $3x^2 + x - 2$ zu suchen, so wird man den Dividendus mit 3 multiplizieren, also statt mit $2x^2 - x - 3$ vielmehr mit $6x^2 - 3x - 9$ rechnen. Es ist dann zunächst

$$6x^2 - 3x - 9 = 2 \cdot (3x^2 + x - 2) - 5\,(x + 1).$$

Im Rest scheidet man den Faktor 5 aus und fährt fort:

$$3x^2 + x - 2 = (3x - 2)\,(x + 1) + 0.$$

Der gesuchte gemeinschaftliche Faktor hat den Wert $(x + 1)$.

B. Aufgaben.

Zerlege folgende mehrgliedrige Ausdrücke in Faktoren:

1.	$7a + 7b$	$3x - 3y$	$ab + ax$	$nx - px$
2.	$18a - 24b$	$20x + 30y$	$6ax - 9bx$	$4ab - 6bc$
3.	$12a^2 - 9ab$	$8ax + 20x^2$	$25ab - 5b^2$	$18ap - 6p^2$
4.	$ab + b$	$ax - x$	$7x - 7$	$5 - 5y$
5.	$aa - a$	$xx + x$	$5xy - 4y$	$3a - 6ab$
6.	$a + a^2$	$a^3 + a^2$	$3x - 5x^2$	$2y^3 - 4y^2$
7.	$ax - bx + cx$		$2ay + 3by - cy$	
8.	$6ax - 8aa + 10ab$		$15ab - 25bb + 30bc$	
9.	$35ac - 49bc + 21cc$		$36ax - 54bx - 9x$	
10.	$20a^2 - 35ab - 45ac$		$51ay - 68xy + 85y^2$	
11.	$aa - ab - ac + ad$		$nx - px + xy - xs$	
12.	$a\,(n + p) - b\,(n + p)$		$(a - b)\,x - (a - b)\,y$	
13.	$a\,(x - 1) + b\,(x - 1)$		$3a\,(x - y) - 5b\,(x - y)$	
14.	$2a\,(3b - 2) - x\,(3b - 2)$		$5a\,(p - q) - 7b\,(p - q)$	
15.	$(a + b)\,x - (a + b)$		$a\,(x - y) - (x - y)$	
16.	$a\,(x + y) + (x + y)$		$(a - b)\,p - a + b$	

Digitized by Google

17. $(3a+b)x-3a-b$ $a(2x-5y)-2x+5y$
18. $ac+ad+bc+bd$ $ax-ay+bx-by$
19. $ax+ay-bx-by$ $ax-2a-bx+2b$
20. $ab+ay-xy-bx$ $ax-2b-a+2bx$
21. $ab+3a-2b-6$ $2ab-10a+3b-15$
22. $6ax-4ay-9bx+6by$ $10ac-15ad-2bc+3bd$
23. $40ax+63by-45ay-56bx$ $20ab+24cd-32ad-15bc$
24. $40ab+20xy-25bx-32ay$ $45ab+63xy-81ax-35by$
25. $35a^2+30xy-42ax-25ay$ $9ab+20x^2-12ax-15bx$
26. $ab-ax+b-x$ $ax-a+bx-b$
27. $ab+x-bx-a$ $3ax+2b-2bx-3a$
28. $ax+2-2x-a$ $xy-x-y+1$
29. $ax+bx-cx-ay-by+cy$
30. $ax-bx-ay+by+az-bz$
31. $6ax-4ay-9bx+6by+15cx-10cy$
32. $8ax-10bx-20ay+25by+12az-15bz$
33. $(a-b)(3x-2y)+(a-b)(4x+7y)$
34. $(a+b)(5x+3y)-(a+b)(4x+2y)$
35. $7(3a-5b)-(3a-5b)(5-3x)-2(3a-5b)x$
36. $8(7n-5p)x-5(7n-5p)-(7n-5p)(7x-4)$
37. $3a-7b-(2x-3y)(3a-7b)+(3x-1)(3a-7b)$
38. $5a(7x-3y)-(3a-2)(7x-3y)-7x+3y$
39. $u^2+2uv+v^2$ $n^2-2np+p^2$
40. $a^2-4ab+4b^2$ $x^2-14xy+49y^2$
41. x^2-2x+1 x^2-6x+9
42. $9a^2-12ab+4b^2$ $25x^2+10xy+y^2$
43. $36x^2-12x+1$ $4x^2-12x+9$
44. x^2-y^2, n^2-p^2 x^2-1, a^2-16
45. $4x^2-1$, $9x^2-y^2$ $16a^2-9b^2$, $36a^2-25b^2$
46. a^4-b^4, x^4-1 $25a^4-1$, $81x^4-16y^4$
47. $(a+b)^2-x^2$ $(a-b)^2-c^2$
48. $(3a-5b)^2-9b^2$ $(8a-b)^2-16a^2$
49. $(7x+3y)^2-4y^2$ $(4x+5y)^2-16x^2$
50. $9a^2-(2a-3b)^2$ $49a^2-(5a-7b)^2$
51. $a^2-2ab+b^2-c^2$ $a^2-b^2-2bc-c^2$
52. $9a^2-12ab+4b^2-c^2$ $25a^2-30ab+9b^2-4c^2$
53. $9x^2-6x-y^2+1$ $x^2-a^2-10x+25$
54. a^2+2x-x^2-1 $a^2-9x^2+42x-49$
55. $x^2+7x+12$ $x^2+7x+10$

Digitized by Google

56. $x^2 - 7x + 6$ $x^2 - 5x + 6$
57. $x^2 - 6x + 8$ $x^2 - 9x + 8$
58. $x^2 - 9x + 14$ $x^2 - 9x + 18$
59. $x^2 + x - 12$ $x^2 - x - 12$
60. $x^2 + 4x - 12$ $x^2 - 2x - 15$
60_1. $6x^2 + 17x + 12$ $6x^2 + x - 12$
60_2. $6x^2 - 21x + 15$ $6x^2 - 9x - 15$.

61. Eine Primzahl ist eine ganze Zahl, die keinen Faktor hat, ausgenommen 1 und die Zahl selbst. Primfaktor ist ein Faktor, der eine Primzahl ist, der sich also nicht in Faktoren zerlegen läßt. Zerlege folgende Zahlen in Potenzen der Primfaktoren: 18, 24, 48, 50, 60, 72, 80, 90, 96, 108, 120, 128, 144*).

61_1. Desgleichen 360, 450, 1000, 1008, 7425, 8575, 10584.

Dividuus für mehrere Zahlen nennt man eine Zahl, in welcher jene Zahlen als Faktoren enthalten sind. Der kleinste gemeinschaftliche Dividuus für mehrere Zahlen ist das Produkt aus den höchsten Potenzen ihrer Primfaktoren. (Beweis!) Suche den kleinsten gemeinschaftlichen Dividuus für folgende Zahlen (aus dem Kopfe):

62. 12, 16, 27, 30, 40 15, 18, 24, 80, 90
63. 9, 20, 25, 63, 70, 105 28, 36, 40, 60, 112, 150
64. 14, 18, 35, 63, 90, 135 24, 30, 56, 84, 108, 120
65. aab, $4ab$, $abbb$, $10a$ $8a$, $9b$, $12abb$, $18ab$, $24bb$
66. $4ax$, $6bx$, $9aa$, $12x$ $12a$, $25axx$, $20aa$, $75ax$
67. $24aa$, $36ab$, $60abb$ $9xx$, $5xy$, $55yy$, $30x$
68. $40aax$, $72abxx$, $60xxx$ $5xxx$, $12xy$, $50xyy$, $60yy$
69. $(x+1)^2$, x^2-1, $(x-1)^2$ $a^2 - b^2$, $3(a+b)$, $5(a-b)^2$
70. $x^2 - y^2$, $4(x+y)$, $12xy$ $4a(x+y)$, $6b(x-y)$, $x^2 - y^2$
71. $12(a+b), 5(a-b), 3(a^2-b^2)$ $15(a+b), 20(a-b)^2, 12(a^2-b^2)x$.

Folgende Quotienten (Brüche), deren Dividend und Divisor (Zähler und Nenner) mehrgliedrig sind, sollen gekürzt werden (VII, A, 2 Satz IV). Zu dem Zwecke hat man Zähler und Nenner in Faktoren zu zerlegen.

72. $\frac{a^2+ab}{ab+b^2}$ $\frac{a^2-ab}{ax-ay}$ $\frac{x^2-xy}{xy-y^2}$ $\frac{7x-7y}{8y-8x}$
73. $\frac{ax+bx}{ax-bx}$ $\frac{ax+ay}{bx+by}$ $\frac{px-qx}{py-qy}$ $\frac{6x-3}{10x-5}$

*) Die Bekanntschaft mit den Kennzeichen für die Teilbarkeit der dekadischen Zahlen durch 2, 3, 4, 5, 8, 9 wird hier vorausgesetzt (vgl. Abschnitt VII, Aufg. 129. bis 136.).

Digitized by Google

74. $\frac{8a-6}{9-12a}$ $\frac{12x-18y}{14x-21y}$ $\frac{18bx-24cx}{15ab-20ac}$ $\frac{9a^2-9a}{15-15a}$

75. $\frac{3a^2b-4ab^2}{5a^2b-6ab^2}$ $\frac{a^2x-5ax^2}{5a^2x-ax^2}$ $\frac{5x^2-10x}{5x^2+10x}$ $\frac{3a^2-a}{a^2-3a}$

76. $\frac{a^2-b^2}{a^2+ab}$ $\frac{x^2-xy}{x^2-y^2}$ $\frac{a^2+ab}{(a+b)^2}$ $\frac{x^2-xy}{(x-y)^2}$

77. $\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$ $\frac{a^2-b^2}{(a+b)^2}$ $\frac{a^2-x^2}{(x-a)^2}$ $\frac{x^2-a^2}{(a+x)^2}$

78. $\frac{x^2-x}{(x-1)^2}$ $\frac{x^2+x}{x^2-1}$ $\frac{a^2-4}{(a+2)^2}$ $\frac{a^2x-b^2x}{(a-b)^2}$

79. $\frac{3a^2b-3ab^2}{a^2x-b^2x}$ $\frac{9a^2b-b}{3a^2+a}$ $\frac{4x^2-100}{2x^2-10x}$ $\frac{7a^2x^2-28b^2}{5ax^2+10bx}$

80. $\frac{a^3+b^3}{(a+b)^2}$ $\frac{a^3-b^3}{(a-b)^2}$ $\frac{x^3+y^3}{x^2-y^2}$ $\frac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$

81. $\frac{a^4-b^4}{a^3+ab^3}$ $\frac{a^4-b^4}{a^3b-b^3}$ $\frac{x^4-y^4}{x^3-y^3}$ $\frac{x^4-y^4}{x^3+y^3}$

82. $\frac{a^2+2ab-3ac}{ab+2b^2-3bc}$ $\frac{4ax-6bx+10x^2}{6a^2-9ab+15ax}$

83. $\frac{ax+bx-cx}{ax+bx+cx}$ $\frac{3x^2y-3xy^2+6xy}{5x^2y+5xy^2-10xy}$

84. $\frac{ac-bd-ad+bc}{ac+bd+ad+bc}$ $\frac{ax-by+ay-bx}{ax+by-ay-bx}$

85. $\frac{3ax+4by-3ay-4bx}{4ax+3by-4ay-3bx}$ $\frac{2ax-2by+4bx-ay}{ax-4by+2bx-2ay}$

86. $\frac{ax-1+x-a}{ax+1+x+a}$ $\frac{nx-1-n+x}{nx-2-n+2x}$

87. $\frac{6x^2-7x-3}{4x^2-9}$ $\frac{6x^2+x-35}{9x^2-49}$

88. $\frac{ax+3+3a+x}{x^2+6x+9}$ $\frac{ax-2+a-2x}{a^2-4a+4}$

89. $\frac{10x^2-21x-10}{4x^2-20x+25}$ $\frac{25x^2-70x+49}{35x^2-74x+35}$

90. $\frac{3a^2-ab-2b^2}{9a^2+12ab+4b^2}$ $\frac{9x^2-30xy+25y^2}{3x^2-2xy-5y^2}$

91. $\frac{x^2+7x+12}{x^2+8x+15}$ $\frac{x^2-7x+10}{x^2-5x+6}$

92. $\frac{x^2+x-20}{x^2-x-12}$ $\frac{x^2+4x-21}{x^2+3x-28}$

93. $\frac{x^2+2xy+y^2-z^2}{x^2+2xz-y^2+z^2}$ $\frac{2ac-a^2+b^2-c^2}{2ab-a^2-b^2+c^2}$.

93_1. Löse durch Zerlegung des Dividendus die Divisionsaufgaben Abschn. VII, 77. bis 79.

93_2. Vgl. VII, 80. bis 82.

Digitized by Google

93_3. Dgl. VII, 92. 93.

93_4. Dgl. VII, 97. 98.

Suche für Dividendus und Divisor der nachstehenden Quotienten nach der in A, 7. bis 10. gegebenen Vorschrift den gemeinsamen Faktor und kürze die Quotienten durch denselben.

94. $\frac{6498}{10089}$ $\frac{6647}{10879}$ $\frac{13764}{26825}$ $\frac{27249}{18073}$

95. $\frac{42269}{37453}$ $\frac{30096}{39647}$ $\frac{38023}{42676}$ $\frac{51569}{36835}$

96. $\frac{338239}{760771}$ $\frac{441084}{565061}$ $\frac{275064}{477201}$ $\frac{403737}{576135}$

97. $\frac{3x^2+x-10}{4x^2+x-14}$ $\frac{15x^2+14x-16}{24x^2-x-10}$

98. $\frac{14x^2-x-4}{8x^2-10x-7}$ $\frac{6x^2-23x-18}{27x^2+3x-10}$

99. $\frac{2x^3-3x^2-3x-5}{3x^3-x^2-x-4}$ $\frac{3x^3+x^2-x+4}{4x^3+x^2-x+5}$

100. $\frac{6x^3+x^2-2x+15}{9x^3-x+20}$ $\frac{6x^3-5x^2-4x-3}{9x^3-x-2}$

101. $\frac{3x^3+x^2+x-5}{5x^3-x^2-x-3}$ $\frac{2x^3+x^2-9}{6x^3-5x^2-4x-3}$.

IX. Erweiterung von Quotienten. Rechnung mit Bruch-Aggregaten.

A. Vorbemerkung.

Bei den in diesem Abschnitt zusammengestellten Aufgaben handelt es sich vorzugsweise um Anwendung der Sätze IV und V im Abschnitt VII, Nr. 2., doch finden dabei auch fast alle anderen für die Division geltenden Formeln Anwendung.

Bei den Aufgaben 1. bis 34. handelt es sich darum, Produkte, bei denen wenigstens einer der Faktoren die Form eines Aggregats hat, in Aggregate zu verwandeln, deren Glieder je nach den Umständen ganzzahlige Größen oder Quotienten sind.

In den Aufgaben 35. bis 89. sollen Aggregate von Brüchen zu einem Bruche zusammengezogen werden (Abschn. VII, Nr. 2., Satz V). Dazu ist erforderlich, daß die in dem Aggregat auftretenden Brüche vorher durch gehörige Erweiterung (Abschn. VII, Nr. 2., Satz IV) auf gleichen Nenner gebracht werden.

In den Aufgaben 90. bis 113. handelt es sich um Quotienten, bei denen der Dividendus oder der Divisor, meist sogar beide aus Brüchen zusammengesetzt sind; diese Ausdrücke sollen durch passende Erweiterung und Kürzung in einfache Quotienten mit ganzzahligem Dividendus und Divisor umgewandelt werden.

Digitized by Google

B. Aufgaben.

1. (44.) $(ax^2+bx+c)\cdot\frac{1}{x}$ $(3x^3+7x^2-5x)\cdot\frac{2}{x^2}$
2. $(\frac{1}{2}a-\frac{1}{3}b+\frac{1}{6}c)\cdot(-6)$ $(\frac{3}{4}a-\frac{2}{3}b-\frac{1}{6}c)\cdot(+12x)$
3. (45.) $\left(\frac{1}{x^2}-\frac{2}{x}+3\right)\cdot 5x^2$ $\left(\frac{2}{x^3}-\frac{3}{x^2}+\frac{4}{x}\right)\cdot 3x^3$
4. (46.) $\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\right)\cdot\frac{ab}{c}$ $\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)\cdot xyz$
5. (47.) $(ax^2+bx+c):\frac{x}{2}$ $(3x^2-5x+6):\frac{3}{4}x$
6. (48.) $(\frac{6}{5}a^2-\frac{5}{3}ab+8c):\frac{2}{5}a$ $(\frac{1}{5}x^2-\frac{2}{3}x+6):\frac{3}{5}x$
7. $(\frac{1}{2}a-\frac{2}{3}b+\frac{3}{4}c)\cdot(+\frac{2}{3}x)$ $(-\frac{2}{3}a+\frac{3}{4}b-\frac{5}{6}c)\cdot(-2\frac{2}{5}y)$
8. $(1\frac{1}{2}a-2\frac{1}{3}b+3\frac{2}{4}c)\cdot 2\frac{2}{3}x$ $(2\frac{1}{4}x-1\frac{1}{2}y+2\frac{2}{3}z)\cdot 1\frac{1}{2}a$
9. (49.) $\left(\frac{a}{b}-1\right)\cdot\left(1+\frac{b}{a}\right)$ $(a-b)\cdot\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$
10. (50.) $\left(\frac{x}{y}-\frac{2}{3}\right)(3x+2y)$ $\left(\frac{x}{5}-\frac{y}{3}\right)\left(\frac{5}{x}+\frac{3}{y}\right)$
11. $(a+\frac{1}{2}b)^2$ $(2a-\frac{1}{4}b)^2$ $(\frac{1}{2}a-1)^2$ $(\frac{1}{3}x-\frac{3}{2}y)^2$
12. $(a+\frac{1}{2})(a-\frac{1}{2})$ $(\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}a)(\frac{2}{3}x-\frac{1}{2}a)$
13. $(\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}b)(\frac{2}{5}a+4b)$ $(2\frac{1}{2}a-5b)(5a+1\frac{1}{2}b)$
14. $(1\frac{1}{3}a-2\frac{1}{2}x)(1\frac{1}{5}a+\frac{3}{4}x)$ $(1\frac{1}{2}x-3\frac{1}{3}y)(1\frac{1}{3}x+1\frac{1}{5}y)$
15. (51.) $\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)(a-b)+(a+b)\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)$
16. (52.) $\left(\frac{3}{5}-\frac{x}{y}\right)\left(\frac{3}{x}+\frac{5}{y}\right)-\left(\frac{3}{5x}+\frac{1}{y}\right)\left(3-\frac{5x}{y}\right)$
17. (53.) $\left(\frac{2x^2}{3}-\frac{x}{2}+\frac{3}{4}\right)\cdot\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{2x}{3}+1\right)$
18. (54.) $\left(\frac{x^2}{2}-\frac{x}{3}+\frac{1}{4}\right)\cdot\left(2x^2+\frac{3x}{2}+\frac{4}{3}\right)$
19. (55.) $\left(\frac{2a^2}{9b}-\frac{a}{3}+\frac{b}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3b}+\frac{1}{a}\right)$
20. (56.) $\left(\frac{5a}{3b}+\frac{3b}{4a}-\frac{5}{6}\right)\cdot\left(\frac{3a}{b}+\frac{3}{2}\right)$
21. (57.) $\left(\frac{3x}{4y}+\frac{2y}{5x}+\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{5}{y}-\frac{2}{x}\right)$
22. (58.) $\left(\frac{3a^2}{2bx}+\frac{2a}{y}+\frac{8bx}{3y^2}\right)\cdot\left(\frac{3a}{x}-\frac{4b}{y}\right)$
23. (59.) $\left(\frac{a}{b}+\frac{5b}{2a}-1\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2a}{3}+\frac{2b}{5}\right)$
24. (60.) $\left(\frac{3ay}{4x}-\frac{2b^2x}{3ay}-\frac{1}{2}b\right)\cdot\left(\frac{3a}{b}+\frac{2x}{y}\right)$

Digitized by Google

25. (61.) $\left(\frac{3a^2}{4b} - \frac{a}{2} + \frac{b}{3}\right) \cdot \left(\frac{3a}{2} + b + \frac{2b^2}{3a}\right)$

26. (62.) $\left(\frac{a^2}{2b} - \frac{3ax}{5y} + \frac{5bx^2}{9y^2}\right) \cdot \left(\frac{3x}{y} + \frac{5a}{2b}\right)$

27. $\left(\frac{1}{2}a - 3b + \frac{1}{3}c\right)^2$ $\left(\frac{2}{3}a - \frac{3}{2}b + \frac{3}{4}c\right)^2$

28. (63.) $\left(\frac{5x^2}{2y} + 2x + \frac{8y}{5}\right) \cdot \left(\frac{5x}{2} - 2y + \frac{8y^2}{5x}\right)$

29. $\left(\frac{1}{2}a - \frac{2}{3}b + 5c\right)\left(\frac{2}{3}a - 3b - \frac{1}{2}c\right)$

30. $\left(1\frac{1}{2}a - \frac{3}{5}b + \frac{1}{3}c\right)\left(\frac{2}{3}a + \frac{3}{4}b - 1\frac{1}{2}c\right)$

31. $\left(\frac{2}{3}x + 1\frac{1}{2}y - 2\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{2}x - 3\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{2}\right)$

32. $\left(2\frac{1}{2}u - 3\frac{1}{4}x + 3\frac{1}{2}y\right)\left(1\frac{1}{3}u + 2\frac{1}{2}x + 1\frac{1}{4}y\right)$

33. (64.) $\left(\frac{4a}{3x} + \frac{a}{2y} - \frac{4b}{3x} - \frac{b}{2y}\right) \cdot \left(\frac{4a}{3x} - \frac{a}{2y} + \frac{4b}{3x} - \frac{b}{2y}\right)$

34. (65.) $\left(\frac{3a}{2b} + \frac{2a}{5y} + \frac{3x}{b} + \frac{2x}{5y}\right) \cdot \left(\frac{3a}{2b} - \frac{2a}{5y} - \frac{3x}{2b} + \frac{2x}{5y}\right)$

---

35. (1.) $\frac{2a}{3} + \frac{a}{3}$, $\frac{7b}{4} - \frac{3b}{4}$ $\frac{5a}{7} + \frac{b}{7}$, $\frac{2a}{x} - \frac{a}{x}$

36. (2.) $\frac{3a}{4} + \frac{5a}{4} - \frac{7a}{4}$ $\frac{8a}{5} + \frac{2a}{5} - \frac{7a}{5}$

37. (3.) $\frac{5a}{x} - \frac{b}{x} - \frac{4a}{x}$, $\frac{3x}{n} + \frac{5x}{n} - \frac{4x}{n}$

38. (4.) $\frac{3a}{4} - \frac{2b}{3}$ $\frac{5a}{6} - \frac{4a}{5}$ $\frac{3x}{5} - \frac{4x}{15}$ $\frac{8n}{9} - \frac{7n}{18}$

39. (5.) $\frac{a}{2} - \frac{b}{3}$ $\frac{a}{2} - \frac{a}{3}$ $\frac{x}{4} - \frac{y}{5}$ $\frac{x}{4} - \frac{x}{5}$

40. (6.) $\frac{a}{4} + \frac{b}{6} - \frac{a}{20} + \frac{b}{30}$ $\frac{x}{7} - \frac{y}{9} - \frac{x}{56} - \frac{y}{72}$

41. (7.) $\frac{2a}{3} - \frac{3b}{5} - \frac{a}{6} + \frac{b}{10}$ $\frac{6x}{7} - \frac{3y}{5} + \frac{13x}{42} - \frac{7y}{30}$

42. (8.) $\frac{a}{2} - \frac{b}{3} - \frac{a}{3} + \frac{5b}{6}$ $\frac{a}{5} - \frac{b}{4} - \frac{a}{30} + \frac{b}{20}$

43. (9.) $\frac{x}{5} - \frac{y}{7} - \frac{y}{42} + \frac{x}{20}$ $\frac{x}{8} - \frac{y}{9} - \frac{x}{72} - \frac{y}{72}$

44. (10.) $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$ $\frac{2}{x} - \frac{3}{y}$ $\frac{a}{x} + \frac{b}{y}$ $\frac{2a}{3} - \frac{b}{x}$

45. (11.) $\frac{1}{a} + \frac{1}{2a}$ $\frac{1}{3x} - \frac{1}{6x}$ $\frac{a}{2b} - \frac{a}{3b}$ $\frac{2a}{5x} - \frac{3a}{8x}$

46. (12.) $\frac{a}{5x} - \frac{b}{10x}$ $\frac{m}{ax} + \frac{n}{bx}$ $\frac{3}{an} - \frac{5}{bn}$ $\frac{8b}{3a} - \frac{5b}{2a}$

47. (13.) $\frac{a}{b} + 5$ $a + \frac{x}{3}$ $5n - \frac{x}{2y}$ $\frac{x}{y} + 1$

Digitized by Google

48. (14.) $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ $\frac{2}{x}+\frac{3}{y}-\frac{5}{z}$

49. (15.) $\frac{1}{ab}+\frac{1}{ac}+\frac{1}{bc}$ $\frac{x}{yz}+\frac{y}{xz}+\frac{z}{xy}$

50. (16.) $\frac{4a}{5b}-\frac{3a}{4b}$ $\frac{5a}{6x}-\frac{7a}{30x}$ $\frac{2b}{5y}+\frac{7b}{20y}$ $\frac{7x}{10y}-\frac{8x}{15y}$

51. (17.) $\frac{3ax}{5by}-\frac{ax}{10by}$ $\frac{6ab}{7xy}-\frac{5ab}{14xy}$ $\frac{3ax}{5b^2}+\frac{ax}{15b^2}$ $\frac{4a^2}{5bx}-\frac{11a^2}{20bx}$

52. (18.) $\frac{2a}{3b}-\frac{5a}{6b}-\frac{a}{2b}+\frac{7a}{9b}$ $\frac{3x}{4y}-\frac{5x}{9y}-\frac{2x}{3y}+\frac{7x}{12y}$

53. (19.) $\frac{3a}{5x}-\frac{7a}{10x}-\frac{a}{6x}+\frac{7a}{15x}$ $\frac{3n}{4p}-\frac{4n}{5p}+\frac{5n}{6p}+\frac{3n}{10p}$

54. (20.) $\frac{2ab}{3xy}-\frac{3ab}{4xy}+\frac{5ab}{6xy}$ $\frac{5ax}{6by}-\frac{3ax}{8by}-\frac{7ax}{16by}$

55. (21.) $\frac{5a^2}{6xy}-\frac{7a^2}{8xy}+\frac{4a^2}{15xy}$ $\frac{3ab}{5x^2}-\frac{5ab}{9x^2}+\frac{ab}{18x^2}$

---

56. (78.) $\frac{x+y}{2}+\frac{x-y}{2}$ $\frac{x+y}{2}-\frac{x-y}{2}$

57. (79.) $\frac{2a-5b}{3}+\frac{a+2b}{3}$ $\frac{7a-8b}{5}-\frac{2a-3b}{5}$

58. (80.) $\frac{2a+3b}{a+b}-\frac{a+2b}{a+b}$ $\frac{4x+5y}{x-y}-\frac{3x+4y}{x-y}$

59. (81.) $\frac{a-b}{2}+b,\ \frac{5a+b}{3}-a$ $\frac{3a+5b}{4b}-2,\ \frac{a+x}{2x}-1$

60. (82.) $\frac{a}{a-b}-1,\ \frac{2x}{x+y}-1$ $1-\frac{a}{a+b},\ 2-\frac{3x}{2x-y}$

61. (83.) $\frac{a}{b}-\frac{2a+b}{3b}$ $\frac{2x}{3y}-\frac{4x-5y}{6y}$

62. (84.) $\frac{a-2b}{2}+\frac{a+3b}{3}$ $\frac{2x+3a}{3x}-\frac{x+2a}{2x}$

63. (85.) $\frac{x+3y}{4y}-\frac{x+2y}{6y}$ $\frac{3a+7x}{9x}-\frac{4a+9x}{12x}$

64. (39.) $\frac{1}{2}(a+b-c)+\frac{1}{3}(a-b-c)-\frac{5}{6}(a-b-c)$

65. (40.) $\frac{1}{3}(2a-3b)-\frac{1}{4}(3a-7b)+\frac{1}{12}(a-3b)$

66. (41.) $1\frac{1}{2}(5x-5y)-3\frac{1}{3}(5x-4y)+1\frac{1}{6}(13x-19y)$

67. (42.) $9(1\frac{1}{2}x-3\frac{1}{3}y-5\frac{1}{2}z)-5(2\frac{1}{2}x-6\frac{1}{5}y-8\frac{1}{2}z)$

68. (86.) $\frac{4a-5b+7c}{3}-\frac{3a-7b+6c}{4}+\frac{a-b-5c}{6}$

69. (87.) $\frac{a-3b+6c}{4}+\frac{2a+5b-7c}{5}-\frac{6a+2b+c}{10}$

Digitized by Google

70. (88.) $\frac{2a+5b-4c}{15} - \frac{7a-5b-5c}{30} + \frac{4a+5b+4c}{40}$

71. (89.) $\frac{x-1}{2} + \frac{2x-3}{3} - \frac{4x-7}{5} + \frac{8-3x}{6} - \frac{12-2x}{10}$

72. (90.) $\frac{2x-5}{4} + \frac{7-3x}{6} - \frac{2x-8}{9} + \frac{5x-7}{12} - \frac{3x+4}{18}$

73. (91.) $\frac{2(x-1)}{3} - \frac{3(x-2)}{4} + \frac{4(x-3)}{5} - \frac{5(x-4)}{6} - \frac{3(6-x)}{10}$

74. (92.) $\frac{x-2}{6} - \frac{3(x-1)}{8} - \frac{2(3x-4)}{9} + \frac{5(2x-1)}{12} + \frac{x-9}{18}$

75. (93.) $\frac{6}{x-5} + \frac{6}{5}, \frac{3}{2x-5} - \frac{3}{2x}, \frac{6}{2a-3b} - \frac{3}{a}, \frac{8}{3a+2b} - \frac{4}{b}$

76. (94.) $\frac{x+2}{x+3} - \frac{2}{3}, \frac{3x-1}{4x-1} - \frac{3}{4}, \frac{4x-1}{x+3} + \frac{1}{3}, \frac{4x-3}{x+4} + \frac{3}{4}$

77. (95.) $\frac{a}{x-1} - \frac{a}{x+1}$ $\frac{a}{x-1} + \frac{a}{x+1}$

78. (96.) $\frac{3}{x+1} - \frac{2}{x-1} + \frac{5}{x^2-1}$ $\frac{5}{a+b} - \frac{4}{a-b} + \frac{9b}{a^2-b^2}$

79. (97.) $\frac{x+1}{x-1} + \frac{x-1}{x+1}$ $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x-1}{x+1}$

80. (98.) $\frac{a+b}{a-b} + \frac{a-b}{a+b} - \frac{a^2+b^2}{a^2-b^2}$ $\frac{a+b}{a-b} - \frac{a-b}{a+b} - \frac{4ab}{a^2-b^2}$

81. (99.) $\frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}$ $\frac{a}{x+1} - \frac{a}{x+2}$

82. (100.) $\frac{8}{5(x+1)} - \frac{3}{2(x+1)}$ $\frac{a}{2(x-1)} + \frac{a}{3(x-1)} + \frac{a}{6(x-1)}$

83. (101.) $\frac{5}{2x+2} - \frac{7}{3x+3} + \frac{1}{6x+6}$ $\frac{5}{x-1} - \frac{3}{2x-2} - \frac{7}{3x-3}$

84. (102.) $\frac{x-2}{x-3} - \frac{x-1}{x-2}$ $\frac{x-5}{x-7} - \frac{x-2}{x-4}$

85. (103.) $\frac{ax-by}{2xy(x-y)} - \frac{ax+by}{2xy(x+y)}$ $\frac{ay+bx}{2xy(x-y)} + \frac{ay-bx}{2xy(x+y)}$

86. (104.) $\frac{x+3}{x-1} - \frac{x-3}{x+1} - \frac{2x}{x^2-1}$ $\frac{2x+3}{2x-2} - \frac{3x-2}{3x+3} - \frac{5}{6x^2-6}$

87. (105.) $\frac{3x-1}{x-1} - \frac{2x-1}{x-2} + \frac{3}{x^2-3x+2} - \frac{3x-7}{3x-3}$

88. (106.) $\frac{2x-3}{x+2} - \frac{3x-1}{x-1} + \frac{3(3x-1)}{x^2+x-2} - \frac{1}{2-2x}$

89. (107.) $\frac{5}{x-1} - \frac{2}{x-2} - \frac{3}{x-3}, \frac{3}{x+3} + \frac{4}{x+2} - \frac{3}{x+1}$

Digitized by Google

90. $\frac{\frac{8}{5}-1}{2-\frac{3}{5}}$ $\frac{2-\frac{3}{7}}{\frac{5}{7}+4}$ $\frac{11+\frac{7}{10}}{\frac{43}{15}-2}$

91. $\frac{\frac{4}{3}+\frac{2}{9}}{\frac{16}{9}-\frac{1}{3}}$ $\frac{\frac{5}{12}-\frac{3}{8}}{\frac{17}{12}+\frac{7}{8}}$ $\frac{\frac{7}{10}+\frac{12}{25}}{\frac{9}{10}+\frac{7}{25}}$

92. $\frac{2+\frac{3}{5}+\frac{4}{25}}{4+\frac{8}{5}+\frac{16}{25}}$ $\frac{\frac{2}{3}+\frac{3}{4}-\frac{4}{5}}{\frac{17}{5}-\frac{5}{4}+\frac{4}{3}}$ $\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}+\frac{3}{4}}{\frac{1}{3}+\frac{1}{4}-\frac{1}{5}}$

93. $\frac{\frac{u}{v}+2}{\frac{3u}{v}-2}$ $\frac{\frac{a}{6}+\frac{6}{a}}{\frac{a}{2}-\frac{2}{a}}$ $\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}$

94. $\frac{\frac{a}{b}-\frac{b}{a}}{\frac{1}{b}+\frac{1}{a}}$ $\frac{\frac{a^2}{b}-\frac{b^2}{a}}{\frac{1}{b}-\frac{1}{a}}$ $\frac{\frac{x+1}{y}-\frac{y+1}{x}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}}$

95. $\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}{\frac{1}{y^2}-\frac{1}{x^2}}$ $\frac{\frac{1}{x}-\frac{1}{y}}{\frac{1}{x^2}-\frac{1}{y^2}}$ $\frac{\frac{x^2}{y^2}-\frac{y^2}{x^2}}{\frac{x}{y}-\frac{y}{x}}$

96. $\frac{\frac{1}{x^2}+\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}$ $\frac{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{xy}+\frac{1}{y^2}}{\frac{1}{x^2}-\frac{2}{y^2}}$

97. $\frac{\frac{1}{u^3}+\frac{3}{u^2v}+\frac{3}{uv^2}+\frac{1}{v^3}}{\frac{1}{u}+\frac{1}{v}}$ $\frac{\frac{1}{a^3}-\frac{3}{a^2b}+\frac{3}{ab^2}-\frac{1}{b^3}}{\frac{1}{b^2}-\frac{1}{a^2}}$

98. $\frac{a-b}{a+b}:\frac{a^2-ab+b^2}{a^2-b^2}$ $\frac{a^2-ab+b^2}{a^2+ab+b^2}:\frac{a-b}{a+b}$

99. $\frac{1}{u^2-8u+15}:\frac{1}{u^2-u-6}$ $\frac{4}{a^2-ab-2b^2}:\frac{3}{a^2+3ab-15b^2}$

100. $\frac{a-b}{a^2-2ab-3b^2}:\frac{a^2+2ab-3b^2}{a+b}$ $\frac{u^2+uv-6v^2}{u-3v}:\frac{u-2v}{u^2-uv-6v^2}$

101. (66.) $\left(\frac{a}{2x}-\frac{2x}{a}\right):\left(\frac{2x}{a}+1\right)$ $\left(\frac{3a}{2b}-\frac{2b}{3a}\right):\left(\frac{2}{a}+\frac{3}{b}\right)$

102. (67.) $\left(\frac{5a^2}{b}-\frac{16b}{5}\right):(5a+4b)$ $\left(\frac{5a}{7b}-\frac{7b}{5a}\right):\left(\frac{7}{a}+\frac{5}{b}\right)$

103. (68.) $(2x^4-\frac{53}{45}x^3+\frac{41}{20}x^2-\frac{19}{10}x+\frac{3}{8}):\left(\frac{3x^2}{2}-\frac{4x}{3}+\frac{1}{4}\right)$

104. (69.) $\left(\frac{9x^4}{10}-3\frac{211}{360}x^3+\frac{21}{4}x-4\frac{1}{2}\right):\left(\frac{3x^2}{2}+\frac{5x}{3}-6\right)$

105. (70.) $\left(\frac{10a}{9b^2}+\frac{1}{b}+\frac{2}{a}-\frac{9b}{5a^2}\right):\left(\frac{5}{b}-\frac{3}{a}\right)$

Digitized by Google

106. (71.) $\left(\frac{9x^2}{8y^2}+\frac{y}{3x}\right):\left(\frac{3}{2y}+\frac{1}{x}\right)$ $\left(\frac{4a^2}{3x^2}-\frac{9b^2x}{2y^3}\right):\left(\frac{2a}{x}-\frac{3b}{y}\right)$

107. (72.) $\left(\frac{75x^2}{y^2}+1+\frac{4y}{5x}\right):\left(\frac{2x}{y}+\frac{2}{5}\right)$

108. (73.) $\left(\frac{2x^2}{5y}-\frac{16y}{15}-\frac{x}{3}+\frac{y^2}{x}\right):\left(\frac{2x}{5}+\frac{2y}{3}\right)$

109. (74.) $\left(\frac{4a^2b}{9xy}+\frac{2xy}{b}+\frac{9x^2y^2}{2ab^2}\right):\left(\frac{2a}{y}+\frac{3x}{b}\right)$

110. (75.) $\left(\frac{3x^2}{4y^2}-\frac{1223a^2x}{150b^2}+\frac{3a^2y}{5b^2}\right):\left(\frac{5a}{b}+\frac{3x}{2y}\right)$

111. (76.) $\left(\frac{25x^2}{8y}+\frac{1}{2}xy+\frac{2y^2}{25x}\right):\left(\frac{5x}{2}+y+\frac{2y^2}{5x}\right)$

112. (77.) $\left(\frac{9a^2}{4b}+4ab+\frac{64b^2}{9a}\right):\left(\frac{3a^2}{2b}+2a+\frac{8b}{3}\right)$

113. $\left(\frac{4u^2}{25v}+uv+\frac{25v^2}{4u}\right):\left(\frac{2u}{5}-v+\frac{5v^2}{2u}\right)$.

X. Proportionen.

A. Theorie.

Bei der Division hatte man (Abschnitt II, Nr. 27.) zwei Fälle zu unterscheiden, je nachdem der Divisor eine Größe von derselben Art wie der Dividend oder eine unbenannte Zahl war. Nur in dem zweiten Falle war das Dividieren im eigentlichen Sinne ein **Teilen**, im ersten Fall, wo der Divisor von derselben Größenart wie der Dividend ist, handelt es sich vielmehr um ein **Messen** des Dividenden, wobei der Divisor als Maßstab dient.

Ist der Dividend selbst unbekannt, so kann der Quotient doppelt aufgefaßt werden. Die Gleichung $6:3=2$ besagt sowohl, daß 3 in 6 zweimal enthalten ist, als auch daß der dritte Teil von 6 den Wert 2 hat.

Das Messen einer Größe durch eine zweite faßt man auch als das Aufsuchen des Größenverhältnisses zwischen beiden auf. Den Quotienten zweier gleichartigen Größen bezeichnet man dann als das **Verhältnis***) derselben und schreibt dieses Verhältnis in der Regel

*) Früher nannte man das Verhältnis „geometrisches Verhältnis" im Gegensatz zu dem „arithmetischen Verhältnis", welches eine andere Bezeichnung für die Differenz zweier Größen war ($a:b$ war das geometrische, $a-b$ das arithmetische Verhältnis zwischen a und b). Da bei der Subtraktion eine Unterscheidung der beiden Fälle, die bei der Division auftreten, nicht stattfindet, ist der Name des arithmetischen Verhältnisses als überflüssig außer Gebrauch gekommen, Spuren davon haben sich nur noch in den Ausdrücken: **arithmetisches Mittel** und **arithmetische Reihen** (s. später Nr. 13.) erhalten.

Digitized by Google

unter Anwendung des Zeichens :, welches im Sprechen meist nicht durch das Wort durch, sondern durch das Wort zu wiedergegeben wird. Dividend und Divisor des Quotienten erhalten dann den Namen Vorderglied und Hinterglied des Verhältnisses.

Da das Verhältnis in diesem Sinne nichts als eine besondere Art von Quotient ist, läßt es sich wie jeder Quotient erweitern und kürzen. Insbesondere lassen sich bei jedem Verhältnis benannter Größen Vorderglied und Hinterglied durch die entsprechende Größeneinheit dividieren, d. h. jedes Verhältnis läßt sich auf ein reines Zahlenverhältnis zurückführen:

$$\text{z. B. } 28\ kg : 21\ kg = 28 : 21 = 4 : 3.$$

1. Eine Gleichung, die aussagt, daß zwei Verhältnisse einander gleich sind, wird Proportion genannt, so sagt z. B. die Proportion $a : b = c : d$ aus, daß die Verhältnisse $a : b$ und $c : d$ einander gleich sind.

2. Bei der Proportion hat man demnach zwei Vorderglieder und zwei Hinterglieder, man spricht von homologen oder entsprechenden Gliedern, von inneren und äußeren Gliedern.

In der vorstehenden Proportion sind a und c die Vorderglieder, b und d die Hinterglieder; a und d die äußeren, b und c die inneren Glieder.

Ferner werden die Glieder von links nach rechts numeriert. Es ist a das erste, b das zweite, c das dritte, d das vierte Glied der in Rede stehenden Proportion.

3. Wie jedes Verhältnis auf ein Zahlenverhältnis, so läßt sich jede Proportion auf eine Zahlenproportion zurückführen. Die Zahlenproportion $a : b = c : d$ läßt sich in der Form der Bruchgleichung $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ schreiben.

Bezeichnet man nun den gemeinschaftlichen Wert der einander gleichen Brüche $\frac{a}{b}$ und $\frac{c}{d}$ mit t, so folgen dann aus der Proportion $a : b = c : d$ die Gleichungen

$$\frac{a}{b} = t,\ \frac{c}{d} = t;\ \text{also } a = bt,\ c = dt.$$

4. Hat man nun die Gleichung

$$bt \cdot d = b \cdot dt,$$

und setzt in ihr links für bt den Wert a, rechts für dt den Wert c, so kommt

$$ad = bc,$$

d. h. in Worten: In jeder richtigen Zahlenproportion ist das Produkt der äußeren Glieder gleich dem der inneren Glieder.

Digitized by Google

5. Dividiert man umgekehrt beide Seiten der Gleichung

$$ad = bc$$

durch das Produkt bd, so erhält man

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}, \text{ d. h. } a : b = c : d,$$

d. h.: Aus jeder Produktgleichung läßt sich eine richtige Proportion bilden, indem man die Faktoren des einen Produkts zu äußeren, die des anderen zu inneren Gliedern macht.

Die Richtigkeit einer Proportion läßt sich daran prüfen, ob das Produkt der inneren und das der äußeren Glieder einander gleich sind.

6. Statt die Produktgleichung $ad = bc$ durch bd zu dividieren, konnte man auch die Divisoren ab, ac oder cd verwenden. Das gibt zu der in Nr. 5. aufgestellten Proportion noch drei andere, im ganzen also 4 voneinander verschiedene Proportionen. Da man in der gegebenen Produktgleichung ferner die beiden Seiten miteinander vertauschen kann, treten noch weitere 4 Fälle hinzu. Man kann also aus einer gegebenen Produktgleichung acht verschiedene Proportionen bilden, die indessen innerlich untereinander zusammenhängen und nur denselben Sachverhalt in acht verschiedenen Gestalten zum Ausdruck bringen.

7. In der Produktgleichung $ad = bc$ kann man a mit d, b mit c, ferner die Produkte ad und bc miteinander vertauschen. Das gibt bei Übertragung auf die Proportion $a : b = c : d$ die Sätze:

In jeder richtigen Proportion lassen sich

1) die äußeren Glieder unter sich,
2) die inneren Glieder unter sich,
3) die inneren mit den äußeren Gliedern vertauschen.

Die Ausführung der sämtlichen hiernach möglichen Vertauschungen ergibt dann ebenfalls die sieben nach Nr. 6. neben der gegebenen Proportion noch möglichen Proportionsformen.

8. Aus $ad = bc$ folgt $adf = bcf$, wofür man auch $a \cdot df = b \cdot cf$ oder $af \cdot d = b \cdot cf$ schreiben kann. d und a sind äußere Glieder, b ist ein inneres Glied der gegebenen Proportion.

In jeder richtigen Proportion darf man gleichzeitig ein äußeres und ein inneres Glied mit demselben Faktor multiplizieren.

9. Ein äußeres Glied einer Proportion ist gleich dem Produkte der inneren Glieder, dividiert durch das andere äußere. Ein inneres Glied einer Proportion ist gleich dem Produkte der äußeren Glieder, dividiert durch das andere innere.

10. In der Proportion $a : b = c : d$ heißt d die vierte Proportionale zu a, b und c.

Um ein anderes Glied derselben Proportion als vierte Proportionale zu den drei übrigen aufzufassen, muß man es an die vierte Stelle bringen. So ist z. B.

$$c : d = a : b$$

und mithin b die vierte Proportionale zu c, d, a.

Digitized by Google

Da ferner $d = \frac{bc}{a}$ ist, so hat man den Satz:

Die vierte Proportionale zu drei Größen ist gleich dem Produkt aus der zweiten und dritten, dividiert durch die erste.

11. Die Proportion $a : b = b : c$, deren innere Glieder einander gleich sind, heißt eine **stetige Proportion**. In dieser Proportion heißt c die **dritte Proportionale zu a und b**.

Die dritte Proportionale zu a und b ist die vierte Proportionale zu a, b und b.

Ferner ist $c = \frac{b^2}{a}$, d. h. die dritte Proportionale zu zwei Größen ist gleich dem Quadrat der zweiten Größe, dividiert durch die erste.

12. In der vorstehenden stetigen Proportion $a : b = b : c$ heißt b die **mittlere Proportionale** oder das **geometrische Mittel** zwischen (zu) a und b, dabei ist

$$b^2 = ac, \text{ also } b = \sqrt{ac}.$$

13. Unter dem arithmetischen Mittel zwischen a und b versteht man den Wert $\frac{a+b}{2}$.

14. In weiterem Sinne versteht man unter dem arithmetischen Mittel aus den n Größen $a_1\ a_2 \cdots a_n$ den Wert $\frac{a_1 + a_2 \cdots + a_n}{n}$, unter dem geometrischen Mittel aus denselben Größen den Wert $\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdots a_n}$.

15. Sind in zwei Proportionen drei entsprechende Glieder einander gleich, so müssen auch die noch übrigen Glieder einander gleich sein.

Ist $a : b = c : d$ und $a : b = x : d$, so muß $c = x$ sein, denn jede der beiden Größen hat nach Nr. 9. den Wert $\frac{ad}{b}$.

16. Hat man die beiden Proportionen

$$a : b = c : d \text{ und } A : B = C : D,$$

so kann man sie durch die Bruchgleichungen $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ und $\frac{A}{B} = \frac{C}{D}$ ersetzen, aus denen man durch Multiplikation der entsprechenden Seiten die Gleichung

$$\frac{Aa}{Bb} = \frac{Cc}{Dd}$$

erhält; diese Gleichung schreibt man als Proportion

$$Aa : Bb = Cc : Dd$$

und hat damit den Satz:

Aus zwei richtigen Proportionen läßt sich eine dritte dadurch bilden, daß man die entsprechenden Glieder beider Proportionen miteinander multipliziert.

Digitized by Google

17. Auf ganz ähnlichem Wege findet sich

$$\frac{A}{a} : \frac{B}{b} = \frac{C}{c} : \frac{D}{d},$$

d. h.: **Aus zwei richtigen Proportionen ergibt sich durch Division der entsprechenden Glieder wieder eine richtige Proportion.**

18. Verbindet man in Gemäßheit von Nr. 16. die Proportion $a : b = c : d$ mit sich selbst, so erhält man

$$a^2 : b^2 = c^2 : d^2$$

und durch Fortsetzung dieses Verfahrens

$$a^n : b^n = c^n : d^n.$$

Umgekehrt folgt aus der Proportion $a^n : b^n = c^n : d^n$ die Proportion $a : b = c : d$.

In jeder richtigen Proportion darf man alle Glieder gleichzeitig mit derselben Zahl potenzieren oder radizieren.

19. Durch Addition und Subtraktion kann man aus einer Proportion beliebig viele neue Proportionen bilden, wenn man nur die Glieder des einen Verhältnisses ebenso verbindet, wie die des anderen Verhältnisses. Vor der Addition und Subtraktion kann man auch die homologen Glieder mit demselben Faktor multiplizieren. So folgen aus der Proportion $a : b = c : d$ die folgenden:

$$(a + b) : (a - b) = (c + d) : (c - d)$$
$$(a \pm b) : b = (c \pm d) : d$$
$$a : (a \pm b) = c : (c \pm d) \text{ usw.}$$
$$(am + bn) : (ap + bq) = (cm + dn) : (cp + dq),$$

indem m, n, p und q beliebige Zahlen vorstellen. — Der durch die erste Gleichung ausgedrückte Satz ist besonders zu merken: **In jeder Proportion verhält sich die Summe der beiden ersten Glieder zu ihrer Differenz wie die Summe der beiden letzten Glieder zu ihrer Differenz.**

Die drei ersten Formeln gehen aus der vierten dadurch hervor, daß man für m, n, p, q besondere Werte $(+1, -1, 0)$ setzt.

Um die vierte Formel zu beweisen, erweitere man in der offenbar richtigen Gleichung

$$mt + n : pt + q = mt + n : pt + q$$

das auf der linken Seite stehende Verhältnis mit b, das rechts stehende mit d, so kommt

$$mbt + nb : pbt + qb = mdt + nd : pdt + qd.$$

Setzt man hierin $bt = a$, $dt = c$, so erhält man die zu beweisende Formel; den durch sie ausgedrückten Satz nennt man den **Satz von der korrespondierenden Addition (und Subtraktion).**

Digitized by Google

20. Hat man eine Reihe von Proportionen

$$A:B=a:b \quad B:C=b:c \quad C:D=c:d \text{ usw.},$$

bei denen die Vorderglieder der folgenden immer mit den Hintergliedern der vorhergehenden Proportion übereinstimmen, so pflegt man sie in die eine Gleichung

$$A:B:C:D:\ldots=a:b:c:d:\ldots$$

zusammenzufassen. Diese Gleichung nennt man eine fortlaufende Proportion.

21. Vertauscht man in den vorstehend genannten Proportionen die inneren Glieder, so hat man

$$A:a=B:b \quad B:b=C:c \quad C:c=D:d\ldots$$

Es ist also

$$\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\frac{C}{c}=\frac{D}{d} \text{ usw.}$$

und wenn man den gemeinschaftlichen Wert dieser Brüche oder Verhältnisse t nennt, so ist

$$A=at,\ B=bt,\ C=ct \text{ usw.}$$

$$A+B+C+\ldots=(a+b+c+\ldots)t$$

$$\frac{A+B+C+\ldots}{a+b+c+\ldots}=t=\frac{A}{a}=\frac{B}{b}=\ldots$$

22. Hat man also die fortlaufende Proportion

$$A:B:C:D\ldots=a:b:c:d\ldots,$$

so verhält sich die Summe aller links stehenden Größen zur Summe aller rechts stehenden, wie irgend eine der links stehenden Größen zu der ihr entsprechenden Größe auf der rechten Seite der fortlaufenden Proportion. Auch gilt, wenn $mnpq$ beliebige Zahlen sind, wie durch eine kleine Abänderung des vorstehenden Beweises zu zeigen ist, die Gleichung

$$Am+nB+pC+qD\ldots:ma+nb+pc+qd\ldots=A:a=\ldots$$

23. Will man mehrere Proportionen, in denen dieselben Größen auftreten, zu einer fortlaufenden Proportion verschmelzen, so muß man dafür sorgen, daß gleichen Größen links auch gleiche Größen rechts entsprechen. Man wird also z. B. die beiden Proportionen $A:B=3:5$ und $A:C=6:11$, in denen der Größe A links einmal rechts die Größe 3, das andere Mal die Größe 6 entspricht, dadurch in Zusammenhang bringen, daß man auf der rechten Seite der ersten Proportion eine Erweiterung mit 2 vornimmt. Dann hat man $A:B=6:10$, $A:C=6:22$ und es entspricht der Größe A in beiden Gleichungen rechts die Zahl 6. Man kann also schreiben

$$A:B:C=6:10:22.$$

Digitized by Google

Hätte man ferner noch $B : D = 4 : 7$, so müßte man nun noch die der Zahl B entsprechenden Größen 10 und 4 durch passende Erweiterungen auf dieselbe Größe bringen. Man wird die rechte Seite der bereits herausgebrachten fortlaufenden Proportion mit 2, die der neu hinzukommenden einfachen Proportion mit 5 erweitern, also schreiben

$$A : B : C = 12 : 20 : 44 \qquad B : D = 20 : 35$$
$$A : B : C : D = 12 : 20 : 44 : 35.$$

---

24. Bei zwei miteinander zusammenhängenden Größenänderungen kann die Sache so liegen, daß beide in demselben Sinne erfolgen, z. B. wird der Preis für eine Eisenbahn-Fahrkarte höher, wenn die Länge der zu durchfahrenden Strecke zunimmt; der Arbeitslohn wächst zugleich mit der Arbeitszeit u. dgl. m.

25. Die Sache liegt aber auch unter Umständen so, daß durch die Änderung der einen Größe eine Änderung der anderen in entgegengesetztem Sinne bedingt wird. Wenn z. B. die Grundlinie eines Rechtecks zunimmt, während der Flächeninhalt ungeändert bleiben soll, muß die Höhe entsprechend abnehmen. Wenn ich die Geschwindigkeit, mit der ich eine Strecke zurücklege, verstärke, wird die Zeit, die ich zur Zurücklegung dieser Strecke brauche, entsprechend kürzer.

26. Im ersten Falle sagt man, daß beide Veränderungen in demselben Verhältnis erfolgen oder daß die eine Größe der anderen **direkt proportional** ist. Im zweiten Falle erfolgen beide Größenänderungen in entgegengesetztem Verhältnis, die eine Größe ist der anderen indirekt oder **umgekehrt proportional**. Stehen A und B in demselben Verhältnis, so ist

$$A : B = a : b.$$

Im zweiten Falle ist $A : B = b : a = \frac{ab}{a} : \frac{ab}{b} = \frac{1}{a} : \frac{1}{b}$.

27. Für mehr als zwei Größen, die einander direkt proportional sind, gilt die Gleichung

$$A : B : C \ldots = a : b : c \ldots,$$

für mehr als zwei einander indirekt proportionale Größen hat man ebenso

$$A : B : C \ldots = \frac{1}{a} : \frac{1}{b} : \frac{1}{c} \ldots$$

B. Aufgaben.

Drücke folgende Verhältnisse in den kleinsten ganzen Zahlen aus:

1.	$91 : 117$	$323 : 391$	$\frac{3}{4} : \frac{6}{7}$	$\frac{9}{10} : \frac{24}{25}$
2.	$3\frac{1}{2} : 4\frac{2}{3}$	$5\frac{1}{4} : 4\frac{3}{8}$	$4\frac{3}{4} : 7\frac{1}{8}$	$26\frac{3}{7} : 98\frac{2}{3}$
3.	$0{,}51 : 0{,}85$	$0{,}91 : 2{,}6$	$5{,}7 : 0{,}95$	$11{,}9 : 18{,}7$

Digitized by Google

4. $6ab : 8bx$ $8x^3y : 12xy^2$ $1\frac{2}{3}a^2b : 2\frac{1}{2}ab^2$ $9\frac{1}{2}x^3y : 7\frac{3}{5}xy^3$

5. $\frac{a}{b} : \frac{x}{y}$ $\frac{5a}{6b} : \frac{10x}{9y}$ $3\frac{1}{3}a : \frac{5ab}{6x}$ $\frac{5ab}{3x} : 2\frac{1}{2}b.$

Drücke folgende Verhältnisse benannter Zahlen in den kleinsten ganzen unbenannten Zahlen aus:

6. 4 *m* 59 *cm* : 4 *m* 8 *cm* 9,456 *m* : 13 *m* 2 *mm*

7. 8 *hl* 37 *l* : 8,99 *hl* 7,05 *hl* : 799 *l*

8 26,418 *kg* : 28,305 *kg* 7,844 *kg* : 7420 *g*

9. 8,05 *g* : 943 *cg* 1,131 *g* : 1392 *mg*.

Drücke folgende Proportionen in den kleinsten ganzen Zahlen aus, ohne das Glied x zu ändern:

10. $42 : 15 = 28 : x$ $14 : x = 91 : 65$

11. $3\frac{1}{3} : 1\frac{1}{4} = \frac{8}{9} : x$ $8\frac{1}{3} : 1\frac{2}{3} = 1\frac{3}{7} : x$

12. $0{,}84 : x = 1{,}2 : 3{,}5$ $0{,}28 : 9{,}8 = x : 10{,}5$

13. $\frac{3}{4}a^2b : \frac{1}{2}ac = 1\frac{1}{2}b^2 : x$ $7\frac{1}{2}ab : 3\frac{1}{3}b^2c = x : \frac{2}{3}ac$

14. $\frac{3a}{b} : \frac{5c}{2d} = \frac{4a}{5c} : x$ $\frac{4a}{5b} : \frac{3c}{10d} = \frac{4d}{3b} : x.$

Bestimme x aus folgenden Proportionen:

15. $57 : 45 = 76 : x$ $58 : 87 = 36 : x$

16. $3\frac{1}{2} : 4\frac{1}{3} = x : 1\frac{6}{7}$ $5\frac{1}{3} : 7\frac{1}{8} = 1\frac{1}{3} : x$

17. $1{,}17 : 15{,}6 = 0{,}45 : x$ $0{,}95 : 1{,}75 = 11{,}4 : x$

18. $5ab : 3bc = 3\frac{1}{3}a : x$ $2\frac{1}{2}ac : 1\frac{2}{3}bc = \frac{3}{4}ad : x$

19. $\frac{a}{b} : \frac{a}{c} = \frac{c}{d} : x$ $\frac{2a}{3b} : \frac{3a}{4c} = \frac{8c}{5b} : x.$

Bilde aus folgenden Gleichungen zwischen Produkten und Quotienten die je acht möglichen Proportionen:

20. $3 \cdot 28 = 6 \cdot 14$ $5 \cdot 18 = 9 \cdot 10$ $ax = by$ $5a = 7x$

21. $\frac{15}{21} = \frac{40}{56}$ $\frac{21}{28} = \frac{27}{36}$ $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ $\frac{ax}{bx} = \frac{ay}{by}.$

Suche die vierte Proportionale zu

22. 6, 8, 9 14, 18, 21 $\frac{5}{2}$, $3\frac{3}{4}$, $2\frac{2}{3}$ 8, $3\frac{1}{5}$, $7\frac{1}{2}$.

Suche das geometrische Mittel zu folgenden Zahlenpaaren:

23. a und b 18 und 2 9 und 16 18 und 50.

23_1. Desgleichen das arithmetische Mittel zwischen denselben Zahlenpaaren.

23_2. Zeige, daß das arithmetische Mittel zwischen zwei ungleichen Zahlen stets größer ist als das geometrische.

Digitized by Google

23_3. Der mittlere Erdradius ist das geometrische Mittel zu a, a, b, wenn a den Äquatorradius des wirklichen Erdkörpers, b die halbe Erdachse vorstellt. Berechne demnach die Länge des mittleren Erdradius unter den Annahmen $a = 6377{,}40\ km$, $b = 6356{,}08\ km$.

23_4. Berechne das Durchschnittsalter einer Klasse von 12 Schülern im Alter von 15 J. 7 M., 15 J. 3 M., 15 J. 2 M., 15 J. 2 M., 15 J. 1 M., 14 J. 11 M., 14 J. 9 M., 14 J. 9 M., 14 J. 7 M., 14 J. 6 M., 14 J. 6 M., 14 J. 5 M., indem du das arithmetische Mittel bestimmst, unter Abrundung auf volle Monate.

23_5. Welchen besonderen Rechenvorteil bietet die vorstehende Aufgabe?

Transformiere mit Hilfe des Satzes von der korrespondierenden Addition und Subtraktion folgende Proportionen so, daß x nur als viertes Glied vorkommt.

24. $a : b = (c + x) : c$ $\qquad a : b = (c - x) : x$
25. $a : b = c : (c + x)$ $\qquad a : b = c : (c - x)$
26. $a : b = (x - c) : x$ $\qquad a : b = (c - x) : x$
27. $a : b = (c + x) : (c - x)$ $\qquad a : b = (x + c) : (x - c)$
28. $(a+x):(b+x)=(x+c):(x-c)$, $(a+x):(b-x)=(c+x):(c-x)$.

28_1. Es sei $x : y : z = p : q : r$, während die Summe $x + y + z = M$ gegeben ist. Bilde in Gemäßheit von A 22. drei Proportionen, von denen jede nur eine der drei unbekannten Größen (x, y, z) enthält.

28_2. Gib die Teile an, in die die Größe M bei Teilung nach dem Verhältnis $p : q : r : s$ zerfällt.

Um aus zwei Proportionen ein Glied zu eliminieren, das in beiden vorkommt, hat man die Glieder so zu stellen, daß das fragliche Glied in der einen Proportion ein inneres ist, wenn es in der anderen ein äußeres ist, und die entsprechenden Glieder der Proportionen miteinander zu multiplizieren. Eliminiere hiernach aus je zwei der folgenden Proportionen x, und gib der neuen Proportion die einfachste Form.

29. $\left|\begin{matrix} a : b = c : x \\ b : x = p : q \end{matrix}\right|$ $\qquad \left|\begin{matrix} a : x = b : c \\ c : x = p : q \end{matrix}\right|$

30. $\left|\begin{matrix} a : b = x : c \\ p : x = b : q \end{matrix}\right|$ $\qquad \left|\begin{matrix} x : a = b : c \\ x : b = p : q \end{matrix}\right|$

Fasse die folgenden zu zwei und drei zusammengehörigen Proportionen zu fortlaufenden Proportionen zusammen.

31. $\left|\begin{matrix} A : B = 15 : 16 \\ A : C = 10 : 9 \end{matrix}\right|$ $\qquad \left|\begin{matrix} A : B = 9 : 10 \\ B : C = 15 : 16 \end{matrix}\right|$

Digitized by Google

32. $\left|\begin{array}{l} A:B = 6:7 \\ A:C = 8:9 \\ A:D = 12:13 \end{array}\right|$ $\left|\begin{array}{l} A:B = 2:3 \\ B:C = 5:6 \\ C:D = 9:8 \end{array}\right|$

33. $\left|\begin{array}{l} A:C = 3:5 \\ B:D = 7:8 \\ C:D = 15:16 \end{array}\right|$ $\left|\begin{array}{l} A:D = 5:6 \\ B:C = 2:3 \\ C:D = 9:8 \end{array}\right|$

33_1. Teile die Zahl 100 in 3 Teile x, y, z dergestalt, daß $x:y = 2:3$, $y:z = 12:5$ ist.

33_2. Teile entsprechend die Zahl 160 so in drei Teile, daß $x:y = 7:8$, $x:z = 3:5$ ist.

33_3. Gib die 4 Teile u, v, w, z an, in die sich die Zahl 200 zerlegen läßt, wenn $u:v = 5:3$, $u:w = 2:1$, $v:z = 3:2$ ist.

34. Es sei $A:B = u:v$, $B:C = p:q$, $C:D = r:s$. Bestimme hieraus das Verhältnis $A:D$.

35. Die Größen A und B seien den Größen u und v direkt, B und C den Größen p und q umgekehrt, C und D den Größen r und s ebenfalls umgekehrt proportional. Welchen Wert hat das Verhältnis $A:D$?

36. Gib bei jeder der folgenden Größengruppen an, welche Art von Proportionalität (direkte oder indirekte) zwischen den beiden Größenarten jeder Gruppe besteht. 1) Seiten und zugehörige Höhen eines Dreiecks, 2) Seiten und zugehörige Höhen eines Parallelogramms, 3) Seitenflächen und zugehörige Höhen eines Tetraeders, 4) Seitenflächen und zugehörige Höhen eines Parallelepipedons, 5) Grundlinien und Höhen zweier gleicher Rechtecke, 6) Grundlinien und Flächen zweier Dreiecke von gleicher Höhe, 7) Höhen und Volumina zweier Prismen von gleicher Grundfläche, 8) Zwei drehende Kräfte, die sich im Gleichgewicht halten und die Hebelarme, an denen sie wirken, 9) Kapitalien und Zinserträge in gleicher Zeit bei gleichem Prozentsatz, 10) Kapitalien und Prozentsätze bei gleichem Zinsertrag in derselben Zeit, 11) Prozentsatz und Zinsertrag bei gleichen auf gleiche Zeit ausgeliehenen Kapitalien, 12) Kapitalien und Verzinsungszeiten bei demselben Prozentsatz und demselben Zinsertrag.

37. Der Zinsertrag von a_1 $\mathcal{M}$ bei p_1 Prozent in q_1 Jahren heiße z_1, der von a_2 $\mathcal{M}$ bei p_2 Prozent in q_2 Jahren heiße z_2. Bestimme das Verhältnis $z_1:z_2$, indem du den Zinsertrag k von a_1 $\mathcal{M}$ bei p_2 Prozent in q_1 Jahren und den Zinsertrag l von a_1 $\mathcal{M}$ bei p_2 Prozent in q_2 Jahren als Zwischengrößen einschiebst.

37_1. Bestimme dasselbe Verhältnis, indem du auf den Zinsertrag von 1 $\mathcal{M}$ bei 1 Prozent in 1 Jahr als Einheit zurückgehst.

38. Drei Wellräder sind so miteinander verbunden, daß immer die Welle des einen mit dem Rade des folgenden im Eingriff steht.

Digitized by Google

Die Radien des Rades verhalten sich zu denen der Welle der Reihe nach wie 10 : 1, 9 : 1, 8 : 1. Welcher Kraftgewinn wird durch diese Verbindung (Übersetzung) erzielt?

38_1. Für drei andere Wellräder der eben beschriebenen Art haben die Radienverhältnisse die Werte 8 : 1, 6 : 1, 5 : 1. Welche Kraft ist erforderlich, um eine an der dritten Welle hängende Last von 1200 *kg* emporzuziehen, wenn man von allen sonst noch in Betracht kommenden Umständen absieht?

39. (38.) A arbeitet mit zwei Pferden 6 Tage, B mit drei Pferden 5 Tage; welches ist das Verhältnis ihrer Arbeitsleistungen?

39_1. (39.) A arbeitet mit x Pferden in 8 Tagen ebensoviel als B mit y Pferden in 12 Tagen. Wie ist, sonst gleiche Umstände vorausgesetzt, das Verhältnis von x zu y?

40. A arbeitet mit 8 Pferden und 16 Mann in 4 Tagen ebensoviel als B mit 10 Pferden und 11 Mann in 3 Tagen. Wie groß ist das Verhältnis der täglichen Arbeitsleistungen, wenn ein Pferd durchschnittlich ebensoviel arbeitet als vier Mann?

41. A will 6 *ha* in 14 Tagen bearbeiten, B 8 *ha* in 21 Tagen. Wie muß das Verhältnis der täglich anzuwendenden Arbeitskräfte sein?

Drücke das Verhältnis für die Preise der Waren in folgenden Fällen durch möglichst kleine Zahlen aus:

42. 3 *dz* der ersten Ware kosten 7,05 *M*; 2 *dz* der zweiten 5,64 *M*
43. 7,38 *kg* kosten 8,35 *M*; 9,84 *kg* kosten 6,68 *M*
44. 3,047 *m* kosten 13,85 *M*; 20,13 *m* kosten 82,35 *M*
45. 53,7 *hl* kosten 17,01 *M*; 35,8 *hl* kosten 15,12 *M*.

46. Eine Mauer ist 30 *m* lang, $\frac{2}{3}$ *m* dick und $2\frac{1}{4}$ *m* hoch; eine andere 20 *m* lang, $\frac{3}{4}$ *m* dick und $2\frac{1}{2}$ *m* hoch. Wie müssen sich die Mengen der dazu verwendeten Ziegelsteine verhalten?

47. Von a Arbeitern soll in 2, von b in 3, von c in 6 Tagen dieselbe Arbeit beschafft werden. Welchen Wert hat das Verhältnis $a : b : c$?

48. Die ersten vier Faktoren von vier gleichen Produkten verhalten sich wie 6 : 8 : 12 : 24. Wie muß das Verhältnis der letzten vier Faktoren sein?

49. Von vier gleichen Rechtecken sind die vier langen Seiten bezw. 15, 20, 24, 30 *m* lang. Wie müssen sich die entsprechenden vier kurzen Seiten verhalten?

50. Die drei Seiten eines Dreiecks sind bezw. 36, 48, 72 *m* lang. Wie verhalten sich die drei entsprechenden Höhen?

51. Durch einen Punkt eines Kreises gehen fünf Sehnen. Die ersten Abschnitte derselben sind bezw. 252, 210, 168, 140, 126 *m* lang. Wie verhalten sich die anderen Abschnitte?

Digitized by Google

52. Zwei Kapitalien stehen zu gleichem Prozentsatz auf Zinsen. Das erste bringt in 5 Jahren 2920 *M.* Zinsen, das zweite in 6 Jahren 3942 *M.* Wie verhalten sich die Kapitalien?

53. Von zwei gleichen Kapitalien bringt das erste in x Jahren zu 4 Pzt. 5040 *M* Zinsen, das zweite in y Jahren zu $4\frac{1}{2}$ Pzt. 4410 *M.* Das Verhältnis $x : y$ wird gesucht.

54. Eine Strecke von 27 *cm* ist nach dem Verhältnis 5 : 2 äußerlich geteilt. Wie lang sind die Teile?

55. Wie lang sind die Teile, die durch äußerliche Teilung der Strecke a nach dem Verhältnis $p : q$ entstehen?

56. 57. Eine Strecke von 48 (b) *cm* Länge wird um 36 (c) *cm* verlängert. Nach welchem Verhältnis wird sie durch den Endpunkt der Verlängerung äußerlich geteilt?

58. 59. Eine Strecke von 35 *cm* (65 *cm*) wird innerlich und äußerlich im Verhältnis 3 : 2 (9 : 4) geteilt. Wie groß fällt der Abstand der Teilpunkte aus?

60. Beantworte dieselbe Frage für die Strecke a bei dem Teilungsverhältnis $p : q$.

61. 62. 63. In welchem Verhältnis wird im Falle der Aufgabe 59. (60., 61.) der Abstand der Teilpunkte durch die Endpunkte der gegebenen Strecke geteilt?

64. 65. Wie lang ist der Radius des zur Grundlinie eines Dreiecks gehörenden Apollonischen Halbkreises, wenn diese 20 *cm* (85 *cm*) lang ist, während die beiden anderen Seiten Längen von 21 und 9 *cm* (99 und 54 *cm*) besitzen?

66. 67. Die Flächen zweier ähnlichen Dreiecke unterscheiden sich um 27 *qcm* (20 *qcm*), während die Längen der Grundlinien sich wie 5 : 4 (7 : 3) verhalten. Wie groß sind die Flächen?

68. Die Flächen zweier regelmäßigen Fünfecke verhalten sich wie 24,5 : 8, die Seiten unterscheiden sich um 3 *cm.* Wie lang sind diese?

69. Eine Sehne eines Kreises wird durch einen Punkt in Abschnitte von 18 und 8 *cm* geteilt. Wie lang ist die durch den Teilpunkt halbierte Sehne?

70. Wie lang ist die Sehne eines Kreises, durch deren Halbierungspunkt eine andere Sehne von 17 *cm* Länge im Verhältnis von 49 : 36 geteilt wird?

71. 72. Von einem Punkte außerhalb eines Kreises geht nach ihm eine Sekante, deren äußerer Abschnitt 24 *cm* (27 *cm*) lang ist, während der innere eine Länge von 30 *cm* (48 *cm*) besitzt. Wie lang ist die von demselben Punkte ausgehende Tangente?

73. Die Gesichtsweite von einem erhabenen Punkte auf der Erdoberfläche kann man ohne erheblichen Fehler als das geometrische Mittel zwischen der Erhebung dieses Punktes über die Erdoberfläche und

Digitized by Google

dem Erddurchmesser ansehen. Der (mittlere) Erdradius hat eine Länge von 6370 *km*. Wie groß ist demnach die Gesichtsweite eines Auges, das sich an Bord eines Schiffes 8 *m* über dem Meeresspiegel befindet?

74. Wie weit reicht der Blick von einem 120 *m* hohen Turme?

75. 76. Wie groß ist die Gesichtsweite vom Gipfel des Brockens (1142 *m* Meereshöhe), wie groß vom Gipfel des Montblanc (4810 *m* Meereshöhe) bei Annahme eines allseitig unbehinderten Gesichtsfeldes?

77. Jede Sektion der deutschen Generalstabskarte stellt ein Stück der Erdoberfläche von der Breite eines halben Längengrades und der Höhe eines Viertel-Breitengrades im Maßstab 1 : 100000 dar.

Wie groß stellt sich die Höhe solcher Sektion, wenn man die Erde als vollkommene Kugel von 40000 *km* Umfang eines Kugelhauptkreises ansieht?

78. Wie breit fällt solche Sektion in der geographischen Breite von Kassel (51,33°) aus, wenn die Länge des Parallelkreises von Kassel sich zu der des Äquators wie 5 : 8 verhält?

79. Um wieviel ist solche Sektion im äußersten Norden des Deutschen Reiches (55°) breiter als im äußersten Süden ($47\frac{1}{2}$°), wenn die Länge des Parallelkreises dort $\frac{23}{40}$, hier $\frac{27}{40}$ der Äquatorlänge beträgt?

80. Eine Seemeile ist 1852 *m* lang; welchen Teil der auf 40000 *km* anzunehmenden Meridianlänge macht das aus? Bestimme unter Abrundung auf volle Minuten die Größe des Winkels, den die nach den Endpunkten einer solchen Strecke gehenden Erdradien miteinander bilden.

81. Welche Länge hat an der Erdoberfläche der Bogen eines Winkels von einer Bogensekunde, dessen Scheitel der Erdmittelpunkt ist?

82. Welche Zeitdifferenz entspricht einer Längendifferenz von 32° 21′?

83. Welche Längendifferenz entspricht einer Zeitdifferenz von $2^h\,21^m$?

84. Danzig hat 3° 40′ östliche Länge gegen Görlitz, Köln hat eine östliche Länge von 6° 58′ gegen Greenwich. Wieviel gehen die nach der mitteleuropäischen (d. h. Görlitzer) Zeit gestellten Uhren gegen die Ortszeit der genannten beiden Orte nach oder vor?

85. Wenn zwei Orte, an denen die Barometerstände B und β herrschen, einen Höhenunterschied von H *m* aufweisen, so gilt für Höhenunterschiede, die nicht über 900 *m* hinausgehen, mit großer Annäherung die Proportion

$$H : 16000 = B - \beta : B + \beta.$$

Um wieviel liegt demnach ein Ort mit einem mittleren Barometerstande von 711 *mm* höher als ein anderer mit 729 *mm*?

86. Welche Meereshöhe hat ein Berg, auf dessen Spitze das Barometer auf 700 *mm* steht?

87. Wie hoch steht das Barometer bei 660 *m* Meereshöhe?

Digitized by Google

88. Bei einem Atmosphärometer steht das Quecksilber im offenen Schenkel um 301 *mm* höher als im geschlossenen, die abgesperrte Luftsäule hat eine Höhe von 96 *mm*, der äußere Luftdruck beträgt 749 *mm*. Durch Zugießen von Quecksilber steigt die Höhendifferenz der Quecksilbersäulen auf 451 *mm*, wie hoch muß dann die abgesperrte Luftsäule sein?

89. In einem anderen Falle verringert sich die Höhendifferenz der beiden Quecksilbersäulen durch Abfüllen von Quecksilber von 443 *mm* auf 273 *mm*. Der äußere Luftdruck beträgt während der ganzen Zeit 747 *mm*. Welche Höhe wird die abgesperrte Luftsäule nach dem Abfüllen des Quecksilbers aufweisen, wenn sie vorher 78 *mm* hoch war?

90. Bei 212 *mm* Höhendifferenz der Quecksilbersäulen hat die abgesperrte Luftsäule eine Höhe von 78 *mm*, bei einer Höhendifferenz von 292 *mm* ist die Luftsäule 72 *mm* hoch. Wie groß ist der äußere Luftdruck?

91. Bei einem Höhenunterschied der beiden Quecksilbersäulen von 358 *mm* zeigte die abgesperrte Luftsäule eine Höhe von 90 *mm*, nachdem sich jener Höhenunterschied um 111 *mm* verringert hatte, war die Höhe der Luftsäule auf 100 *mm* gestiegen. Welcher Luftdruck hatte während der ganzen Zeit geherrscht?

92. Wieviel Natrium und wieviel Chlor sind in 81,9 *g* Kochsalz ($NaCl$) enthalten? ($Na = 23$, $Cl = 35{,}5$.)

93. Wieviel Kupfer und wieviel Sauerstoff stecken in 39,75 *g* Kupferoxyd (CuO)? ($O = 16$, $Cu = 63{,}5$.)

94. Wieviel Sauerstoff ist aus 60,9 *g* Braunstein (MnO_2) zu gewinnen? ($Mn = 55$.)

95. Wieviel Sauerstoff läßt sich aus 367,5 *g* chlorsaurem Kali ($KClO_3$) gewinnen? ($K = 39$.)

96. Wieviel Braunstein gehört zur Gewinnung von 80 *g* Sauerstoff?

97. Wieviel chlorsaures Kali ist zur Gewinnung von 7,2 *l* Sauerstoff erforderlich, wenn das Gewicht von 1 *l* Sauerstoff zu 1,44 *g* angenommen wird?

98. Wieviel Quecksilber steckt in einer Menge Quecksilberoxyd (HgO), durch deren Erhitzung 4,8 *g* Sauerstoff gewonnen werden? ($Hg = 200$.)

99. Wieviel Quecksilber kann man aus 812 *g* Zinnober (HgS) gewinnen? ($Hg = 200$, $S = 32$.)

100. Bei einem Barometerstande von 766 *mm* stellt sich das Gewicht von 1 *l* Acetylengas (H_2C_2) auf 1,165 *g*. Wie groß ist das Gewicht des in 1 *l* enthaltenen Kohlenstoffs? ($C = 12$, $H = 1$.)

101. Durch Einwirkung von Chlorwasserstoff auf Schwefelkalzium gewinnt man reinen Schwefelwasserstoff $(H_2S) \cdot CaS + 2\,HCl = CaCl_2 + H_2S$. ($Ca = 40$, $S = 32$, $H = 1$, $Cl = 35{,}5$.) Wieviel *g* Chlorwasserstoff muß man zu diesem Zwecke auf 216 *g* Schwefelkalzium wirken lassen?

Digitized by Google

102. Wieviel *g* Schwefelwasserstoff werden auf diesem Wege gewonnen?

103. Welchen Raum füllt der gewonnene Schwefelwasserstoff, wenn 1 *l* davon (bei 766 *mm* Luftdruck) 1,542 *g* wiegt?

104. Wieviel wiegt der in einem Zimmer von 5,5 *m* Länge, 4,8 *m* Breite und 4 *m* Höhe enthaltene Sauerstoff, und wieviel der darin enthaltene Stickstoff, wenn das Gewicht von 1 *l* atmosphärischer Luft zu 1,3 *g* angenommen wird, während das Gewichtsverhältnis von Sauerstoff zu Stickstoff in der atmosphärischen Luft den Wert 24 : 79 hat?

105. Wie verteilt sich die atmosphärische Luft dem Raume nach auf Sauerstoff und Stickstoff, wenn die Gewichte gleicher Volumina beider Gase sich wie 8 : 7 verhalten?

106. Wieviel reines Silber steckt in 17 Einmarkstücken bei einem Gewicht des Einmarkstücks von 5,556 *g* und einem Mischungsverhältnis von 9 : 1?

107. Wieviel reines Gold steckt in 11 Zwanzigmarkstücken, wenn das Mischungsverhältnis gesetzlich 9 : 1 beträgt und ein Zehnmarkstück 3,584 *g* wiegt?

108. 109. Das gewöhnliche Gebrauchssilber ist 750haltig (12lötig). Wieviel reines Silber steckt in einem Teelöffel von 22 *g*, wieviel in einem Suppenlöffel von 52 *g* Gewicht?

110. 111. Goldgeräte pflegen 585haltig (14karätig) zu sein. Wieviel reines Gold ist in einer Uhrkette von 34 *g*, wieviel in einer von 40,5 *g* Gewicht enthalten? Wie groß ist der Goldwert solcher Kette, das *kg* Gold zu 2800 *M* berechnet?

XI. Potenzen mit ganzen positiven Exponenten.

A. Theorie.

1. Schon im Abschnitt VI, Nr. 8. war der Begriff der Potenz eingeführt worden. Danach war die Potenz von a^n das Produkt von n Faktoren, die sämtlich den Wert a besitzen, a heißt dabei die Basis oder Grundzahl, n der Exponent der Potenz.*) Die zweite Potenz wird, weil sie bei der Bestimmung der Fläche eines Quadrats mittels seiner Kantenlänge auftritt, auch als Quadrat, die dritte Potenz, die bei Bestimmung des Würfelinhalts in Betracht kommt, als Kubus bezeichnet. a^n wird gelesen a zur n^{ten} (Potenz) oder a hoch n; a^2 meistens „a zum Quadrat" oder auch „a Quadrat", a^3 häufig „a zum Kubus".

*) Der Exponent, der rechts oben zur Basis gesetzt wird, ist von dem rechts unten stehenden Index wohl zu unterscheiden. Ein Index ist ein äußerliches Zeichen, das etwa einer Hausnummer zu vergleichen ist und für den Wert der von ihm bezeichneten Größe keinerlei Bedeutung besitzt. Dagegen hängt der Wert einer Potenz wesentlich von der Größe des Exponenten ab.

Digitized by Google

2. Schreibt man statt a^n das Produkt $1 \cdot a^n$, so kann man die n. Potenz von a als das Ergebnis der $n$mal hintereinander ausgeführten Multiplikation der Zahl Eins mit a ansehen. Daraus folgt, daß die erste Potenz von a den Wert a haben muß. Jede Zahl kann als die erste Potenz von sich selbst angesehen werden. (Vgl. Abschnitt VI A, Nr. 8.)

Führt man gar keine Multiplikation mit a aus, so bleibt die Zahl Eins allein übrig, d. h.

$$a^0 = 1.$$

Die nullte Potenz jeder Grundzahl a hat den Wert Eins.

Welche Bedeutung der Potenz für andere Werte des Exponenten (negative und gebrochene Zahlen) beizumessen ist, wird späterhin erörtert werden.

3. Die n. Potenz einer Zahl bilden heißt diese Zahl mit n **potenzieren** oder in die n. Potenz erheben. Für die Erhebung in die 2. und die 3. Potenz bedient man sich auch der Ausdrücke **quadrieren** und **kubieren** (ins Quadrat oder zum Kubus erheben).

Das Potenzieren ist eine neue Fundamental-Operation, die gegenüber der Multiplikation und Division wieder eine höhere Stufe einnimmt. Beim Potenzieren kommen sowohl die Basis, als der Exponent in Betracht, beide spielen ganz verschiedene Rollen und lassen sich also nicht, wie Multiplikand und Multiplikator, miteinander vertauschen. $2^3 = 8$, $3^2 = 9$; $2^5 = 32$, $5^2 = 25$. Nur in einem Falle findet eine zufällige Übereinstimmung statt, es ist $2^4 = 4^2 = 16$.

4. Durch fortwährende Multiplikation einer positiven Zahl mit sich selbst entsteht wieder eine positive Zahl. Hat man eine negative Zahl zu potenzieren, so hat man, wenn der Exponent eine gerade Zahl ist, eine gerade Anzahl negativer Faktoren, erhält also ein positives Ergebnis, bei ungeradem Exponenten ein negatives. Es gelten also, wenn man die Potenzen je nach der Art ihres Exponenten als gerade und ungerade unterscheidet, die Sätze:

1) Alle Potenzen positiver Größen sind selbst positive Größen.

2) Gerade Potenzen negativer Größen haben einen positiven, ungerade einen negativen Wert.

5. Über die Rechnung mit Potenzen lassen sich folgende Formeln aufstellen:

I.	$a^5 \cdot a^3 = a^8$	$a^n \cdot a^p = a^{n+p}$
II.	$\frac{a^8}{a^5} = a^3$	$\frac{a^n}{a^p} = a^{n-p}$ für $n > p$
	$\frac{a^5}{a^8} = \frac{1}{a^3}$	$\frac{a^n}{a^p} = \frac{1}{a^{p-n}}$ für $n < p$
III.	$a^3 \cdot b^3 = (ab)^3$	$a^n \cdot b^n = (ab)^n$
IV.	$\frac{a^3}{b^3} = \left(\frac{a}{b}\right)^3$	$\frac{a^n}{b^n} = \left(\frac{a}{b}\right)^n$
V.	$(a^3)^2 = a^6$	$(a^p)^n = (a^n)^p = a^{np}$.

Digitized by Google

6. Diese Formeln enthalten folgende Sätze:

I. Die Multiplikation von Potenzen derselben Basis kann durch die Addition ihrer Exponenten ersetzt werden.

II. Die Division von Potenzen derselben Basis kann durch Subtraktion der Exponenten voneinander ersetzt werden.

III. Hat man Potenzen mit demselben Exponenten (von derselben Höhe) miteinander zu multiplizieren, so kann man die Multiplikation an den Grundzahlen vornehmen. Ist ein Produkt zu potenzieren, so kann man statt dessen die einzelnen Faktoren potenzieren.

IV. Die Division von Potenzen derselben Höhe kann man statt an diesen selbst an ihren Grundzahlen vornehmen. — Die Potenzierung eines Quotienten kann durch gleichzeitige Potenzierung des Zählers und des Nenners ersetzt werden.

V. Zwei aufeinanderfolgende Potenzierungen können in eine einzige Potenzierung mit dem Produkt der Exponenten zusammengefaßt, die Potenzierung mit einem Produkt in mehrere aufeinanderfolgende Potenzierungen aufgelöst werden. Bei mehreren Potenzierungen hintereinander ist die Reihenfolge beliebig.

7. Die Beweise dieser Sätze sind sehr einfach.

I. In dem Produkt $a^3 \cdot a^2$ steckt der Faktor a offenbar fünfmal, in $a^n \cdot a^p$ steckt er $(n+p)$mal.

II. Bei dem Quotienten $\frac{a^5}{a^3}$ heben sich 5 Faktoren a im Nenner gegen 5 Faktoren a im Zähler, es bleiben im Zähler 3 Faktoren a, d. h. a^3 übrig.

Bei dem Quotienten $\frac{a^5}{a^8}$ liegt die Sache entgegengesetzt.

III. Statt $a \cdot a \cdot a \cdot b \cdot b \cdot b$ kann man schreiben $ab \cdot ab \cdot ab$, d. h. $(ab)^3$.

IV. $$\frac{a^3}{b^3} = \frac{a \cdot a \cdot a}{b \cdot b \cdot b} = \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) \cdot \left(\frac{a}{b}\right) = \left(\frac{a}{b}\right)^3.$$

V. $$(a^3)^2 = (a \cdot a \cdot a)\ (a \cdot a \cdot a) = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a$$
$$= (a \cdot a) \cdot (a \cdot a) \cdot (a \cdot a).$$

8. Auch folgende oft gebrauchte Formeln sind zu beweisen und zu merken (vgl. hierzu Abschnitt VIA, Nr. 9.):

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$
$$(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$$
$$(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5.$$

9. Ferner gilt die Gleichung (Abschnitt VIA, Nr. 9.):

$$(a-b)(a+b) = a^2 - b^2.$$

Entsprechend ist, wie durch Ausführung der Multiplikation leicht zu zeigen ist,

Digitized by Google

$(a-b)(a^2+ab+b^2) = a^3-b^3$
$(a-b)(a^3+a^2b+ab^2+b^3) = a^4-b^4$
$\vdots$
$(a-b)(a^n+a^{n-1}b+a^{n-2}\cdot b^2+\dots a^2b^{n-2}+ab^{n-1}+b^n) = a^{n+1}-b^{n+1}.$

10. Ebenso gelten die Gleichungen, die entsprechend bewiesen werden:

$(a+b)(a^2-ab+b^2) = a^3+b^3$
$(a+b)(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4) = a^5+b^5$ usw.

Aus welchen der vorher (Nr. 9.) aufgestellten Gleichungen lassen sich die eben aufgeführten Gleichungen ableiten? Wodurch erfolgt die Herleitung? Was erhält man, wenn man die anderen Gleichungen entsprechend behandelt?

Wie lassen sich alle diese Formeln kurz in einem einzigen Satze ausdrücken?

11. Der zweite Grundsatz in Abschnitt I, 5. führt hier zu der Folgerung: Gleiches mit Gleichem potenziert gibt Gleiches.

B. Aufgaben.

1.	2^3, 2^4, 2^5,	2^6, 2^7, 2^{10},	3^1, 3^2, 3^3,	3^4, 3^6, 3^{10}
2.	$3^5 - 5^3$,	$2^7 - 7^2$,	$2^6 - 8^2$,	$4^5 - 5^4$
3.	$4^4 - 3^3$	$5^6 - 6^5$	$4^6 - 5^5$	$3^{12} - 9^6$
4.	$4 \cdot 3^5$	$5^4 \cdot 2^5$	$5 \cdot 2^7 - 2 \cdot 5^3$	$2 \cdot 4^5 - 3 \cdot 5^4$
5.	$(\frac{3}{4})^8$*)	$(\frac{5}{6})^5$	$(1\frac{1}{4})^5$	$(1\frac{1}{7})^7$
6.	$0{,}938^4$	$0{,}8937^3$	$1{,}3608^4$	$1{,}2037^5$
7.	$\frac{7^3-3^4}{3^5-5^3}$	$\frac{4^5-8^3}{8^2-2^5}$	$\frac{9^3-7^3}{7^3-9^2}$	$\frac{8^4-4^6}{9^7-7^9}$

8. $(-a)^5$, $(-b)^7$, $(-x)^8$, $(-y)^4$, $a^3+(-a)^3$, $x^6+(-x)^6$
9. $(+3)^4+(-4)^3$, $5^3+(-5)^3$, $(-2)^6+(-4)^3$, $7^3-(-2)^8$
10. $(a-b)^4+(b-a)^4$ $\quad$ $(a-b)^5+(b-a)^5$
11. $(x-y)^6-(y-x)^6$ $\quad$ $(a-x)^7-(x-a)^7$
12. $3a^2+2a^3-5a^2$ $\quad$ $5a^m+3a^n-4a^m$
13. $7x^5-3y^5+x^5$ $\quad$ $8x^4-7x^4-x^5$
14. $5a^2b+ab^2-4a^2b$ $\quad$ $8ax^3-5ax^3+3a^2x^2$

---

*) Wo es nicht anders bemerkt ist, soll die Rechnung bis auf 5 Dezimalstellen ausgeführt werden. Um der 5. Stelle sicher zu sein, muß man die 6. Stelle noch mit in die Rechnung hineinziehen.

Digitized by Google

15. $3xy^4 - 2xy^3 - xy^4$ $9ax^n - 8ax^n + x^n$
16. $\frac{1}{3}ab^3 + \frac{1}{6}ab^3 - \frac{1}{2}ab^2$ $\frac{2}{3}ax^4 - \frac{1}{6}ax^4 + \frac{1}{2}ax^4$
17. $0{,}7x^5 - x^4 + 0{,}3x^5$ $\frac{3}{4}x^7 + x^6 + 0{,}25x^7$

---

18. $a^3 \cdot a^2$ $b^7 \cdot b^5$ $x^9 \cdot x$ $y \cdot y^5$
19. $a^3 \cdot a^n$ $a^n \cdot a$ $b^{x-1} \cdot b^x$ $x^3 \cdot x^{n-3}$
20. $c^x \cdot c^{2x}$ $d^{x+1} \cdot d^{x-1}$ $p^n \cdot p^{5-n}$ $q^{3-x} \cdot q^x$
21. $a^{2+x} \cdot a^{3-x}$ $b^{x+7} \cdot b^{5-x}$ $c^{n-x} \cdot c^{5-n}$ $d^{x-1} \cdot d$
22. $a^{n+x} \cdot a^{n-x}$ $b^{3+n} \cdot b^{n-4}$ $c^{5-x} \cdot c^{x+n}$ $d^{2-x} \cdot d^{x-1}$
23. $(-a)^5 \cdot a^2$ $a^3 \cdot (-a)^4$ $(+x)^3 \cdot (-x)^6$ $(-x)^5 \cdot (-x)^7$
24. $(+a)^n \cdot (-a)^{2n}$, $(-a)^n \cdot (-a)^n$, $(-a)^{2n+1} \cdot a$, $(-a)^{n+x} \cdot (-a)^{n-x}$
25. $2a^5 \cdot 5a$ $5b^7 \cdot 4b^2$ $3x^2 \cdot 2x^3$ $4x \cdot 7x^4$
26. $3a^2 \cdot 3b$ $6a \cdot 7b^5$ $ab \cdot 5b^3$ $3a^2x \cdot 7a^4$
27. $a^2b \cdot ab^3$ $b^3c \cdot 2c^4$ $ax^3 \cdot 3a^4x$ $2a^4y \cdot 4y^3$
28. $\frac{1}{2}a^2 \cdot \frac{1}{3}b^3$ $\frac{1}{3}c^3 \cdot \frac{3}{4}c^4$ $1\frac{1}{2}x \cdot \frac{2}{3}x^{n-1}$ $1\frac{3}{4}x^4 \cdot 8xy^2$
29. $\frac{1}{2}ab^3 \cdot 1\frac{1}{3}a^4$ $4a^2x \cdot 1\frac{1}{4}x^3$ $6a^3x \cdot \frac{2}{3}a^4x$ $\frac{3}{5}x^3 \cdot 3\frac{1}{3}x^2y^3$
30. $2a^2 \cdot 3b^3 \cdot 5c^5 \cdot \frac{2}{5}ab^2c$ $8x^2y \cdot \frac{3}{4}ax^3 \cdot 2\frac{1}{2}ay^{n-1}$
31. $\frac{1}{2}ab^2 \cdot \frac{3}{4}ax^3 \cdot 5\frac{1}{3}a^{n-2} \cdot x^{n-3}$ $\frac{2}{3}a^3x \cdot \frac{5}{6}ax^{n-1} \cdot 1{,}8a^{n-4}$
32. $a^{n-p-3} \cdot a^{3p-5n+3} \cdot a^{4n-p}$ $x^{3n-5} \cdot 2x^{m-4n+7} \cdot 5x^{n-2}$
33. $3x^2(a-b)^{n-1} \cdot 5x(a-b)$ $5a^2b\,(a-b)^3 \cdot 7b^4\,(a-b)^4$
34. $5x\,(a-y)^3 \cdot 3x \cdot (y-a)^4$ $7a\,(a-x)^3 \cdot 3b\,(x-a)^2$
35. $\frac{2}{3}a(a-b)^{n-3} \cdot \frac{3}{4}x(b-a)^3$ $1\frac{1}{2}x\,(x-y)^{2n-1} \cdot 3\frac{1}{3}(y-x)^{2n+1}$
36. $\frac{2a^3b}{7} \cdot \frac{5a^4b^6}{4}$, $\frac{5x^4}{4} \cdot \frac{8x^5}{5}$, $\frac{3a^{m-n}b^{n-1}}{2m-5n} \cdot \frac{8a^{m-4n} \cdot b^{5m+1}}{5m+n}$
37. $2ab^2\,(a-b)^4 \cdot 1\frac{1}{3}a^2x\,(a-b)^{n-3} \cdot 1\frac{1}{2}bx^2\,(a-b)^{n-1}$
38. $3\frac{3}{4}xy^3\,(x-y)^{n+3} \cdot 1\frac{3}{5}x^3\,(x-y)^{n-4} \cdot 1\frac{1}{3}\,(x-y)y$
39 $(-3a^2bx) \cdot (+1\frac{1}{2}ab^3x^4) \cdot (-1\frac{1}{3}a^3bx)$
40. $(+2\frac{1}{2}a^3b^4x) \cdot (-3\frac{1}{3}a^2b^5x^n) \cdot 1\frac{1}{5}ab\,(-x)^{2n-1}$
41. $2\frac{1}{4}a^2\,(-x)^3 \cdot 1\frac{1}{3}a^4\,(-x)^6 \cdot 1\frac{2}{3}a^{n-6} \cdot (-x)^{2n-9}$
42. $2(a-b)^{n-3} \cdot 3x\,(a-b)^{n+1} \cdot 1\frac{1}{2}ax\,(b-a)^2$
43. $5(x-y)^{n-2} \cdot 1\frac{4}{5}\,(y-x)^{7-2n} \cdot \frac{2}{3}\,(y-x)^{2n-5}$

Digitized by Google

44. $\frac{a^7}{a^3}, \frac{b^9}{b^5}$ $\frac{c^6}{c^5}, \frac{a^6}{a}$ $\frac{x^n}{x^5}, \frac{a^x}{a}$ $\frac{b^3}{b^9}, \frac{c}{c^6}$

45. $\frac{a^3}{2a}, \frac{3b^7}{5b^3}$ $\frac{6c^2}{3c^4}, \frac{8x}{x^5}$ $\frac{a^x}{ax}, \frac{7a^n}{na^7}$ $\frac{9x^{10}}{10x^9}, \frac{8x^7}{7x^5}$

46. $a^5 : a$ $a^3 : a^2$ $x^7 : x^4$ $y^3 : y^5$

47. $b^n : b$ $c : c^4$ $x^3 : x^7$ $x^7 : x^3$

48. $3a^{n+1} : 3a$ $6x^{n+7} : 3x^n$ $5b^{x+1} : 2b^x$ $8p^n : 4q^x$

49. $\frac{a^n+1}{a}, \frac{a^n+1}{a^n}, \frac{a^n}{a^{n-1}}, \frac{a^{n+1}}{a^{n-1}}, \frac{b^x}{b^{x+1}}, \frac{b^{2x}}{b^{x+1}}, \frac{b^{2x}}{b^{x-1}}, \frac{b^x}{b^{2x+1}}$

50. $\frac{c^{x+3}}{c^{x+1}}, \frac{c^{x+1}}{c^{x-2}}, \frac{c^{3+x}}{c^{3-x}}, \frac{c^{3x}}{c^{x-3}}, \frac{x^{n+5}}{x^{n+6}}, \frac{x^{n-4}}{x^{n-5}}, \frac{x^n}{x^{n-2}}, \frac{x^{n-1}}{x^{n+1}}$

51. $\frac{a^{n+x}}{a^{n-1}}, \frac{a^{x-1}}{a^{x+n}}, \frac{a^{2x}}{a^{n-x}}, \frac{a^{n+x}}{a^{2x}}, \frac{c^{n-1}}{c^{x+n}}, \frac{c^{3x}}{c^{2x-n}}, \frac{c^{n+1}}{c^{n+x}}, \frac{c^{2x-1}}{c^{3x-5}}$

52. $\frac{a^5b^7}{a^2b^4}, \frac{a^3x^5}{ax^4}, \frac{x^7y^m}{x^6y^n}, \frac{b^ny^3}{b^3y}, \frac{a^nx}{ax^n}, \frac{a^4b^3}{a^3b^4}, \frac{a^7b^7}{a^5b^5}, \frac{b^3x^3}{b^4x^4}$

53. $\frac{a^{n+1} \cdot b^x}{a^n \cdot b^{x-1}}, \frac{a^{n-1} \cdot b^{n-2}}{a^{n-3} \cdot b^{n-4}}, \frac{a^{n+x} \cdot b^{n-x}}{a^{n-x} \cdot b^{n+x}}, \frac{x^{2n-1} \cdot y^{3n+2}}{x^{n+1} \cdot y^{2n-3}}$

54. $\frac{a^2-b^2}{a^3+b^3}, \frac{a^7-x^5}{35ax}, \frac{a^n+b^x}{a^x+b^n}, \frac{a^n \cdot b^{x+n}}{a^{n+x} \cdot b^{n-x}}$

55. $\frac{a^{x+1} \cdot (x-1)^4}{a^{x-1} \cdot (1-x)^4}, \frac{b^n (b-1)^4}{b^{n-1} (1-b)^3}, \frac{a^5 (a+x)^4}{a^4 (a-x)^5}, \frac{(x+y)^2 (x-y)^4}{(y+x)^2 (y-x)^4}$

56. $\frac{3ab^2}{5x^2y} \cdot \frac{10a^4x^2}{9b^3y^4}, \frac{2a^2x}{3b^4y^4} \cdot \frac{5b^5x^3}{4a^4y}, \frac{3a^3b^3}{8x^2y^3} : \frac{9a^2b^2}{4x^3y}, \frac{3a^5x}{5b^3y} : \frac{18a^4x}{50b^2y}$

57. $\frac{3a^2b}{5ax^3} \cdot \frac{7a^2c}{6by^3} \cdot \frac{10(x+y)^2}{7a^{n+4} \cdot c^{n+1}}, \frac{5ax^3}{2by^3} \cdot \frac{3b^n(x-1)^2}{10a^n(x+1)} \cdot \frac{8a^{n+1}(1+x)^2}{3b^{n-1}(1-x)^3}$

58. $\frac{24a^2bx^{n+1}}{25c^3y^2z^{n-1}} : \frac{36ab^2x^{n-1}}{35c^3y^4z^{n-2}}, \frac{18ab^3c^{n+2}}{35x^2y^3z^n} : \frac{27a^3bc^{n-1}}{70x^3y^3z^{n-1}}$

---

59. $(abc)^5$ $(3ax)^2$ $(4abx)^3$ $4abx^n$

60. $(3xy)^3$ $3xy^3$ $(2x+y)^3$ $2x+y^3$

61. $(\frac{1}{2}ax)^3$ $(\frac{2}{3}xy)^4$ $(\frac{3}{4}xy)^2$ $\frac{3}{4}xy^2$

62. $\left(\frac{2a}{b}\right)^3$ $\frac{2a^3}{b}$ $\left(\frac{2a}{3x}\right)^2$ $\left(\frac{3a}{5x}\right)^3$

63. $\left(\frac{3ax}{2bx}\right)^2$ $\frac{3ax^3}{2bx^2}$ $\left(\frac{7ab}{5ax}\right)^3$ $\frac{7ab^3}{5ax^3}$

64. $2^3 \cdot 35^3$ $4^2 \cdot 15^2$ $8^3 \cdot 125^3$ $2^4 \cdot 5^4$

Digitized by Google

65. $\left(\frac{2}{3}\right)^3 \cdot \left(\frac{3}{4}\right)^3$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^2$ $\left(\frac{1}{3}\right)^n \cdot 3^n$ $\left(\frac{6}{5}\right)^x \cdot \left(\frac{5}{8}\right)^x$

66. $(1\frac{3}{4})^2 \cdot (1\frac{1}{7})^2$ $(0{,}2)^3 \cdot (2\frac{1}{2})^3$ $(3\frac{1}{3})^4 \cdot (1{,}5)^4$ $(1\frac{1}{4})^n \cdot (0{,}8)^n$

67. $\frac{15^3}{3^6}$, $\frac{48^5}{72^5}$ $\frac{39^4}{65^4}$, $\frac{96^3}{32^3}$ $\frac{36^3}{24^3}$, $\frac{48^3}{36^4}$ $\frac{64^4}{32^6}$, $\frac{27^5}{81^4}$

68. $(a^2)^7$, $(x^n)^3$, $(b^3)^3$, $(c^4)^5$ $(3^2)^3$, 3^{2^3}, $(4^2)^3$, $(2^3)^2$, 2^{3^2}, 2^{2^3}

69. $(a^n-1)^2$ $(x^3)^n+1$ $(a^n)^n-1$ $(x^n+1)^n-1$

70. $(a^3b)^2$ $\left(\frac{a^3}{3b}\right)^2$ $(3ab^2)^4$ $\left(\frac{2a^2x}{3by^3}\right)^3$

71. $(-a^3)^{2n-1}$, $(-a^n-1)^2$ $(-x^5)^{2n+4}$ $(-x^6)^{2n-1}$

72. $\left(\frac{9a^2b}{5x^3y}\right)^2 \cdot \left(\frac{5a^3x^2}{3b^2y}\right)^3 \cdot \left(\frac{b^2y^2}{5a^6}\right)^2$ $\left(\frac{2a^2x}{3by^3}\right)^3 \cdot \left(\frac{4b^2x^5}{3a^3y^3}\right)^4 \cdot \left(\frac{9ay^6}{8b^3x^3}\right)^3$

73. $\left(\frac{3a^2b^3}{5x^2y^6}\right)^3 \cdot \left(\frac{2ax^2}{3b^2y}\right)^3 : \left(\frac{4a^4}{5b^3y^6}\right)^2$ $\left(\frac{15ax^3}{8b^2y}\right)^2 \cdot \left(\frac{2ay^5}{3bx^3}\right)^3 : \left(\frac{25a^2y^5}{12b^4x}\right)^2$

74. $\frac{1}{x^4}+\frac{1}{x^3}$ $\frac{1}{x^3}+\frac{1}{x}$ $\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^n-1}$ $\frac{1}{x^n}+\frac{1}{x^n-7}$

75. $\frac{1-x}{x^3}+\frac{1}{x^2}$ $\frac{1}{x^3}-\frac{x^3-1}{x^5}$ $\frac{a-x^2}{x^4}+\frac{1}{x^2}$ $\frac{1-x}{x^n}+\frac{1}{x^n-1}$

76. $\frac{3}{x^n}+\frac{4}{x^n-1}+\frac{5}{x^n-2}$ $\frac{a}{x^n-u}+\frac{b}{x^n-v}+\frac{c}{x^n}$

77. $\frac{x^4}{(1-x)^4}+\frac{2x^5-x^4}{(1-x)^5}+\frac{x^6-x^5+x^4}{(1-x)^6}$

78. $\frac{x^7}{(x+y)^7}-\frac{2x^6}{(x+y)^6}+\frac{x^5}{(x+y)^5}-\frac{x^5y^2}{(x+y)^7}$

---

79. $(a^2b-3ab^3)\cdot a^3b^4$ $(x^7y^3-x^3y^5)\ x^2y^3$

80. $\left(\frac{a}{x^7}+\frac{b}{x^6}+\frac{c}{x^3}\right)\cdot x^7$ $\left(\frac{3}{x^4}-\frac{5}{x^3}+\frac{1}{x}\right)\cdot x^4$

81. $(a^{n+1}-a^{n-1})\cdot a^{x-n}$ $(x^n-x^{n-1})\cdot x^{8-n}$

82. $(8x^5-6x^7+2x):2x^3$ $(ax^5+bx^3+cx):x^2$

83. $(9a^5b^3-12a^3b^5):3a^4b^4$ $(8a^7b^4-6a^4b^7):4a^4b^4$

84. $(a^{x-1}b^{n+1}+a^xb^n+a^{x+1}b^{n-1})\cdot a^{n-x}b^{y-n}$

85. $(a^{x+n}b^{y+n}+a^xb^y+a^{x-n}b^{y-n})\cdot a^{p-x}b^{p-y}$

86. $(a^{x-1}b^n+a^xb^{n-1}+a^{x+1}b^{n-2}):a^{x-1}b^{n-2}$

87. $(a^xb^{x+y}+a^yb^{x-y}+a^{x-y}b^y):a^{x-y}b^{x-y}$

88. $(a^5+a^3)(a^7-a^5)$ $(x^7-x^4)(x^5+x)$

89. $(p^5+p)(p^5-p)$ $(a^3+b^2)(a^3-b^2)$

90. $(a^3+b^5)(a^2-b^2)$ $(a^3+a^2)(b^3-b^2)$

Digitized by Google

91. $(p^m + q^n)(p^m - q^n)$ $(p^m + p^n)(q^m - q^n)$

92. $(a^3 + a^2b)(b^3 - ab^2)$ $(x^5 - x^2y^2)(x^3y^2 + y^4)$

93. $(x^2 - x)^2$ $(x^3 - 2x)^2$ $(x^3 - 1)^2$ $(2 - x^5)^2$

94. $(x^3 - x^5)^2$ $(x^6 - x)^2$ $(a^x - a^4)^2$ $(x^{n-1} - x)^2$

95. $\left(x^3 + \frac{1}{x^3}\right)^2$ $\left(\frac{a^3}{b^2} + \frac{b^3}{a^2}\right)^2$ $\left(ax^3 - \frac{b}{x^3}\right)^2$ $\left(\frac{3a^2}{4b^3} - \frac{2b^3}{3a^2}\right)^2$

96. $(3x^2 - 2x + 1)^2$ $(5x^2 - 3x + 4)^2$

96_1. $(4u - 3v + 2w)^2$ $(ab + bc + ac)^2$

96_2. $(a^2 + ab + b^2)^2$ $(a^2 - ab + b^2)^2$

97. $(x^3 + x^2 + x + 1)^2$ $(x^3 - 2x^2 + 3x - 4)^2$

98. $(u + v)^3$ $(a - b)^3$ $(1 + x)^3$ $(1 - x)^3$

99. $(x - 1)^3$ $(x^2 - 1)^3$ $(2 + \frac{1}{2}a)^3$ $(3 - \frac{1}{3}x^2)^3$

99_1. $(2a - 3b)^3$ $\left(\frac{a}{b} - \frac{b}{a}\right)^3$ $\left(\frac{u}{2} - \frac{4}{u}\right)^3$ $\left(\frac{u}{v} + 5\frac{v}{u}\right)^3$

100. $(1 + x)^3 + (1 - x)^3$ $(x + 1)^3 + (x - 1)^3$

101. $(3 + x)^3 + (3 - x)^3$ $(2x + 3)^3 - (2x - 3)^3$

102. $(x + y)^4$ $(1 + x)^4$ $(x - y)^4$ $(1 - x)^4$

103. $(2 + x)^4$ $(2x - 3)^4$ $(3 - x)^4$ $(2 + 3x)^4$

103_1. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^4$ $\left(2x - \frac{1}{2x}\right)^4$ $\left(\frac{a}{b} + 2\frac{b}{a}\right)^4$ $\left(3a - \frac{2}{a}\right)^4$

104. $(1 + x)^4 + (1 - x)^4$ $(1 + x)^4 - (1 - x)^4$

104_1. $(3x + 2)^4 + (3x - 2)^4$ $(2x + 3)^4 - (2x - 3)^4$

104_2. $(2x + 3)^4 + (3x - 2)^4$ $(3x + 2)^4 - (2x - 3)^4$

105. $(x + y)^5$ $(1 + x)^5$ $(x - y)^5$ $(1 - x)^5$

106. $(2 + x)^5$ $(3 - x)^5$ $(2x + 3)^5$ $(2 - 3x)^5$

107. $(2 + x)^5 + (2 - x)^5$ $(3 + x)^5 - (3 - x)^5$

108. $(4a^6 - 6a^3b^2 + 9b^4) \cdot (2a^3 + 3b^2)$

109. $(25a^8 + 20a^4b^5 + 16b^{10}) \cdot (5a^4 - 4b^5)$

110. $(a^6 + 2a^4b + 4a^2b^3 + 8b^5) \cdot (a^2 - 2b)$

111. $(x^6 + x^4 + x^2 + 1) \cdot (x^2y - y)$

112. $\left(x^9 - x^7 + x^5 - x^3 + x - \frac{1}{x}\right) \cdot (x^3 + x)$

113. $(3a^2 - 4ab^2 + 2b^4) \cdot (3a^2 + 4ab^2 + 2b^4)$

114. $(2a^4 - 6a^2b^2 + 9b^4)(2a^4 + 6a^2b^2 + 9b^4)$

115. $\left(x - y + \frac{y^2}{x}\right)$ $\left(x + y + \frac{x^2}{y}\right)$

Digitized by Google

116. $\left(x^3 - 2xy + 2y^2 - \frac{y^3}{x}\right) \left(\frac{x^3}{y} + 2x^2 + 2xy + y^2\right)$

117. $(\frac{2}{3}a^4 - \frac{1}{2}a^2b + \frac{3}{4}b^2) \cdot (\frac{1}{3}a^2 + \frac{1}{2}b)$

118. $(\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab^3 + \frac{1}{3}b^6) \cdot (\frac{3}{4}a^2 + \frac{1}{2}ab^3 + \frac{1}{3}b^6)$

118_1. $\left(\frac{a^2c^3}{4b^2} + \frac{2c}{3b} - \frac{4}{a^2c^3}\right) \left(\frac{abc}{3} + \frac{3b^2}{ac^3}\right)$

118_2. $\left(\frac{8}{3a^3} + \frac{5a^2}{3} - \frac{4}{5}\right) \left(\frac{a}{3} - \frac{5}{8a^2} - \frac{6}{5a}\right)$

118_3. $\left(\frac{a^4}{8b^3} - \frac{a^2}{4b} + \frac{5b^2}{6a}\right) \left(\frac{4a^2}{3b^3} + \frac{8}{5b} - \frac{6b^2}{4a^3}\right)$

119. $(a - b)(a^2 - ab + b^2)(a + b)(a^2 + ab + b^2)$

120. $(ab^2 + ax^3 - b^2y - x^3y)(ab^2 - ax^3 + b^2y - x^3y)$

121. $(3a^2b^5 - 4a^3b^4 - 6a^4b^3 + 8a^5b^2)$
$(3a^2b^5 + 4a^3b^4 + 6a^4b^3 + 8a^5b^2)$

121_1. $(x^3 + x - 1)(2x^2 - 3x + 1)(x - 3)$

121_2. $(x + 3)(x - 3)(x - 5)(x + 6)$

121_3. $(2a^3b + 2ab^3 + a^4 + b^4 + a^2b^2)(a^2 + b^2 - ab)$

122. $(a^{2m} - a^{m+n} + a^{2n}) \cdot (a^m + a^n)$

123. $(a^{2x} - a^{x+1} + a^2) \cdot (a^{n+x} + a^{n+1})$

124. $(x^{m+2n} + x^{m+n} + x^m + x^{m-n})(x^{3n-m} - x^{2n-m})$

125. $(a^{n+2} - a^{n+1} + a^n - a^{n-1} + a^{n-2})(a^{8-n} + a^{7-n})$

126. $(6a^6 + a^4b + 25b^5) : (3a^2 + 5b)$

127. $(15a^9 - 8a^6b + 8b^3) : (3a^3 + 2b)$

128. $(9a^4 - a^2b^4 + 16b^8) : (3a^2 - 5ab^2 + 4b^4)$

129. $(8a^6 - 27b^9) : (2a^2 - 3b^3)$ $(27a^6 + 64b^{15}) : (3a^2 + 4b^5)$

130. $(a^7b - ab^7) : (a^3b - ab^3)$ $(x^8y^2 + x^2y^8) : (x^3y + xy^3)$

131. $\left(\frac{1}{3}a^6 + \frac{5}{72}a^2b^2 + \frac{5}{48}b^3 + \frac{b^4}{2a^2}\right) : \left(\frac{2}{3}a^3 + ab + \frac{3b^2}{4a}\right)$

132. $\left(\frac{1}{2}a^3 - \frac{1}{12}a^2b^2 + \frac{17}{24}ab^4 + \frac{3b^6}{8a}\right) : (\frac{3}{4}a^2 - \frac{1}{2}ab^2 + \frac{3}{4}b^4)$

132_1. $(3{,}78x^4 + 1{,}87x^3 - 8{,}67x^2 - 0{,}43x + 3{,}45)$
$: (2{,}7x^2 - 0{,}4x - 1{,}5)$

132_2. $(1{,}2x^4 - 7{,}57x^3 + 2{,}98x^2 + 8{,}09x - 4{,}94)$
$: (0{,}5x^2 - 3{,}3x + 2{,}6)$

132_3. $(3{,}08x^4 - 7{,}32x^3 + 5{,}09x^2 - 0{,}92x - 0{,}09)$
$: (1{,}4x^2 - 2{,}5x + 0{,}9)$

Digitized by Google

132_4. $(15{,}96a^4 - 23{,}04a^3 + 11{,}35a^2 - 1{,}61a - 1{,}36) : (4{,}2a^2 - 3{,}3a + 1{,}7)$

132_5. $(4\frac{4}{15}x^4 - 11\frac{13}{45}x^3 + 5x^2 - 9\frac{1}{8}x - 8\frac{7}{16}) : (2\frac{2}{3}x^2 - 1\frac{1}{2}x + 3\frac{3}{4})$

133. $(a^8 - a^6b^2 - a^2b^6 + b^8) : (a^4 + a^3b - ab^3 - b^4)$

133_1. $(25a^4 + 31a^2b^4 + 16b^8) : (5a^2 - 3ab^2 + 4b^4)$

133_2. $(49x^4 + 17x^2y^4 + 9y^8) : (7x^2 + 5xy^2 + 3y^4)$

133_3. $(64a^8 - a^4x^2 + 9x^4) : (8a^4 - 7a^2x + 3x^2)$

133_4. $(16x^8 - 41x^4y^2 + 25y^4) : (4x^4 + 9x^2y + 5y^2)$

133_5. $(25a^9b + 61a^5b^5 + 49ab^9) : (5a^5 + 3a^3b + 7ab^3)$

133_6. $(81x^8 + 64y^8) : (9x^4 + 12x^2y^2 + 8y^4)$

133_7. $(64a^8 + 81b^4) : (8a^4 - 12a^2b + 9b^2)$

133_8. $(4a^8 + b^8) : (2a^4 - 2a^2b^2 + b^4)$

133_9. $(x^8 + 4y^4) : (x^4 + 2x^2y + 2y^2)$

133_{10}. $(64a^4 + x^8) : (8a^2 - 4ax^2 + x^4)$

133_{11}. $(x^4 + 64y^8) : (x^2 + 4xy^2 + 8y^4)$

133_{12}. $(81x^8 + 4y^4) : (9x^4 + 6x^2y + 2y^2)$

133_{13}. $(4a^4 + 81b^8) : (2a^2 - 6ab^2 + 9b^4)$

134. $\frac{x^3y^3 - x^2y^3}{x - y}$ $\quad \frac{x^4y^3 - x^3y^4}{x - y}$ $\quad \frac{a^3b - ab^3}{a - b}$ $\quad \frac{x^3y - xy^3}{x + y}$

135. $\frac{a^5b^3 - a^3b^5}{a + b}$ $\quad \frac{a^4b^3 - a^2b^4}{a - b}$ $\quad \frac{a^4 - b^4}{a^3 + b^3}$ $\quad \frac{x^4 - y^4}{x^3 - y^3}$

136. $\frac{a^3 + b^3}{a + b}$ $\quad \frac{x^3 - y^3}{x - y}$ $\quad \frac{1 - x^3}{1 - x}$ $\quad \frac{1 + x^3}{1 + x}$

137. $\frac{a^4b - ab^4}{a - b}$ $\quad \frac{a^5x^3 + a^3x^5}{a + x}$ $\quad \frac{a^3 + b^3}{a - b}$ $\quad \frac{x^3 - 1}{x + 1}$

138. $\frac{x^4 - y^4}{x - y}$ $\quad \frac{x^4 + y^4}{x + y}$ $\quad \frac{x^4 - y^4}{x + y}$ $\quad \frac{1 - x^4}{1 + x}$

139. $\frac{x^5 + y^5}{x + y}$ $\quad \frac{x^5 - y^5}{x - y}$ $\quad \frac{a^5 + b^5}{a - b}$ $\quad \frac{a^5 - b^5}{a + b}$

140. $\frac{a^6 - b^6}{a^3 - b^3}$ $\quad \frac{x^6 + y^6}{x^2 + y^2}$ $\quad \frac{x^6 - y^6}{x - y}$ $\quad \frac{x^6 - y^6}{x + y}$

141. $\frac{x^6 - y^6}{x^2 - xy + y^2}$ $\quad \frac{x^6 - y^6}{x^2 + xy + y^2}$ $\quad \frac{x^6 - 1}{x^2 + x + 1}$ $\quad \frac{x^6 + 1}{x^2 - x + 1}$

142. $\frac{a^{2x} - a^{2y}}{a^x - a^y}$ $\quad \frac{a^{2x} - a^{2y}}{a^x + a^y}$ $\quad \frac{a^{2x} + a^{2y}}{a^x + a^y}$ $\quad \frac{a^{3x} + a^{3y}}{a^x + a^y}$

143. $\frac{a^{x+1} - a^{x-1}}{a - 1}$ $\quad \frac{a^{x+1} - a^{x-1}}{a + 1}$ $\quad \frac{a^{n+2} - a^{n-2}}{a^2 + 1}$ $\quad \frac{a^{n+1} + a^{n-2}}{a + 1}$

144. $\left(\frac{x^2}{y^2} + 1 + \frac{y^2}{x^2}\right) : \left(\frac{x}{y} + 1 + \frac{y}{x}\right)$

Digitized by Google

145. $\left(\frac{x^4}{y^2} - \frac{y^4}{x^2}\right) : \left(\frac{x^3}{y} + 2x^2 + 2xy + y^2\right)$

146. $\left(\frac{ab^3}{xy} - \frac{ax^5}{by} - \frac{b^3y}{ax} + \frac{x^5y}{ab}\right) : \left(\frac{ab}{y} - \frac{ax^3}{by} + b - \frac{x^3}{b}\right)$

147. $\left(\frac{4a^6b^2}{x^2} - \frac{9a^6y^4}{b^2x^2} - 4b^2x^4 + \frac{9x^4y^4}{b^2}\right)$
$: \left(\frac{2a^3b^2}{x^2} - \frac{3a^3y^2}{x^2} + 2b^2x - 3xy^2\right)$

148. $(a^{n+3} + a^n) : (a^3 + a^2)$ $\quad (a^{n+2} - a^{n-1}) : (a^2 - a)$

149. $(a^{n+4} - a^n) : (a^2 + a)$ $\quad (a^{3m} + a^{3n}) : (a^{m+n} + a^{2n})$

150. $(a^{4x} - a^4) : (a^{x-1} + 1)$ $\quad (a^{10} + a^5) : (a^{8-x} + a^{7-x})$.

Wie schon im Abschnitt I, Nr. 9. (vgl. auch die Anm. S. 4) hervorgehoben worden ist, besteht die Eigentümlichkeit des gegenwärtig in der Kulturwelt allgemein gebräuchlichen indisch-arabischen Ziffersystems darin, daß die Ziffern einen Stellenwert haben, für den die Grundzahl des Systems maßgebend ist. So wird 735 geschrieben für die Summe $700 + 30 + 5 = 7 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 5$; 9254 für $9 \cdot 10^4 + 2 \cdot 10^3 + 2 \cdot 10^2 + 5 \cdot 10 + 4$. Diese Zergliederung der Zahl läßt auch sofort erkennen, wie die einzelnen Ziffern mit dem Werte der ganzen Zahl zusammenhängen. Dividiert man 9254 durch 10, so erhält man als ganzzahligen Quotienten 925, der Divisionsrest 4 stellt die erste Ziffer von rechts dar; dividiert man weiter 925 durch 10, so ergibt der jetzige Divisionsrest 5 die zweite Ziffer von rechts, die Division des hierbei auftretenden ganzzahligen Quotienten 92 durch 10 gibt als Divisionsrest 2, d. i. die dritte Ziffer von rechts usf.

Alle derartigen Eigenschaften kommen aber, wie an der angegebenen Stelle bereits betont wurde, nicht bloß dem tatsächlich in Gebrauch befindlichen dekadischen oder zehnteiligen System zu, sie zeigen sich auch bei jedem anderen System. Wenn überall im folgenden die Zahlen, die einem anderen als dem zehnteiligen System angehören, durch Hinzufügung der Grundzahl als Index gekennzeichnet werden, so hat man beispielsweise $(735)_9 = 7 \cdot 9^2 + 3 \cdot 9 + 5$ das ist $(735)_9 = 599$; $(9254)_6 = 9 \cdot 6^3 + 2 \cdot 6^2 + 5 \cdot 6 + 4 = 2050$. Auch hier erhält man die Ziffern der Reihe nach von rechts her als die Divisionsreste bei den Divisionen, die man an der Zahl selbst und den weiteren ganzzahligen Quotienten vornimmt.

Die Grundzahl selbst wird in jedem System mit dem Zahlausdruck 10 bezeichnet. Es ist also beispielsweise $(10)_6 = 6$, $(10)_{12} = 12$. Alle unter der Grundzahl stehenden Zahlwerte werden durch besondere Ziffern bezeichnet, woraus folgt, daß im zwölfteiligen System für die Zahlen zehn und elf besondere Zeichen neu einzuführen sind,

Digitized by Google

während im achtteiligen System die Ziffern für acht und neun überflüssig werden, da diese Zahlen dort mit $(10)_8$ und $(11)_8$ bezeichnet werden.

Löse demgemäß die folgenden Aufgaben, bei denen für die Ziffern zehn und elf im zwölfteiligen System die Bezeichnungen s und e zur Verwendung kommen.

151. (187.) Wie heißen folgende zehnteilige Zahlen im sechsteiligen System: 6, 8, 18, 73, 437, 3581?

152. (188.) Wie heißen folgende zehnteilige Zahlen im fünfteiligen System: 15, 27, 61, 517, 625, 1783?

153. Übertrage folgende zehnteiligen Zahlen ins zwölfteilige System: 22, 71, 100, 256, 408, 3589.

154. (189.) Was bedeuten im zehnteiligen System die dem siebenteiligen System angehörenden Zahlen: $(10)_7$, $(16)_7$, $(35)_7$, $(100)_7$, $(234)_7$, $(1343)_7$?

155. (190.) Welche Werte haben die dem zweiteiligen System angehörigen Zahlen: $(10)_2$, $(101)_2$, $(1011)_2$, $(100000)_2$, $1010101)_2$?

156. Übertrage folgende Zahlen aus dem zwölfteiligen ins zehnteilige System: $(86)_{12}$, $(124)_{12}$, $(709)_{12}$, $(s74)_{12}$, $(13e0)_{12}$, $(2009)_{12}$.

157. In welchen Systemen sind folgende Gleichungen richtig:

1) $(42)_x - (17)_x = (23)_x$ 2) $(23)_x + (35)_x = (61)_x$
3) $(21)_x - (15)_x = (2)_x$ 4) $(47)_x + (26)_x = (74)_x$
5) $(25)_x + (46)_x = (73)_x$ 6) $(110)_x - (101)_x = (1)_x$
7) $(220)_x - (202)_x = (11)_x$ 8) $(235)_x + (314)_x = (553)_x$
9) $(43)_x - (17)_x = (28)_x$ 10) $(51)_x + (4s)_x = (9e)_x$
11) $(140)_x - (s0)_s = (60)_x$?

XII. Potenzen mit ganzen negativen Exponenten.

A. Theorie.

1. Die beiden Reihen

$a\,a\cdots\overset{n}{\breve{a}}$	. . . .	$aaaa$	aaa	aa	a
a^n	. . . .	a^4	a^3	a^2	a^1

stehen dadurch im Zusammenhang, daß jedes Glied der unteren Reihe eine abkürzende Bezeichnung für das senkrecht darüber stehende Glied der oberen Reihe darstellt. Führt man beide Reihen nach demselben Bildungsgesetz weiter, d. h., die obere durch fortgesetzte Division durch a, die untere durch fortgesetzte Verminderung des Exponenten um Eins, so erhält man

1	$\frac{1}{a}$	$\frac{1}{aa}$	$\frac{1}{aaa}$	$\frac{1}{aaaa}$ usw.
a^0	a^{-1}	a^{-2}	a^{-3}	a^{-4} usw.

Digitized by Google

2. Die Ausdrücke a^0, a^{-1}, a^{-n} sind neu, sie erhalten ihre Bedeutung dadurch, daß auch in dieser Erweiterung jedes Glied der unteren Reihe eine abkürzende Bezeichnung für das senkrecht darüber stehende Glied der oberen Reihe darstellen soll.

1. $a^0 = 1$

2. $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$, oder

3. $a^{-n} = \left(\frac{1}{a}\right)^n$, $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$.

Drücke diese Formeln in Worten aus.

3. Die Ausdrücke a^{-n} und a^0, die jetzt eine bestimmte Bedeutung haben, nennt man ebenfalls Potenzen. Man unterscheidet daher Potenzen mit positiven Exponenten und Potenzen mit negativen Exponenten. Den Übergang zwischen beiden vermittelt die Potenz mit dem Exponenten Null.

Danach ist eine Potenz ein Ausdruck von der Form a^n, der für ein positives ganzes n ein Produkt aus n Faktoren bedeutet, von denen jeder a ist, für ein negatives n einen Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner dieselbe Potenz mit positivem Exponenten ist; für den Exponenten Null ergibt sich bei jeder Grundzahl der Wert Eins. Wenn n eine gebrochene Zahl ist, so ist wieder eine besondere Betrachtung und eine neue Definition nötig, welche den Gegenstand eines weiteren Abschnittes bilden wird.

4. Man kann die Einführung der negativen Exponenten in der im vorstehenden erläuterten Bedeutung auch durch die folgende Betrachtung begründen.

Die Größe a^m hat einen Wert, der nicht nur durch die Basis a, sondern auch durch den Exponenten m bestimmt wird. Über die Rolle, die dabei der Wert von m spielt, geben die Potenzgesetze Auskunft, insbesondere das erste, welches die Grundlage aller übrigen bildet. Man kann dies Gesetz auch in der Form aussprechen: Die Multiplikation von Potenzen mit derselben Grundzahl kann dadurch bewirkt werden, daß man ihre Exponenten addiert. Durch diesen Sachverhalt wird man in den Stand gesetzt, auch einer Potenz mit negativem Exponenten einen Sinn beizulegen, indem man von ihr verlangt, daß auch auf sie die Potenzgesetze, insbesondere das erste dieser Gesetze anwendbar sein sollen. Hat man nun z. B. die Potenz a^{-3} und multipliziert sie mit a^7, so ergibt sich nach dem ersten Potenzgesetz

$$a^{-3} \cdot a^7 = a^{(-3)+7} = a^4,$$

also

$$a^{-3} = a^4 : a^7 = 1 : a^3$$

und allgemein, wenn man a^{-n} mit a^m (für $m > n$) multipliziert:

$$a^{-n} \cdot a^m = a^{m-n}; \quad a^{-n} = a^{m-n} : a^m = 1 : a^{m-(m-n)} = 1 : a^n.$$

Digitized by Google

Der Ausdruck a^{-n} ist demnach nichts anderes als eine neue Schreibweise für die Größe $\frac{1}{a^n}$, die auf diese Art die Form einer Potenz erhält und dadurch allen den Rechnungsvereinfachungen, welche die Anwendung der Potenzgesetze gewährt, zugänglich wird.

5. Daß über die Potenzen, deren Exponenten 0 oder negativ sind, dieselben Gesetze gelten, wie über Potenzen mit positiven Exponenten, bedarf zwar nach den voranstehenden Erörterungen keines weiteren Beweises, läßt sich jedoch auch durch Zurückführung der Potenzen mit negativen Exponenten auf Potenzen mit positiven Exponenten und Fortschaffung der nullten Potenzen leicht dartun. Beweise danach die Richtigkeit folgender Formeln:

1) $a^n \cdot a^0 = a^{n+0}$ $a^n \cdot a^{-p} = a^{n-p}$ $a^{-n} \cdot a^{-p} = a^{-(n+p)}$

2) $\frac{a^n}{a^0} = a^{n-0}$ $\frac{a^n}{a^{-p}} = a^{n+p}$ $\frac{a^{-n}}{a^p} = \frac{1}{a^{n+p}}$

3) $(ab)^0 = a^0 \cdot b^0$ $(ab)^{-n} = a^{-n} \cdot b^{-n}$ $(a^n)^0 = a^{n \cdot 0} = a^0$

4) $\left(\frac{a}{b}\right)^0 = \frac{a^0}{b^0}$ $\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \frac{a^{-n}}{b^{-n}}$ $\frac{a^{-n}}{a^{-p}} = \frac{1}{a^{n-p}}$

5) $(a^{-n})^p = a^{-np}$ $(a^n)^{-p} = a^{-np}$ $(a^{-n})^{-p} = a^{np}$.

B. Aufgaben.*)

1.	$a^3 \cdot a^0$	$b^0 \cdot x^0$	$5c^0$	$(5c)^0$
2.	$(ab)^0$	$(a+b)^0$	$8\,(a-b)^0$	$6^0 \cdot (x+y)$
3.	1^0	1^{-1}	x^{-1}	1^{-x}
4.	$a^{-3} \cdot a^3$	$a^{-5} \cdot a^4$	$a^{-4} \cdot a^3$	$a^{-4} \cdot a^0$
5.	$a^{-2} \cdot b^2$	$(ab)^{-2}$	$(a+b)^{-1}$	$a^2\,(a+b)^{-2}$
6.	$a^2\,(ab)^{-2}$	$(a^{-1})^0$	$(a^{-1})^{-1}$	$(a^0)^{-1}$
7.	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^0$	$a^2\left(\frac{a}{b}\right)^{-2}$	$\left(\frac{a}{b}\right)^{-2} : b^2$
8.	$(\frac{1}{2})^{-1}$	$(\frac{3}{2})^{-2}$	$(0{,}75)^{-1}$	$(0{,}751)^0$
9.	$4 \cdot (\frac{1}{2})^{-2}$	$4^{-2} \cdot (\frac{1}{2})^{-4}$	$8 \cdot (\frac{1}{5})^{-3}$	$5^{-2} \cdot (0{,}1)^{-3}$
10.	$1^x \cdot 7^0$	$x^1 \cdot x^{-1}$	$(2x)^{-3} \cdot (3x)^3$	$a^5 \cdot x^{-4}$
11.	$8 \cdot 4^{-2}$	$25 \cdot 5^{-1}$	$32 \cdot 4^{-3}$	$25^{-1} \cdot (0{,}2)^{-3}$
12.	$\frac{a}{a^{-1}}$	$\frac{a^0}{x^{-2}}$	$\frac{5}{x^{-5}}$	$\frac{a^0}{x^0}$

*) Im Resultat soll keine Potenz mit dem Exponenten 0 oder einem negativen Exponenten vorkommen.

Digitized by Google

13. $\frac{4}{4^{-1}}$ $\frac{5^{-2}}{5^{-3}}$ $\frac{a^{-5}}{a^{-4}}$ $\frac{x^n}{x^{-n}}$

14. $\frac{a^{2x-1}}{a^{-1}}$ $\frac{a^{n-x}}{a^{-x}}$ $\frac{a^{-1}}{a^{n-1}}$ $\frac{a^{5-x}}{a^{-5}}$

15. $(-a)^{-1}$ $(-a)^{-2}$ $(-a)^{-3}$ $(-a)^{-4}$

16. $(-1)^{-1}$ $(-1)^{-2}$ $(-1)^{-3}$ $(-1)^{-4}$

17. $(-2)^{-2}$ $(-3)^{-3}$ $(-2)^{-3}$ $(-3)^{-2}$

18. $(-0{,}5)^{-2}$ $(-0{,}2)^{-1}$ $(-1{,}5)^{-2}$ $9\cdot(-1{,}5)^{-3}$

19. $ax^{-2}+bx^{-1}$, $3x^{-3}+2x^{-2}$, $3x^{-3}+2x^2$, $3x^3\cdot 2x^{-2}$

20. $5a^{-5}\cdot 4a^4$, $3a^{-2}\cdot 3b^3$, $(3a)^{-2}\cdot(3b)^3$, $(2a^{-2})^0\cdot 3a^{-1}$

21. $\frac{3}{2}ab^{-3}\cdot 6a^{-2}b$, $\frac{3}{4}a^{-1}b^3\cdot 8a^4b^{-2}$, $1\frac{1}{2}x^{-n}y\cdot 1\frac{1}{3}x^ny^{-1}$, $2\frac{1}{2}x^2y^{-2}\cdot\frac{4}{5}x^{-1}y^2$

22. $2\frac{1}{2}a^{-n}b^{-n}c^{-x}\cdot 1\frac{3}{5}a^{n+1}b^{n+2}c^x$, $5\frac{1}{4}a^{-3}b^{-4}c^{n-7}\cdot 1\frac{1}{7}a^3\cdot b^{n+4}c^{7-n}$

23. $(1-x)^{-n+1}\cdot(x-1)^{2n+1}$, $(a-b)^{-n}\cdot(b-a)^{2n-1}$

24. $\frac{a^{-2}\cdot b^3}{a^{-3}b^{-1}}$ $\frac{3a^{-1}b}{4a^{-2}b^{-2}}$ $\frac{5a^{-4}\cdot x^{-2}}{3a^{-3}\cdot x}$ $\frac{7x^ny^{-1}}{5x^{-n}y}$

25. $\frac{24a^0b^{-1}c^{-3}}{36a^{-1}b^{-2}c}$ $\frac{25ab^{-2}c^{-1}}{35a^0bc^{-2}}$ $\frac{27x^{-5}y^6z^{-1}}{45x^{-4}y^5z^0}$ $\frac{49x^{-2}y^{-3}z^{-4}}{42x^{-3}y^{-4}z^{-3}}$

26. $\frac{a^{-2}b^3c^{-4}}{x^{-3}y^0z^{-5}}\cdot\frac{a^2b^{-1}c^4}{x^2y^{-1}z^4}$ $\frac{a^{-3}b^{-2}x^4}{c^3y^{-5}z^{-1}}\cdot\frac{a^3c^4y^{-4}}{b^{-3}x^5z}$

27. $\frac{a^{-4}b^5c^{-2}}{x^{-1}y^{-2}z^3}:\frac{x^2y^3z^4}{a^4b^{-4}c^4}$ $\frac{a^{-2}x^4y^{-6}}{b^3c^{-4}z^{-5}}:\frac{a^{-3}b^{-5}x^3}{c^{-5}y^6z^{-7}}$

28. $\left(\frac{a}{b}\right)^{-1}\cdot\left(\frac{b}{c}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{a}{c}\right)^3$ $\left(\frac{a^2}{b^3}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{2b^3}{3a^3}\right)^{-1}\cdot 2ab^{-4}$

29. $\left(\frac{a+b}{x+y}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{a-b}{x-y}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{a^2-b^2}{x^2-y^2}\right)^2$, $\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{-3}\cdot\left(\frac{x+1}{x-1}\right)^{-2}\cdot\left(\frac{1}{x^2-1}\right)^{-1}$

30. $(ax^{-5}+bx^{-3})\cdot x^5$ $(ax^{-4}+bx^{-2})\cdot x^3$

31. $(ax^2+bx):x^{-1}$ $(ax^{-3}+bx^{-1}):x^{-4}$

32. $(2x+3x^{-1})(3x-2x^{-1})$ $(3x-2x^{-1})(4x^3+3x)$

33. $(5x^2+2x^{-2})(5x^3-2x^{-1})$ $(x+x^{-1})(x^2-1)$

34. $(a^x+a^{-x})(a^{2x}-1)$ $(a^x+b^{-x})(a^xb^x-1)$

35. $(3x+2x^{-1}+5)(2x+3x^{-1}-4)$

36. $(4x^4+5x^{-2}-2x)(3x^4+2x^{-2}+3x)$

37. $(2a^2b^{-1}+3a+4b+3a^{-1}b^2)(3a-4b)$

Digitized by Google

38. $(3a^3b^{-2} - 2a^2 + 5ab^2 - 4b^4)(2a + 5b^2)$

39. $(6x^3 - 3x^2 + 2 - x^{-1})(6x^3 + 3x^2 - 2 - x^{-1})$

40. $(2x^2 + 3x - 4x^{-1} - 6x^{-2})(2x^2 - 3x + 4x^{-1} - 6x^{-2})$

41. $(x^3 - x^{-1}) : (x - x^{-1})$ $\quad (x - x^{-3}) : (x^{-1} + x)$

42. $(x^2 + x^{-1}) : (x^{-1} + 1)$ $\quad (x - x^{-2}) : (1 - x^{-1})$

43. $(a^x - a^{-x}) : (a^x - 1)$ $\quad (a^{2x} + a^{-x}) : (a^x + 1)$

44. $(x^3 - x^{-1}) : (1 - x^{-1})$ $\quad (x^2 - x^{-2}) : (x^{-1} + x^{-2})$

XIII. Ausziehen der Quadratwurzel.

A. Theorie.

1. Die Quadratwurzel aus der Zahl a ist die Zahl, die in die zweite Potenz erhoben oder quadriert die Zahl ergibt. Man hat dafür das Zeichen $\sqrt{a}$ (gelesen: Quadratwurzel aus a, oft einfach: Wurzel aus a). Die Operation, durch die diese Wurzel gefunden wird, bezeichnet man als die Ausziehung der Wurzel. Statt des Ausdrucks: die Wurzel aus einer Zahl ziehen, sagt man auch die Zahl radizieren und bezeichnet die zu radizierende Zahl als Radikanden. Über eine Erweiterung des Wurzelbegriffs s. Abschn. XV

2. Demgemäß hat man $\sqrt{1} = 1$; $\sqrt{4} = 2$; $\sqrt{9} = 3$; $\sqrt{16} = 4$; $\sqrt{25} = 5$; $\sqrt{36} = 6$; $\sqrt{49} = 7$; $\sqrt{64} = 8$; $\sqrt{81} = 9$; $\sqrt{100} = 10$.

3. Um die Quadratwurzel aus größeren Zahlen zu ziehen, oder diese Zahlen zu radizieren, muß man ein systematisches Verfahren anwenden, das auf folgender Formel beruht

$$(a + b + c + d + \cdots)^2$$
$$= a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + 2(a+b+c)d + d^2 + \cdots *)$$

4. Wendet man diese Formel auf eine dekadische Zahl an, die man in Gemäßheit der zu ihrer Darstellung dienenden Ziffern einteilt, so hat man z. B. für die Zahl 3742

---

*) Man hat

1) $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

2) $(a + b + c)^2 = (a + b)^2 + 2(a + b)c + c^2$

3) $(a + b + c + d)^2 = (a+b+c)^2 + 2(a+b+c)d + d^2$ usw.

Aus der Addition von 1) und 2) ergibt sich die Formel für $(a + b + c)^2$, aus der Addition von 1), 2) und 3) die für $(a + b + c + d)^2$.

Digitized by Google

$a = 3000$	$a^2 = 9000000$
$b = 700$	$2ab = 4200000$
$c = 40$	$b^2 = 490000$
$d = 2$	$2(a+b)c = 296000$
	$c^2 = 1600$
	$2(a+b+c)d = 14960$
	$d^2 = 4$
	$3742^2 = (a+b+c+d)^2 = 14002564.$

5. Die Wurzelausziehung sucht nun aus der Größe 14002564 die im vorstehenden angegebenen Bestandteile, von denen jeder folgende am Ende eine Null weniger aufweist, als der vorhergehende, einzeln herauszufinden.

Auf die beiden letzten Ziffern haben nur die Glieder Einfluß, die die Größe d enthalten, auf die vier letzten die, die d und c, auf die sechs letzten Ziffern die, die d, c und b enthalten. Die Größe a äußert ihren Einfluß nur auf den Bestandteil, der noch 6 Stellen hinter sich hat. Durch diese Umstände rechtfertigt sich die Ausführung der Wurzelausziehung nach dem folgenden Schema

$\sqrt{13|16|23|84} = 3628$ $\quad a = 3000 \quad b = 600 \quad c = 20 \quad d = 8$

9	$a^2 = 9000000$
6) 41	$2ab = 3600000$
36	$b^2 = 360000$
56	$2(a+b)c = 144000$
36	$c^2 = 400$
72) 202	$2(a+b+c)d = 57920$
144	$d^2 = 64$
583	$(a+b+c+d)^2 = 13162384$
4	
724) 5798	
5792	
64	
64	

6. In Worte gefaßt läßt sich dies Verfahren so beschreiben, daß man, um eine neue Ziffer zu finden, an den vorhandenen Rest die erste nachfolgende Ziffer hängt, und diese Zahl durch das Doppelte des bereits gefundenen Resultats dividiert. Bei diesen Divisionen rechnet man nur mit den vorn stehenden Ziffern, weil die eigentlich dahinter noch kommenden Nullen schon durch die Art, in der die Ziffern untereinander stehen, ihre Berücksichtigung finden. So hatte man bei dem vorstehenden Beispiel als ersten Bestandteil $a = 3000$ gefunden, weil $a^2 = 9000000$ das größte in 13000000 steckende Quadrat ist. Von diesen 13000000 blieben nach Abzug von 9000000

Digitized by Google

noch 4000000 übrig; die Anhängung der nächsten Ziffer 1 ergab 4100000, diese Zahl wurde durch $2a = 6000$ dividiert — in dem Rechnungsschema sieht die Division so aus, als ob 41 durch 6 zu dividieren wäre. Das gibt nun als nächste Ziffer 6, d. h. $b = 600$, $2ab = 3600000$, die Subtraktion dieses Wertes von 4100000 ergibt den Rest 500000, durch Anhängung der Ziffer 6 hat man 560000, in diesem Werte muß nun das Quadrat von b, d. i. 360000 enthalten sein. Nunmehr bleibt der Rest 200000, aus dem durch gehörige Einfügung der nächsten Ziffer des Radikanden 2 die Zahl 202000 wird. Diese ist durch das Doppelte des bereits gefundenen Ergebnisses, d. h. durch $2(3000 + 600) = 7200$ zu dividieren, welche Division in dem Rechnungsschema wie eine Division von 202 durch 72 erscheint usw.

7. Das Verfahren läßt sich dadurch abkürzen, daß man immer die beiden Zeilen, in denen derselbe Bestandteil (b, c, d) neu auftritt, in eine zusammenzieht. Dann erhält man das folgende Schema:

$$\sqrt{a^2 + 2ab + b^2 + 2(a+b)c + c^2 + \cdots} = a + b + c + \cdots$$

$$\begin{array}{r|l} & a^2 \\ \hline 2a & +2ab+b^2 \\ & +2ab+b^2 \\ \hline & 2(a+b) \quad +2(a+b)c+c^2+\cdots \\ & \qquad\quad +2(a+b)c+c^2 \qquad \text{usw.} \end{array}$$

$\sqrt{13|16|23|84} = 3628$

$$\begin{array}{rl} & 9 \\ 66) & 416 \\ & 396 \\ 722) & 2023 \\ & 1444 \\ 7248) & 57984 \\ & 57984 \end{array}$$

$a = 3000 \quad b = 600 \quad c = 20 \quad d = 8$

$$\begin{array}{rl} a^2 = & 9000000 \\ (2a+b)b = & 3960000 \\ (2(a+b)+c)c = & 144400 \\ (2(a+b+c)+d)d = & 59794 \\ \hline (a+b+c+d)^2 = & 13162384 \end{array}$$

Man teilt demgemäß die zu radizierende Zahl von rechts nach links in Abteilungen von je zwei Ziffern, die man von links nach rechts der Reihe nach in die Rechnung hineinzieht. Jede Abteilung der zu radizierenden Zahl liefert eine Ziffer der Wurzel. Die erste Abteilung links (mit der man die Rechnung beginnt) kann möglicherweise einziffrig sein.

8. Um die Wurzel aus einer Dezimalzahl zu ziehen, verfährt man entsprechend. Da das Quadrat einer Dezimalzahl, die n Stellen hinter dem Komma hat, selbst $2n$ Stellen hinter dem Komma aufweist, muß hinter dem Komma stets eine gerade Anzahl von Stellen zu stehen kommen. Daraus folgt, daß die Einteilung einer solchen Zahl in zweiziffrige Abteilungen stets vom Komma aus zu erfolgen hat, etwa fehlende Dezimalstellen sind durch Nullen zu ergänzen.

Digitized by Google

So muß man z. B. statt $\sqrt{3{,}754}$ vielmehr $\sqrt{3{,}7540}$ schreiben. Einen gemeinen Bruch, aus dem die Wurzel zu ziehen ist, verwandelt man zweckmäßigerweise vorher in einen Dezimalbruch, dem man, wenn die Wurzel auf n Stellen gezogen werden soll, $2n$ Stellen geben muß.

9. Ist die Wurzel aus einer ganzen Zahl nicht selbst eine ganze Zahl, so kann sie auch kein aus ganzen Zahlen gebildeter Bruch sein. Denn bildet man aus den Zahlen u und v, die keinen gemeinsamen Faktor haben, den Bruch $\frac{u}{v}$ und erhebt ihn ins Quadrat, so erhält man den Bruch $\frac{u^2}{v^2}$, dessen Zähler durch den Nenner nicht teilbar ist, der daher keine ganze Zahl vorstellen kann. In solchem Falle läßt sich die Wurzel nicht genau, wohl aber mit großer Annäherung angeben, indem man immer zwei Dezimalzahlen finden kann, von denen die eine größer, die andere kleiner ist als die zu bestimmende Wurzel. Hat man nun z. B. gefunden, daß $\sqrt{260}$ kleiner als 16,13, aber größer als 16,12 ist, welche beiden Werte sich selbst nur um 0,01 unterscheiden, so begeht man, indem man für $\sqrt{260}$ einen dieser beiden Werte nimmt, einen Fehler, der sicherlich weniger als 0,01, d. h. weniger als ein Hundertstel beträgt. Findet man durch weitere Fortsetzung der Radizierung, daß $\sqrt{260}$ zwischen 16,124 und 16,125 liegt, so hat man den zu bestimmenden Wurzelwert zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, die sich selbst nur noch um 0,001, d. h. um ein Tausendstel unterscheiden. Setzt man jetzt die Wurzel gleich 16,124 oder gleich 16,125, so begeht man einen Fehler, der zweifellos noch nicht ein Tausendstel ausmacht. Durch Fortsetzung dieses Verfahrens kann man die bei der Bestimmung unvermeidliche Ungenauigkeit auf ein beliebig geringes Maß herunterbringen. — Zahlen dieser Art, deren Wert sich in Ziffern nicht völlig genau angeben läßt, nennt man *irrationale* Zahlen, im Gegensatz dazu heißen die durch Ziffern genau angebbaren Zahlen (ganze Zahlen und Brüche) *rational*. Von den irrationalen Zahlen wird im Abschnitt XV noch besonders die Rede sein.

10. Unter den ersten 100 ganzen Zahlen geben nur 10 eine rationale Wurzel, unter den ersten 1000 nur 31, unter den ersten 10000 nur 100, unter der ersten Million nur 1000, so daß auf je 1000 Zahlen erst eine einzige kommt, welche eine rationale Quadratwurzel hat. — Gemeine Brüche haben nur dann eine rationale Quadratwurzel, wenn sowohl Zähler als Nenner rationale Wurzeln liefern. Daher kann man mit ziemlicher Gewißheit darauf rechnen, daß eine vorgelegte Zahl eine irrationale Quadratwurzel hat. Mithin ist es sehr zweckmäßig, hier ein *Näherungsverfahren* anzuwenden, wie es im Nachstehenden näher angegeben ist.

11. Durch Ausziehung der Quadratwurzel nach dem in Nr. 5., 7. gelehrten Verfahren erhält man für $\sqrt{260}$ den Wert 16,1245155. Setzt man diesen Wert gleich $a + b + c + d + e$, indem $a = 16{,}124$ $b = 0{,}0005$ $c = 0{,}00001$ $d = 0{,}000005$ $e = 0{,}0000005$ gesetzt wird, so erhält man das nachstehende Gleichungssystem I

Digitized by Google

I.

$a^2 =$	259,983376	
$2ab =$	16124	0
$b^2 =$		25
$2(a+b)c =$	322	490
$c^2 =$		0001
$2(a+b+c)d =$	161	24510
$d^2 =$		000025
$2(a+b+c+d)e =$	16	1245150
$e^2 =$		00000025
$(a+b+c+d+e)^2 =$	260,000001	10974025

II.

$\sqrt{260} = 16{,}1245155$

1
2 | 160
156
32 | 400
321
322 | 7900
6444
3224 | 145600
128976
3224(8) | 16624
16124
322(4) | 500
322
32(2) | 178
161
3(2) | 17
16
1

Der bloße Anblick des Gleichungssystems I lehrt, daß man, um die Wurzel auf 9 Stellen (2 vor dem Komma, 7 Dezimalstellen) zu erhalten, die Quadrate der letzten 4 Ziffern nicht zu berücksichtigen braucht, nur das Quadrat der ersten von diesen 4 Ziffern ist zur Berichtigung heranzuziehen. Die letzten 4 Ziffern werden dann unter Außerachtlassung der Summanden $b^3\ c^2\ d^2\ e^2$ lediglich unter Benutzung der Summanden $2ab, 2(a+b)c, 2(a+b+c)d, 2(a+b+c+d)e$, also mittels Division gefunden, die selbstverständlich in verkürzter Form auszuführen ist. Die praktische Rechnung gestaltet sich dann in Gemäßheit des neben dem Gleichungssystem I angegebenen Rechenschemas II, bei dem die Außerachtlassung der Quadrate mit dem von $b = 0{,}0005$ beginnt — dies ist die erste auf dem Wege der bloßen Division gewonnene Ziffer. Um eine Wurzel auf $2n$ oder $2n+1$ Stellen zu berechnen, genügt es, $n+1$ Stellen in der gewöhnlichen Weise zu berechnen und die übrigen $n-1$ oder n Stellen durch einfache Division zu finden. Um eine Wurzel auf 4, 5, 6, 7, 8, 9 Stellen zu berechnen, wird man dieselbe daher zunächst nach dem gewöhnlichen Verfahren bezw. auf 3, 3, 4, 4, 5, 5 Stellen berechnen müssen, bevor man sich auf die bloße Division beschränkt.

B. Aufgaben.

1. $\sqrt{25}$ $\sqrt{81}$ $\sqrt{36}$ $\sqrt{64}$
2. $\sqrt{400}$ $\sqrt{900}$ $\sqrt{4900}$ $\sqrt{1600}$

Digitized by Google

3. $\sqrt{144}$ $\sqrt{441}$ $\sqrt{484}$ $\sqrt{196}$
4. $\sqrt{324}$ $\sqrt{1225}$ $\sqrt{1849}$ $\sqrt{2209}$
5. $\sqrt{4356}$ $\sqrt{5329}$ $\sqrt{7921}$ $\sqrt{9409}$
6. $\sqrt{2,89}$ $\sqrt{7,84}$ $\sqrt{0,5329}$ $\sqrt{0,0729}$
7. $\sqrt{0,0361}$ $\sqrt{0,0025}$ $\sqrt{0,0081}$ $\sqrt{0,0009}$
8. $\sqrt{18225}$ $\sqrt{64009}$ $\sqrt{42849}$ $\sqrt{94864}$
9. $\sqrt{687241}$ $\sqrt{499849}$ $\sqrt{879844}$ $\sqrt{826281}$
10. $\sqrt{19,0969}$ $\sqrt{25,8064}$ $\sqrt{0,450241}$ $\sqrt{0,054756}$
11. $\sqrt{1522756}$ $\sqrt{5527201}$ $\sqrt{18215824}$ $\sqrt{57108249}$
12. $\sqrt{4149369}$ $\sqrt{13749264}$ $\sqrt{49098049}$ $\sqrt{81162081}$
13. $\sqrt{1227,8016}$ $\sqrt{1646,7364}$ $\sqrt{32,524209}$ $\sqrt{53,421481}$
14. $\sqrt{0,49434961}$ $\sqrt{0,01703025}$ $\sqrt{0,00896809}$ $\sqrt{0,00056644}$

---

15. $\sqrt{2}$ $\sqrt{3}$ $\sqrt{5}$ $\sqrt{6}$ $\sqrt{7}$ $\sqrt{8}$ $\sqrt{11}$ $\sqrt{12}$
16. $\sqrt{15}$ $\sqrt{27}$ $\sqrt{38}$ $\sqrt{47}$ $\sqrt{53}$ $\sqrt{65}$ $\sqrt{73}$ $\sqrt{95}$
17. $\sqrt{25}$ $\sqrt{250}$ $\sqrt{2,5}$ $\sqrt{0,25}$ $\sqrt{0,36}$ $\sqrt{3,6}$ $\sqrt{360}$ $\sqrt{0,036}$
18. $\sqrt{10}$ $\sqrt{0,1}$ $\sqrt{0,01}$ $\sqrt{1000}$ $\sqrt{490}$ $\sqrt{4,9}$ $\sqrt{0,49}$ $\sqrt{0,049}$
19. $\sqrt{6,4}$ $\sqrt{0,64}$ $\sqrt{640}$ $\sqrt{0,064}$ $\sqrt{810}$ $\sqrt{8,1}$ $\sqrt{0,81}$ $\sqrt{0,081}$
20. $\sqrt{95}$ $\sqrt{9,5}$ $\sqrt{0,95}$ $\sqrt{0,095}$ $\sqrt{43}$ $\sqrt{4,3}$ $\sqrt{0,43}$ $\sqrt{0,043}$
21. $\sqrt{\frac{1}{2}}$ $\sqrt{\frac{3}{4}}$ $\sqrt{\frac{4}{5}}$ $\sqrt{\frac{5}{8}}$ $\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\sqrt{\frac{5}{6}}$ $\sqrt{\frac{8}{11}}$ $\sqrt{\frac{7}{9}}$
22. $\sqrt{5\frac{1}{2}}$ $\sqrt{8\frac{1}{4}}$ $\sqrt{9\frac{3}{5}}$ $\sqrt{7\frac{3}{8}}$ $\sqrt{4\frac{2}{3}}$ $\sqrt{6\frac{1}{6}}$ $\sqrt{13\frac{5}{11}}$ $\sqrt{9\frac{1}{9}}$
23. $\sqrt{\frac{8}{81}}$ $\sqrt{\frac{81}{8}}$ $\sqrt{\frac{75}{13}}$ $\sqrt{\frac{13}{75}}$ $\sqrt{\frac{97}{351}}$ $\sqrt{\frac{351}{97}}$ $\sqrt{\frac{901}{109}}$ $\sqrt{\frac{109}{901}}$
24. $\sqrt{137\frac{13}{25}}$ $\sqrt{348\frac{371}{387}}$ $\sqrt{507\frac{435}{782}}$ $\sqrt{9084\frac{531}{971}}$

---

25. $\sqrt[4]{625}$ $\sqrt[4]{6250}$ $\sqrt[4]{62,5}$ $\sqrt[4]{6,25}$ $\sqrt[4]{0,625}$ $\sqrt[4]{0,0625}$
26. $\sqrt[4]{1296}$ $\sqrt[4]{12960}$ $\sqrt[4]{129,6}$ $\sqrt[4]{12,96}$ $\sqrt[4]{1,296}$ $\sqrt[4]{0,1296}$

Aus folgenden mehrgliedrigen Buchstabenausdrücken soll die Quadratwurzel gezogen werden.

27. (29.) $x^2 - 6x + 9$ $x^2 + 10x + 25$
28. (30.) $9a^2 - 30ab + 25b^2$ $49a^6 - 112a^3b^2 + 64b^4$

Digitized by Google

29. (31.) $\frac{9}{4}a^4 - a^2b^3 + \frac{1}{9}b^6 \qquad \frac{4}{9}a^6 - a^3x + \frac{9}{16}x^2$

30. (32.) $9x^4 - 30x^3 + 67x^2 - 70x + 49$

31. (33.) $49x^4 + 42x^3 - 103x^2 - 48x + 64$

32. (34.) $16a^4 + 56a^3b + a^2b^2 - 84ab^3 + 36b^4$

33. $9x^4 - 12x^3 + 10x^2 - 4x + 1$

34. $64x^{12} - 96x^{10} - 12x^8 + 36x^6 + 9x^4$

35. $64a^4 + 144a^3b + a^2b^2 - 90ab^3 + 25b^4$

35_1. $36a^8x^4 - 60a^6x^3 + 61a^4x^2 - 30a^2x + 9$

36. $25x^4 - 30x^3 + 79x^2 - 57x + 58 - \frac{21}{x} + \frac{9}{4x^2}$

37. $\frac{1}{4}a^2 - \frac{3}{4}ab + \frac{9}{16}b^2 + \frac{1}{8}ac - \frac{1}{2}bc + \frac{1}{9}c^2$

37_1. $\frac{9}{16}a^2 - \frac{1}{3}ab + \frac{4}{81}b^2 + \frac{1}{2}ac - \frac{4}{27}bc + \frac{1}{9}c^2$

37_2. $\frac{4}{25}\frac{a^8}{b^4} - \frac{16a^4}{35b^2} + \frac{668}{245} - \frac{24b^2}{7a^4} + \frac{9b^4}{a^8}$

38. $\frac{9}{16}a^2 - 2\frac{1}{2}ab + \frac{25}{9}b^2 + \frac{9}{10}ac - 2bc + \frac{9}{25}c^2$

39. $\frac{1}{4}x^4 - \frac{1}{3}x^3 - \frac{23}{36}x^2 + \frac{13}{10}x + \frac{7}{240} - \frac{6}{5x} + \frac{16}{25x^2}$

39_1. $\frac{81a^6b^{10}}{c^2x^{14}} - \frac{126a^5b^8}{c^4x^9} - \frac{41a^4b^6}{c^6x^4} + \frac{124a^3b^4x}{c^8} - \frac{17a^2b^2x^6}{c^{10}} - \frac{30ax^{11}}{c^{12}} + \frac{9x^{16}}{b^2c^{14}}$

40. Entwickele durch Ausziehen der Quadratwurzel folgende Formeln:

$$\sqrt{1+x} = 1 + \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 + \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 + \tfrac{7}{256}x^5 - \tfrac{21}{1024}x^6 + \cdots$$

$$\sqrt{1-x} = 1 - \tfrac{1}{2}x - \tfrac{1}{8}x^2 - \tfrac{1}{16}x^3 - \tfrac{5}{128}x^4 - \tfrac{7}{256}x^5 - \tfrac{21}{1024}x^6 - \cdots$$

Die Formeln können nur Anwendung finden, wenn $x < 1$ ist. Soll die Reihe als mit dem 7. Gliede abschließend angesehen werden, so muß x so klein sein, daß das 8. Glied für die Dezimalstelle, welche man noch zu haben wünscht (z. B. für die 5. Stelle), den Wert Null erhält. Setze in den angeführten Formeln

41. $x = \frac{1}{100}$, und berechne so $\sqrt{101}$ und $\sqrt{11}$

42. $x = \frac{1}{10}$, „ „ „ $\sqrt{110}$ und $\sqrt{10}$

43. $x = \frac{1}{9}$, „ „ „ $\sqrt{10}$ und $\sqrt{2}$

44. $x = \frac{1}{8}$, „ „ „ $\sqrt{2}$ und $\sqrt{14}$

45. $x = \frac{1}{7}$, „ „ „ $\sqrt{14}$ und $\sqrt{42}$

46. $x = \frac{1}{4}$, „ „ „ $\sqrt{5}$ und $\sqrt{3}$

Digitized by Google

47. $x = \frac{1}{49}$, und berechne so $\sqrt{2}$ und $\sqrt{3}$

48. $x = 0{,}2$, „ „ „ $\sqrt{30}$ und $\sqrt{5}$.

Die Rechnung ist mit dem 6. Gliede abzuschließen.

XIV. Ausziehen der Kubikwurzel.

A. Theorie.

1. Unter der Kubikwurzel (aus) einer Zahl versteht man die Zahl, welche kubiert jene Zahl gibt. Um die Formel für die Ausziehung der Kubikwurzel zu finden, hat man die Kuben mehrgliedriger Größen zu entwickeln. Man hat

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a+b+c)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3$$

$$(a+b+c+d)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 + 3(a+b)^2c + 3(a+b)c^2 + c^3 + 3(a+b+c)^2d + 3(a+b+c)d^2 + d^3 \text{ usw.}$$

2. Wendet man die in Nr. 1. gegebene Zerlegung auf die vierziffrige Zahl 2417 an, so hat man

$a = 2000 \quad b = 400 \quad c = 10 \quad d = 7$

$a^3 =$	8 000 000 000
$3a^2b =$	4 800 000 000
$3ab^2 =$	960 000 000
$b^3 =$	64 000 000
$3(a+b)^2c =$	172 800 000
$3(a+b)c^2 =$	720 000
$c^3 =$	1 000
$3(a+b+c)^2d =$	121 970 100
$3(a+b+c)d^2 =$	354 270
$d^3 =$	343
	14 119 845 713.

3. Hier weist jede Zeile rechts gegen die vorhergehende eine Null weniger auf, ferner zeigt sich, daß in der ersten Zeile nur der Buchstabe a auftritt, die drei folgenden Zeilen enthalten Zahlenwerte, die nur von a und b abhängen, in den drei nächsten Zeilen tritt neben a und b nur c, in den drei folgenden neben den bisher vorhandenen nur d neu auf,

Daraus folgt, daß eine Gruppe von drei Ziffern im Radikanden immer eine neue Ziffer in der Wurzel liefert. Man hat also die zu radizierende Zahl von rechts nach links in lauter dreiziffrige

Digitized by Google

Gruppen zu teilen, wobei die am meisten links stehende Gruppe auch zweiziffrig oder einziffrig sein kann.

Um die Ziffer b zu finden, hängt man an den nach Abzug von a^3 noch verfügbaren Rest zunächst die erste Ziffer der folgenden dreiziffrigen Abteilung an, und dividiert die so entstandene Zahl durch $3a^2$. Hat man so b gefunden, so bildet man am besten sofort noch $3ab^2$ und b^3 und subtrahiert den ganzen Betrag $3a^2b + 3ab^2 + b^3$ von der Zahl, die durch Verwendung der ganzen jetzt in Betracht gekommenen dreiziffrigen Gruppe gebildet ist. Entsprechend verfährt man weiter, indem man den bereits gefundenen Teil der Wurzel als Ganzes ebenso behandelt, wie es soeben mit a geschehen ist. Dann erhält man, wenn man den bereits gefundenen Bestandteil immer mit a, die neu hinzukommende Ziffer immer mit b bezeichnet und die einzelnen Abschnitte, in die die Rechnung zerfällt, durch Indices unterscheidet, das folgende Rechenschema:

$$\sqrt[3]{14|119|845|713} = 2417$$

	8
12)	6119
	5824
1728)	295845
	173521
174243)	122324713
	122324713

$a_1 = 2000$ $b_1 = 400$	$a_2 = 2400$ $b_2 = 10$	$a_3 = 2410$ $b_3 = 7$
$3a_1^2b_1 = 4800000000$	$3a_2^2b_2 = 172800000$	$3a_3^2b_3 = 121970100$
$3a_1b_1^2 = 960000000$	$3a_2b_2^2 = 720000$	$3a_3b_3^2 = 354270$
$b_1^3 = 64000000$	$b_2^3 = 1000$	$b_3^3 = 343$
5824000000	173521000	122324713

4. Da die dritte Potenz einer Dezimalzahl, die n Ziffern hinter dem Komma hat, $3n$ Ziffern hinter dem Komma aufweist, muß eine Dezimalzahl, aus der die dritte Wurzel gezogen werden soll, auf diesen Zustand gebracht werden, wenn er nicht schon vorhanden ist. Hat sie also z. B. 7 Ziffern hinter dem Komma, so sind noch zwei Nullen anzuhängen, die Einteilung in dreiziffrige Abteilungen ist dann vom Komma aus zu beginnen.

Soll die Kubikwurzel aus einer Dezimalzahl gezogen werden, so muß die Teilung vom Komma aus nach rechts und nach links geschehen. Sind nicht so viel Dezimalstellen da, daß in die letzte Abteilung drei Stellen kommen, so muß man die fehlenden Stellen durch Nullen ergänzen. Um die erste Ziffer der Wurzel schnell zu finden, muß man die Kuben der ersten 9 Zahlen im Gedächtnis haben.

$1^3 = 1$ $2^3 = 8$ $3^3 = 27$ $4^3 = 64$ $5^3 = 125$
$6^3 = 216$ $7^3 = 343$ $8^3 = 512$ $9^3 = 729$.

Digitized by Google

Aus den vorstehenden Werten ersieht man, daß man aus der letzten Ziffer einer Zahl nicht schließen kann, ob die Zahl ein Kubus sein kann oder nicht, d. h. ob die Zahl eine rationale Kubikwurzel haben kann oder nicht. Der Kubus einer ganzen Zahl kann mit jeder Ziffer schließen. Schließt die Zahl mit Nullen, so muß die Anzahl der Nullen durch drei teilbar sein; auf eine einzelne Null kann der Kubus einer ganzen Zahl nicht endigen.

5. Die Kubikwurzeln sind noch viel seltener rational als die Quadratwurzeln, von der ersten Million ganzer Zahlen liefern nur 100 eine rationale Kubikwurzel. Man hat also meist mit irrationalen Kubikwurzeln zu tun, infolgedessen empfiehlt sich für die Radizierung das nachstehende Näherungsverfahren, das auf ähnlichen Erwägungen beruht, wie die abgekürzte Quadratwurzel-Ausziehung (vgl. Abschnitt XIII, Nr. 11.). Um eine Wurzel auf 5 Stellen richtig zu berechnen, genügen im Radikanden 6, meistens schon 5 Stellen. Was in der Rechnung über die 6. Stelle hinausgeht, wird fortgelassen. Man berechnet 3 Stellen nach dem gewöhnlichen, vollständigen Verfahren, läßt jedoch schon bei der 2. Division die überflüssigen Stellen fort. Dann sucht man den 3. Divisor, kürzt denselben jedoch um soviel Stellen, als im Dividenden fehlen, und dividiert mit diesem nach den Regeln der abgekürzten Division. Folgendes Beispiel zeigt das Verfahren:

$\sqrt[3]{23} = \sqrt[3]{23{,}0000} = 2{,}8439$

8

12	15000	
	13952	
2352	10480..	
	9543..	
241(9)	937..!..	
	726	
24(2)	211	
	218	

$a_1 = 2;\ b_1 = 08$	$a_2 = 2{,}8;\ b_2 = 0{,}04$
$3a_2^2 b_1 = 9{,}600$	$3a_2^2 b_2 = 0{,}9408$
$3a_1 b_1^2 = 3{,}840$	$3a_2 b_2^2 = 0{,}01344$
$b_1^3 = 0{,}512$	$b_2^3 = 0{,}000064$
13,952	0,9543...

Die fehlenden Stellen sind durch Punkte bezeichnet, um Irrungen zu vermeiden. Ein Strich über einer Ziffer oder einem Punkt bezeichnet die letzte Stelle des jedesmaligen Dividenden. Die eingeklammerten Ziffern sind nur zur Korrektion benutzt. Unter den Divisoren stellt der zweite 2352, abgesehen vom Komma, die Größe $3 \cdot 2{,}8^2$ vor. Der folgende Divisor würde den Wert $3 \cdot 2{,}84^2$ haben müssen, dessen angenäherter Wert in abgekürzter Form berechnet worden ist. Es ist nämlich $3 \cdot (2{,}84)^2 = 3\,(2{,}8^2 + 2 \cdot 2{,}8 \cdot 0{,}04 + 0{,}04^2)$

$$\begin{aligned} 3 \cdot 2{,}8^2 &= 23{,}52 \\ 3 \cdot 2 \cdot 2{,}8 \cdot 0{,}04 &= \ 0{,}672 \\ \hline & \quad 24{,}19, \end{aligned}$$

Digitized by Google

indem von dem Summanden $0{,}04^2$, dessen Wert für die in die Rechnung hineingezogenen Stellen nicht in Betracht kommt, von vornherein abgesehen worden ist. Die Abkürzung des Divisors (im ganzen um 3 Stellen) richtet sich dabei nach der des entsprechenden Dividenden, die hier ebenfalls drei Stellen ausmacht.

Der Wert des abgekürzten Verfahrens wird ersichtlich, wenn man beachtet, daß statt der in der vorletzten Zeile stehenden Zahl 211 bei der nicht abgekürzten Rechnung eine elfziffrige Zahl stehen würde.

Soll die Wurzel auf nur 4 Stellen berechnet werden, so nimmt man im Radikanden 5 Stellen, und es genügt, um die 4. Stelle der Wurzel zu erhalten, mit dem 2. Divisor, nachdem man eine Stelle gestrichen hat, in den Rest zu dividieren, hier mit 235 in 937.

B. Aufgaben.*)

1.	$\sqrt[3]{2197}$	$\sqrt[3]{3375}$	$\sqrt[3]{13824}$	$\sqrt[3]{24389}$
2.	$\sqrt[3]{79507}$	$\sqrt[3]{185193}$	$\sqrt[3]{571787}$	$\sqrt[3]{912673}$
3.	$\sqrt[3]{6{,}859}$	$\sqrt[3]{50{,}653}$	$\sqrt[3]{91{,}125}$	$\sqrt[3]{54{,}872}$
4.	$\sqrt[3]{0{,}099261}$	$\sqrt[3]{0{,}039304}$	$\sqrt[3]{0{,}079507}$	$\sqrt[3]{0{,}000064}$
5.	$\sqrt[3]{1860867}$	$\sqrt[3]{12821904}$	$\sqrt[3]{77854483}$	$\sqrt[3]{284890312}$
6.	$\sqrt[3]{350402625}$	$\sqrt[3]{523606616}$	$\sqrt[3]{738763264}$	$\sqrt[3]{751089429}$
7.	$\sqrt[3]{2571{,}353}$	$\sqrt[3]{81746{,}504}$	$\sqrt[3]{155{,}720872}$	$\sqrt[3]{2{,}048383}$
8.	$\sqrt[3]{8{,}489664}$	$\sqrt[3]{0{,}041781923}$	$\sqrt[3]{0{,}002097152}$	$\sqrt[3]{0{,}000300763}$
9.	$\sqrt[3]{2444008923}$		$\sqrt[3]{9731810375}$	
10.	$\sqrt[3]{69629433544}$		$\sqrt[3]{254358061056}$	
11.	$\sqrt[3]{126279339913}$		$\sqrt[3]{373714754427}$	
12.	$\sqrt[3]{517008241576}$		$\sqrt[3]{731189187729}$	
13.	$\sqrt[3]{12{,}454901432}$		$\sqrt[3]{10035{,}763893}$	
14.	$\sqrt[3]{0{,}216648648216}$		$\sqrt[3]{0{,}001118386872}$	

15.	$\sqrt[3]{2}$	$\sqrt[3]{3}$	$\sqrt[3]{5}$	$\sqrt[3]{7}$	$\sqrt[3]{23}$	$\sqrt[3]{45}$	$\sqrt[3]{79}$	$\sqrt[3]{83}$
16.	$\sqrt[3]{543}$	$\sqrt[3]{673}$	$\sqrt[3]{808}$	$\sqrt[3]{900}$	$\sqrt[3]{212}$	$\sqrt[3]{347}$	$\sqrt[3]{781}$	$\sqrt[3]{950}$
17.	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt[3]{640}$	$\sqrt[3]{6400}$	$\sqrt[3]{64000}$	$\sqrt[3]{6{,}4}$	$\sqrt[3]{0{,}64}$	$\sqrt[3]{0{,}064}$	$\sqrt[3]{0{,}0064}$

*) Die ersten 14 Aufgaben liefern rationale Kubikwurzeln. Diese sollen nach dem vollständigen Verfahren ermittelt werden. Die folgenden Aufgaben liefern teils rationale, teils irrationale Kubikwurzeln. Die letzteren sollen nach dem abgekürzten Verfahren auf 5 Stellen berechnet werden.

Digitized by Google

18. $\sqrt[3]{1}$ $\sqrt[3]{10}$ $\sqrt[3]{100}$ $\sqrt[3]{1000}$ $\sqrt[3]{0{,}1}$ $\sqrt[3]{0{,}01}$ $\sqrt[3]{0{,}001}$ $\sqrt[3]{0{,}0001}$

19. $\sqrt[3]{6}$ $\sqrt[3]{60}$ $\sqrt[3]{600}$ $\sqrt[3]{6000}$ $\sqrt[3]{0{,}6}$ $\sqrt[3]{0{,}06}$ $\sqrt[3]{0{,}006}$ $\sqrt[3]{0{,}0006}$

20. $\sqrt[3]{\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ $\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ $\sqrt[3]{\frac{4}{5}}$ $\sqrt[3]{\frac{5}{13}}$ $\sqrt[3]{\frac{9}{11}}$ $\sqrt[3]{\frac{17}{21}}$ $\sqrt[3]{\frac{39}{81}}$

21. $\sqrt[3]{9\frac{2}{3}}$ $\sqrt[3]{8\frac{1}{4}}$ $\sqrt[3]{7\frac{5}{6}}$ $\sqrt[3]{5\frac{3}{8}}$ $\sqrt[3]{9385\frac{13}{17}}$ $\sqrt[3]{7368\frac{59}{73}}$

22. $\sqrt[6]{64}$ $\sqrt[6]{640}$ $\sqrt[6]{6400}$ $\sqrt[6]{64000}$ $\sqrt[6]{640000}$ $\sqrt[6]{6400000}$

23. $\sqrt[6]{729}$ $\sqrt[6]{7290}$ $\sqrt[6]{72900}$ $\sqrt[6]{729000}$ $\sqrt[6]{7290000}$

24. $\sqrt[6]{72{,}9}$ $\sqrt[6]{7{,}29}$ $\sqrt[6]{0{,}729}$ $\sqrt[6]{0{,}0729}$ $\sqrt[6]{0{,}00729}$ $\sqrt[6]{0{,}000729}$

Aus folgenden mehrgliedrigen Buchstabenausdrücken sollen die Kubikwurzeln nach dem vollständigen Verfahren ermittelt werden:

25. $27 - 108x + 144x^2 - 64x^3$

25_1. $512a^9 - 960a^{11} + 600a^{13} - 125a^{15}$

26. $125a^3 - 150a^2b + 60ab^2 - 8b^3$

26_1. $1331a^9 + 4719a^7b + 5577a^5b^2 + 2197a^3b^3$

27. $\frac{1}{8}x^3 - \frac{1}{2}x^2 + \frac{2}{3}x - \frac{8}{27}$

28. $\frac{27}{64}a^3 - \frac{9}{8}a^2b + ab^2 - \frac{8}{27}b^3$

28_1. $\frac{27a^6b^3}{64x^{12}} - \frac{27a^5}{56bx^6} + \frac{9a^4}{49b^5} - \frac{8a^3x^0}{343b^9}$

29. $a^6 + 3a^5b - 5a^3b^3 + 3ab^5 - b^6$

29_1. $125a^3 - 225a^2b + 135ab^2 - 27b^3$

30. $8x^6 + 12x^5 - 30x^4 - 35x^3 + 45x^2 + 27x - 27$

30_1. $27x^6 - 54x^5 + 63x^4 - 44x^3 + 21x^2 - 6x + 1$

30_2. $64x^{12} - 240x^{10} + 588x^8 - 845x^6 + 882x^4 - 540x^2 + 216$

31. $a^3 + 3a^2b + 3a^2c + 3ab^2 + 3ac^2 + b^3 + 3b^2c + 3bc^2 + c^3 + 6abc$

32. $\frac{a^3}{27} - \frac{a^2b}{4} + \frac{9ab^2}{16} - \frac{27b^3}{64} - \frac{a^2c}{6} + \frac{3abc}{4} - \frac{27b^2c}{32} + \frac{ac^2}{4} - \frac{9bc^2}{16} - \frac{c^3}{8}$

33. $\frac{216a^6}{b^6} - \frac{756a^5}{b^5} + \frac{882a^4}{b^4} - \frac{343a^3}{b^3} - \frac{432a^2}{b^2} + \frac{1008a}{b} - 588 + \frac{288b^2}{a^2} - \frac{336b^3}{a^3} - \frac{64b^6}{a^6}$.

34. Entwickele durch Ausziehen der Kubikwurzel folgende Formeln:

$\sqrt[3]{1+x} = 1 + \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 + \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 + \frac{22}{729}x^5 - \cdots$

$\sqrt[3]{1-x} = 1 - \frac{1}{3}x - \frac{1}{9}x^2 - \frac{5}{81}x^3 - \frac{10}{243}x^4 - \frac{22}{729}x^5 - \cdots$

Digitized by Google

Setze in diesen Formeln, die nur für $x < 1$ verwendbar sind,

35. $x = \frac{1}{10}$, und berechne so $\sqrt[3]{1100}$ und $\sqrt[3]{900}$

36. $x = 8$, „ „ „ $\sqrt[3]{9}$ und $\sqrt[3]{7}$

37. $x = \frac{1}{64}$ „ „ „ $\sqrt[3]{65}$ und $\sqrt[3]{63}$.

Die Rechnungen sollen nur auf so viel Dezimalstellen durchgeführt werden, daß die Reihen als mit dem 6. Gliede abschließend angesehen werden können, höchstens auf 4 Dezimalstellen.

XV. Wurzeln und irrationale Größen.

A. Theorie.

1. Quadratwurzel und Kubikwurzel sind besondere Arten der Potenzwurzel überhaupt. Unter der n. Wurzel aus der Zahl a versteht man die Zahl, deren n. Potenz den Wert a hat. Die n. Wurzel aus einer Zahl suchen, heißt auch diese Zahl mit n radizieren oder aus ihr die n. Wurzel ziehen.

Wenn $b = \sqrt[n]{a}$ ist, so muß $b^n = a$ sein. Man hat also als Definition der Wurzel die Gleichung

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

Die Radizierung gehört, wie Subtraktion und Division, zu den indirekten Operationen. Das Zeichen $\sqrt{\ }$ (entstanden aus dem Anfangsbuchstaben des Wortes radix) nennt man das Wurzelzeichen; die Zahl a, aus welcher man die Wurzel ziehen soll, heißt der Radikand; die Zahl n, mit welcher man die Wurzel b potenzieren muß, um den Radikanden zu erhalten, heißt Wurzelexponent.

2. Nach der Definition der Wurzel muß die n. Wurzel aus a^n durch Potenzieren mit n den Wert a^n geben, dies trifft für die Größe a zu, also kann man die Gleichung aufstellen

$$\sqrt[n]{a^n} = a.$$

Es wird also sowohl die Radizierung durch die Potenzierung, als auch die Potenzierung durch die Radizierung aufgehoben, Potenzieren und Radizieren sind somit entgegengesetzte Operationen.

Aus der Definition der Wurzel läßt sich ferner leicht folgern, daß

$$\sqrt[3]{a^{12}} = a^4, \quad \sqrt[n]{a^{nx}} = a^x$$

sein muß. Aus einer Potenz zieht man demnach die Wurzel, indem man den Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten dividiert.

3. Die Gleichungen $b^n = a$ und $\sqrt[n]{a} = b$ bedingen sich gegenseitig. Wenn die eine gilt, so muß auch die andere gelten. Hat man beim Potenzieren $b^n = a$, so sind b und n gegeben, es wird a gesucht

Digitized by Google

Beim Radizieren verwandelt sich diese Gleichung in $\sqrt[n]{a} = b$; es sind a und n gegeben, gesucht wird b.

Der Wurzelexponent 2 wird in der Regel (vgl. Abschnitt XIII) nicht geschrieben. Man schreibt statt $\sqrt[2]{a}$ nur $\sqrt{a}$, und wie man a^2 meistens a Quadrat liest, so liest man $\sqrt{a}$ meistens Quadratwurzel aus a oder kurz nur Wurzel aus a. Ebenso liest man $\sqrt[3]{a}$ meistens Kubikwurzel aus a.

4. Eine Wurzel aus einer ganzen Zahl, welche sich durch eine ganze Zahl nicht angeben läßt, läßt sich (wie bereits bei der Quadratwurzel erörtert worden ist) auch nicht durch eine ganze Zahl und einen Bruch angeben, sondern nur genähert. Ebenso kann eine Wurzel aus einem Bruch, der auf seine einfachste Form gebracht ist, weder eine ganze Zahl, noch ein Bruch sein, wenn sich die Wurzel nicht aus dem Zähler und aus dem Nenner ziehen läßt; eine solche Wurzel kann also ebenfalls nur genähert angegeben werden. Solche Wurzeln gehören zu den sogenannten Irrationalzahlen, d. h. zu den Größen, deren Wert weder durch eine ganze Zahl noch durch einen Bruch zweier ganzen Zahlen genau angebbar ist. Im Gegensatz dazu bezeichnet man die ganzen Zahlen und die durch Division ganzer Zahlen entstehenden Brüche als rationale Zahlgrößen.*)

5. Über die Rechnung mit Wurzelgrößen gelten fünf Sätze, die ihren Ausdruck in den nachstehenden Formeln finden Diese Formeln sind in Worte zu fassen sowohl für den Fall, daß sie von links nach rechts, als für den, in dem sie von rechts nach links gelesen werden.

$$\text{I.}\quad \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$$

$$\text{II.}\quad \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$$

*) Wenn eine Irrationalzahl sich auch durch Zahlenausdrücke nicht genau ausdrücken läßt, so stellt sie doch eine ganz bestimmte Größe dar. Hat man ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten die Längen 1 *m* und 2 *m* haben, so findet sich durch den pythagoreischen Lehrsatz für die Hypotenuse eine Länge von soviel *m*, als die Irrationalzahl $\sqrt{5}$ angibt. $\sqrt{5}$ ist also eine Zahlgröße, die man nun (vgl. Abschnitt XIII) bis zu jedem beliebigen Genauigkeitsgrad bestimmen kann. Bestimme ich sie bis auf 3 Dezimalstellen, wobei sich findet, daß sie zwischen 2,236 und 2,237 liegt, so habe ich sie zwischen zwei Grenzen eingeschlossen, die sich selbst nur um ein Tausendstel des angewandten Maßstabes unterscheiden. Setze ich dann für die in Rede stehende Länge einen dieser Grenzwerte, so begehe ich offenbar einen Fehler, der weniger als die Differenz dieser Grenzwerte selbst, d. h. im vorliegenden Falle weniger als 1 *mm* ausmacht.

Diese Sachverhältnisse erregten schon die Aufmerksamkeit des Pythagoras (im 6. Jahrhundert v. Chr., Gründer der Schule der Pythagoreer in Croton in Unteritalien). Eingehender wurden sie von Euklides in Alexandrien (im Jahre 300 v. Chr.) erörtert, dem Verfasser des ältesten systematischen Lehrbuches der Geometrie (Stoicheia, d. i. Elemente genannt). — Das Wort irrational ist eine Übersetzung des griechischen Wortes alogos (wörtlich unvernünftig).

Digitized by Google

$$\text{III. } \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m$$

$$\text{IV. } \sqrt[n]{a^m} = \sqrt[nx]{a^{mx}}$$

$$\text{V. } \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n]{\sqrt[m]{a}} = \sqrt[mn]{a}.$$

6. Die vorstehenden Formeln werden höchst einfach dadurch bewiesen, daß man zeigt: die Wurzel mit dem Wurzelexponenten potenziert gibt den Radikanden. $\sqrt[n]{a} = b$ ist eine richtige Gleichung, wenn $b^n = a$ ist. Daher ist

$$\text{I. } \sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}, \text{ weil } (\sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b})^n = (\sqrt[n]{a}) \cdot (\sqrt[n]{b})^n = ab \text{ ist.}$$

$$\text{II. } \sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}, \text{ weil } \left(\frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}\right)^n = \frac{(\sqrt[n]{a})^n}{(\sqrt[n]{b})^n} = \frac{a}{b} \text{ ist.}$$

$$\text{III. } \sqrt[n]{a^m} = (\sqrt[n]{a})^m, \text{ weil } [(\sqrt[n]{a})^m]^n = (\sqrt[n]{a})^{mn} = [(\sqrt[n]{a})^n]^m = a^m.$$

$$\text{IV. } \sqrt[nx]{a^{mx}} = \sqrt[n]{a^m}, \text{ weil } (\sqrt[n]{a^m})^{nx} = [(\sqrt[n]{a^m})^n]^x = (a^m)^x = a^{mx}.$$

$$\text{V. } \sqrt[mn]{a} = \sqrt[m]{\sqrt[n]{a}}, \text{ weil } (\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^{mn} = [(\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}})^m]^n = (\sqrt[n]{a})^n = a.$$

7. Zu einem einzigen Wurzelausdruck können Summen oder Differenzen von Wurzelgrößen nur dann vereinigt werden, wenn Radikand und Wurzelexponent überall derselbe ist, z. B. $\sqrt[3]{a} + 5\sqrt[3]{a} = 6\sqrt[3]{a}$. Aber die Ausdrücke $\sqrt[4]{a} + \sqrt[4]{b}$ oder $\sqrt[5]{a} - \sqrt[4]{a}$ sind nicht weiter vereinfachbar.

8. Doch lassen sich manche Ausdrücke unter Anwendung der Wurzelgesetze so umformen, daß die Zusammenziehung möglich wird. So kann man $\sqrt{3a^2b} + \sqrt{3y^4b}$ in die Form bringen $\sqrt{a^2}\sqrt{3b} + \sqrt{y^4}\sqrt{3b}$, wofür man dann $a\sqrt{3b} + y^2\sqrt{3b} = (a + y^2)\sqrt{3b}$ schreiben kann. $\sqrt{28} + \sqrt{63} = \sqrt{4}\sqrt{7} + \sqrt{9}\sqrt{7} = 2\sqrt{7} + 3\sqrt{7} = 5\sqrt{7}$; $\sqrt[3]{5a^3b} + \sqrt[3]{40b} = \sqrt[3]{a^3} \cdot \sqrt[3]{5b} + \sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{5b} = (a + 2)\sqrt[3]{5b}$.

9. Radikanden, die die Form von Brüchen haben, formt man zweckmäßigerweise so um, daß man aus dem Nenner die Wurzel ohne weiteres ziehen kann, so daß nur noch die Radizierung des Zählers übrig bleibt. Zu dem Zwecke hat man den Bruch unter der Wurzel so zu erweitern, daß der Nenner z. B. bei einer Quadratwurzel ein Quadrat, bei einer Kubikwurzel ein Kubus wird. So ist

$$\sqrt{\tfrac{2}{3}} = \sqrt{\tfrac{6}{9}} = \tfrac{1}{3}\sqrt{6}; \quad \sqrt{\tfrac{5}{12}} = \sqrt{\tfrac{15}{36}} = \tfrac{1}{6}\sqrt{15}$$

$$\sqrt[3]{\tfrac{2}{3}} = \sqrt[3]{\tfrac{18}{27}} = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{18}; \quad \sqrt[3]{\tfrac{5}{12}} = \sqrt[3]{\tfrac{90}{216}} = \tfrac{1}{6}\sqrt[3]{90}.$$

10. Besonders ist vor dem Fehler zu warnen, daß man die Radizierung eines Aggregats an den einzelnen Gliedern vornimmt. Die Größe $\sqrt{a^2 + b^2}$ hat nicht etwa den Wert $a + b$, denn $(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ weist außer den Summanden a^2 und b^2 noch das

Digitized by Google

Glied $2ab$ auf. Ebenso kann $\sqrt[3]{a^3+b^3}$ nicht gleich $a+b$ sein, weil $(a+b)^3$ nicht den Wert a^3+b^3, sondern den Wert $a^3+3a^2b+3ab^2+b^3$ besitzt. Desgl. ist $\sqrt{16+9}$ nicht gleich $4+3=7$, sondern gleich $\sqrt{25}=5$.

11. Um Wurzeln miteinander multiplizieren zu können, muß man ihnen gleiche Wurzelexponenten verschaffen, was durch Anwendung der Formel IV ermöglicht wird. Wurzeln mit demselben Exponenten pflegt man als gleichnamig zu bezeichnen.

12. Wegen ihrer vielfachen Anwendung sind noch folgende Formeln einzuüben und zu merken:

$$(\sqrt{a}+\sqrt{b})\,(\sqrt{a}-\sqrt{b})=a-b$$
$$(a+\sqrt{b})\,(a-\sqrt{b})=a^2-b$$
$$(\sqrt{a}+b)\,(\sqrt{a}-b)=a-b^2.$$

Daraus folgt: $a-b$ ist teilbar durch $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ und $\sqrt{a}-\sqrt{b}$, a^2-b durch $a\pm\sqrt{b}$ usw.

13. Kommen im Nenner eines Bruches Summen oder Differenzen von Wurzelgrößen vor, so schafft man die Wurzeln aus dem Nenner dadurch fort, daß man für eine Summe den Bruch mit der entsprechenden Differenz, für eine Differenz den Bruch mit der entsprechenden Summe erweitert. So ist

$$\frac{1}{\sqrt{7}+\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{(\sqrt{7}+\sqrt{5})\,(\sqrt{7}-\sqrt{5})}=\frac{\sqrt{7}-\sqrt{5}}{2}$$

$$\frac{1}{2-\sqrt{3}}=\frac{2+\sqrt{3}}{(2-\sqrt{3})\,(2+\sqrt{3})}=\frac{2+\sqrt{3}}{1}=2+\sqrt{3}\ \text{usw.}$$

14. Eine Quadratwurzel hat zwei Werte, einen positiven und einen negativen, ist also doppeldeutig. So kann $\sqrt{a^2}$ sowohl den Wert $+a$, als auch den Wert $-a$ haben, da sowohl $(+a)^2$, als auch $(-a)^2$ wieder a^2 gibt. Ebenso kann $\sqrt{a^2-2ab+b^2}$ gleich $(a-b)$ oder gleich $(b-a)$ gesetzt werden, man schreibt dies in der Form $\sqrt{a^2-2ab+b^2}=\pm(a-b)$; $\sqrt{9}=\pm 3$. Da nach Formel V jede Wurzel von geradem Wurzelexponenten als Quadratwurzel aus einem anderen Wurzelausdruck angesehen werden kann, gilt diese Eigenschaft von allen Wurzeln mit geradem Exponenten (geraden Wurzeln), so ist z. B.

$$\sqrt[4]{81}=\sqrt{\sqrt{81}}=\sqrt{9}=\pm 3;\quad \sqrt[6]{64}=\sqrt{\sqrt[3]{64}}=\sqrt{4}=\pm 2.$$

15. Eine gerade Wurzel aus einer negativen Zahl ist eine unmögliche Größe, da auch negative Zahlen, in gerade Potenzen erhoben, einen positiven Wert erhalten. Eine solche negative unmögliche Größe ist z. B. $\sqrt{-9}$, da weder $+3$ noch -3 bei der Potenzierung mit 2 den Wert -9 ergibt. Ebenso ist allgemein $\sqrt[2n]{-a}$ eine un-

Digitized by Google

mögliche Größe. Man weiß von solcher Größe nur, daß sie mit $2n$ potenziert den Wert $-a$ ergibt. Solche unmögliche Größen werden imaginäre Größen genannt, im Gegensatz zu ihnen heißen alle anderen Größen reelle. Von den imaginären Größen wird in einem besonderen Abschnitt die Rede sein.

16. Unter Verwendung von solchen imaginären Größen kann man für jede Wurzel soviel Werte aufstellen, als der Wurzelexponent angibt. So hat also z. B. eine vierte Wurzel vier, eine fünfte Wurzel fünf Werte. Aber reell sind von diesen Werten höchstens zwei, nämlich in dem Falle, wo aus einem positiven Radikanden eine gerade Wurzel zu ziehen ist (s. vorst. Nr. 14.). Soll eine gerade Wurzel aus einem negativen Radikanden gezogen werden, so gibt es keine reelle Wurzel; ist der Wurzelexponent ungerade, so gibt es immer nur eine reelle Wurzel und zwar eine positive, wenn der Radikand selbst positiv, eine negative, wenn der Radikand selbst negativ ist. So ist z. B. $\sqrt[3]{+8} = +2$, $\sqrt[3]{-8} = -2$, weil $(+2)^3 = +8$, $(-2)^3 = -8$ ist.

17. Da die Radizierung keine eindeutige Operation ist, kann man nicht ohne weiteres behaupten, daß die Ausziehung der gleichen Wurzel aus gleichen Größen wieder zu gleichen Größen führt. Wenn $x^2 = a^2 - 2ab + b^2$, so hat man zwar $x = \sqrt{a^2 - 2ab + b^2}$; da aber diese Wurzel selbst die beiden Werte $+(a-b)$ und $-(a-b)$ haben kann, ist es noch zweifelhaft, welchem dieser Werte die Größe x gleich ist. Nur soviel steht fest, x muß entweder dem einen oder dem anderen Werte gleich sein. Ist also $a = b$, so kann man die aus dieser Gleichung durch Radizierung mit n entstehende Gleichung $\sqrt[n]{a} = \sqrt[n]{b}$ nur so auslegen, daß einer der n Werte von $\sqrt[n]{a}$ irgend einem der n Werte von $\sqrt[n]{b}$ gleich sein muß. In diesem Sinne zieht man aus dem zweiten Grundsatz in Abschnitt II, 2, die Folgerung:

Gleiches mit Gleichem radiziert gibt Gleiches.

B. Aufgaben.

1.	$\sqrt{1}$	$\sqrt{4}$	$\sqrt{9}$	$\sqrt{25}$	$\sqrt[3]{8}$	$\sqrt[3]{27}$	$\sqrt[3]{64}$	$\sqrt{64}$
2.	$\sqrt[n]{1}$	$\sqrt[n]{0}$	$\sqrt[4]{16}$	$\sqrt[4]{81}$	$\sqrt[5]{32}$	$\sqrt[6]{64}$	$\sqrt[7]{128}$	$\sqrt[10]{1024}$
3.	$\sqrt{9^2}$	$\sqrt{(9)^2}$	$\sqrt[3]{27^3}$	$(\sqrt[3]{27})^3$	$(\sqrt[4]{a})^4$	$\sqrt[x]{a^x}$	$\sqrt[3]{b^3}$	$\sqrt{b^4}$
4.	$\sqrt{a^{12}}$	$\sqrt[3]{a^{12}}$	$\sqrt[4]{a^{12}}$	$\sqrt[6]{a^{12}}$	$\sqrt{b^6}$	$\sqrt[3]{b^6}$	$\sqrt[6]{b^6}$	$\sqrt[n]{b^n}$
5.	$\sqrt[5]{a^{10}}$	$\sqrt[7]{a^{14}}$	$\sqrt[3]{a^9}$	$\sqrt[4]{a^8}$	$\sqrt[n]{a^{nx}}$	$\sqrt[n]{a^{2n}}$	$\sqrt[x]{a^{3x}}$	$\sqrt[7]{a^{7n}}$
6.	$3\sqrt{9}$	$5\sqrt{4}$	$2\sqrt{25}$	$5\sqrt{36}$	$5\sqrt[3]{8}$	$3\sqrt[3]{27}$	$5\sqrt[3]{64}$	$6\sqrt[6]{64}$
7.	$\frac{2}{3}\sqrt{81}$	$\frac{3}{4}\sqrt{64}$	$\frac{1}{3}\sqrt[3]{27}$	$\frac{2}{5}\sqrt{25}$	$\frac{1}{2}\sqrt[3]{8}$	$\frac{5}{7}\sqrt{49}$	$\frac{1}{4}\sqrt[5]{32}$	$\frac{1}{5}\sqrt{100}$
8.	$\sqrt{\frac{1}{9}}$	$\sqrt{\frac{4}{9}}$	$\sqrt{\frac{9}{16}}$	$\sqrt{\frac{9}{25}}$	$\sqrt{2\frac{1}{4}}$	$\sqrt{12\frac{1}{4}}$	$\sqrt{5\frac{4}{9}}$	$\sqrt{7\frac{1}{9}}$
9.	$\sqrt{x} \cdot \sqrt{x}$		$\sqrt{7a} \cdot \sqrt{7a}$	$(\sqrt{ab})^2$			$\sqrt{(a+b)^2}$	

Digitized by Google

10. $\sqrt{13x-15y}\cdot\sqrt{13x-15y}$ $\sqrt[3]{3x-3y}$ $\sqrt[3]{(x-y)^3}$
11. $(3\sqrt{2})^2$ $(2\sqrt{3})^2$ $(4\sqrt{5})^2$ $(5\sqrt{8})^2$
12. $(7\sqrt{a})^2$ $(x\sqrt{x})^2$ $(x\sqrt[3]{x})^3$ $(5\sqrt[3]{4})^3$
13. $(4\sqrt{a})^2+(3\sqrt{a-b})^2-(5\sqrt{x-a})^2+(2\sqrt{b})^2$
14. $(7\sqrt{a-b})^2+(5\sqrt{b-c})^2+(4\sqrt{c-a})^2-(3\sqrt{b-c})^2$
15. $(6\sqrt{a})^2-(10\sqrt{x})^2+(8\sqrt{a})^2-(10\sqrt{a-5x})^2-(20\sqrt{x})^2$
16. $(2\sqrt{3x-5})^2-(3\sqrt{4x+7})^2+(4\sqrt{2x-9})^2-(6\sqrt{\frac{2}{9}x-7})^2$.

---

17. $\sqrt{a^2b^4}$ $\sqrt[3]{a^3b^3}$ $\sqrt[4]{a^4b^8}$ $\sqrt{a^6b^{2n}}$
18. $\sqrt{4a^2}$ $\sqrt{25a^2b^2}$ $\sqrt{9(x-1)^2}$ $\sqrt[3]{125x^3}$
19. $\sqrt{x^2y^2}$ $\sqrt{x^2+y^2}$ $\sqrt{x^2-y^2}$ $\sqrt{(x-y)^2}$
20. $\sqrt{9+x^2}$ $\sqrt{(9+x)^2}$ $\sqrt{9x^2}$ $\sqrt{9-x^2}$
21. $\sqrt[3]{8x^3}$ $\sqrt[3]{8+x^3}$ $\sqrt[3]{(8-x)^3}$ $\sqrt[3]{8-x^3}$
22. $\sqrt{4a^2b^4c^6}$ $\sqrt{9a^6x^2}$ $\sqrt[3]{8a^3b^6}$ $\sqrt[3]{(8a^3b^6)^2}$
23. $\sqrt{a^2x}$*) $\sqrt{ax^2}$ $\sqrt{4x}$ $\sqrt{5x^2}$
24. $\sqrt{a^2b^4x}$ $\sqrt{a^4bx^2}$ $\sqrt{5a^2x^4}$ $\sqrt{16ax^2}$
25. $\sqrt[3]{a^3x}$ $\sqrt[3]{ax^3}$ $\sqrt[3]{8x}$ $\sqrt[3]{6x^3}$
26. $\sqrt[3]{8+x^3}$ $\sqrt[3]{8x^3}$ $\sqrt[3]{(8+x)^3}$ $\sqrt[3]{x^3-8}$
27. $\sqrt[3]{1+x^3}$ $\sqrt[3]{x^3-1}$ $\sqrt{(1-x)^2}$ $\sqrt[3]{(1+x)^3}$
28. $\sqrt[3]{27a}$ $\sqrt[3]{125x}$ $\sqrt[3]{9x^3}$ $\sqrt[3]{64a^3}$
29. $2\sqrt{4a}$ $3\sqrt{9x}$ $5\sqrt{16x}$ $7\sqrt{4x}$
30. $\frac{1}{2}\sqrt{4x}$ $\frac{3}{4}\sqrt{16x}$ $\frac{7}{10}\sqrt{25x}$ $\frac{5}{6}\sqrt{36x}$
31. $2\sqrt[3]{8a}$ $3\sqrt{9a^2}$ $5\sqrt[3]{64x}$ $2\sqrt[3]{30x^3}$
32. $\frac{1}{4}\sqrt[3]{8a}$ $\frac{5}{6}\sqrt[3]{27a}$ $\frac{3}{4}\sqrt[3]{64x}$ $\frac{1}{3}\sqrt[4]{81x}$
33. $\sqrt{a^3}$ $\sqrt[3]{a^4}$ $\sqrt[4]{a^6}$ $\sqrt[5]{a^8}$
34. $\sqrt{a^{2n}}$ $\sqrt{a^{2n+1}}$ $\sqrt[n]{a^{2n+1}}$ $\sqrt[n]{a^{3n+1}}$
35. $\sqrt{20}$ $\sqrt{48}$ $\sqrt{44}$ $\sqrt{99}$
36. $\sqrt{75}$ $\sqrt{50}$ $\sqrt{60}$ $\sqrt{80}$

---

*) In Nr. 23.—53. soll der Radikand auf die einfachste Form gebracht werden

Digitized by Google

37. $\sqrt{90}$ $\sqrt{63}$ $\sqrt{72}$ $\sqrt{84}$

38. $\sqrt{180}$ $\sqrt{343}$ $\sqrt{216}$ $\sqrt{275}$

39. $\sqrt{468}$ $\sqrt{539}$ $\sqrt{567}$ $\sqrt{720}$

40. $\sqrt[3]{24}$ $\sqrt[3]{32}$ $\sqrt[3]{81}$ $\sqrt[3]{56}$

41. $\sqrt[3]{-8}$ $\sqrt[3]{+8}$ $\sqrt{+9}$ $\sqrt{-9}$

42. $\sqrt{\frac{3}{4}}$ $\sqrt{\frac{1}{9}}$ $\sqrt{\frac{5}{9}}$ $\sqrt{\frac{9}{16}}$ $\sqrt{\frac{7}{16}}$ $\sqrt{\frac{4}{25}}$ $\sqrt{\frac{19}{25}}$ $\sqrt{\frac{7}{36}}$

43. $\sqrt{\frac{1}{3}}$ $\sqrt{\frac{2}{3}}$ $\sqrt{\frac{1}{5}}$ $\sqrt{\frac{4}{5}}$ $\sqrt{\frac{5}{6}}$ $\sqrt{\frac{3}{7}}$ $\sqrt{\frac{8}{19}}$ $\sqrt{\frac{9}{13}}$

44. $\sqrt{\frac{1}{8}}$ $\sqrt{\frac{5}{8}}$ $\sqrt{\frac{7}{12}}$ $\sqrt{\frac{25}{12}}$ $\sqrt{\frac{3}{32}}$ $\sqrt{\frac{9}{32}}$ $\sqrt{\frac{8}{27}}$ $\sqrt{\frac{4}{27}}$

45. $\sqrt{\frac{5}{0{,}7}}$ $\sqrt{\frac{8}{0{,}5}}$ $\sqrt{\frac{9}{0{,}3}}$ $\sqrt{\frac{7}{0{,}25}}$ $\sqrt{\frac{3}{7{,}5}}$ $\sqrt{\frac{9}{1{,}5}}$ $\sqrt{\frac{5}{2{,}5}}$ $\sqrt{\frac{9}{3{,}6}}$

46. $6\sqrt{\frac{1}{3}}$ $4\sqrt{\frac{3}{8}}$ $3\sqrt{\frac{8}{27}}$ $3\sqrt{\frac{7}{18}}$

47. $\sqrt{\frac{a}{b}}$ $\sqrt{\frac{a^2}{b}}$ $a\sqrt{\frac{x^2}{a}}$ $2\sqrt{\frac{a}{4b}}$

48. $\sqrt[3]{\frac{a}{b}}$ $\sqrt[3]{\frac{a}{b^3}}$ $\sqrt[4]{\frac{a}{b}}$ $\sqrt[4]{\frac{a}{b^3}}$

49. $\sqrt{64+36}$ $\sqrt{\frac{1}{64}+\frac{1}{36}}$ $\sqrt{\frac{64}{225}+1}$ $\sqrt{\frac{16}{225}+\frac{1}{4}}$

50. $\sqrt{a^2x-a^2y+4a^2}$ $\sqrt{3x^4-5x^3+x^2}$

51. $\sqrt{x^3-2x^2+x}$ $\sqrt{a^2x+2ax^2+x^3}$

52. $\sqrt{2a^2x^2-4acx^2+2c^2x^2}$ $\sqrt{25a^2x-30ax^3+9x^5}$

53. $\sqrt{\frac{4a^3-4a^2b+ab^2}{a^2b-4ab^2+4b^3}}$ $\sqrt{\frac{x^3-6x^2+9x}{9x^3-6x^2+x}}$

54. Wie groß sind $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$, $\sqrt{32}$, $\sqrt{50}$, $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{\frac{1}{8}}$, $\sqrt{4\frac{1}{2}}$, wenn $\sqrt{2}=a$ ist? Berechne $\sqrt{2}$, und suche daraus den Wert der anderen Wurzelgrößen.

55. Wie groß sind $\sqrt{24}$, $\sqrt{54}$, $\sqrt{96}$, $\sqrt{\frac{2}{3}}$, $\sqrt{\frac{3}{2}}$, $\sqrt{\frac{3}{8}}$, $\sqrt{2\frac{2}{3}}$, $\sqrt{4\frac{1}{6}}$, $\sqrt{8\frac{1}{6}}$, wenn $\sqrt{6}=a$ ist? Berechne $\sqrt{6}$, und bestimme daraus die Werte der anderen Wurzelgrößen.

56. Wie groß sind $\sqrt[3]{16}$, $\sqrt[3]{54}$, $\sqrt[3]{250}$, $\sqrt[3]{\frac{1}{4}}$, $\sqrt[3]{6\frac{3}{4}}$, wenn $\sqrt[3]{2}=a$ ist? Berechne $\sqrt[3]{2}$, und bestimme daraus die Werte der anderen Wurzelgrößen.

Wenn die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks mit c, die eine Kathete mit a bezeichnet wird, so hat man für die andere Kathete b die Gleichung

$$b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{(c+a)(c-a)}.$$

Digitized by Google

So ist für $c = 85\ m$, $a = 36\ m$

$$b = \sqrt{121 \cdot 49} = 11 \cdot 7 = 77\ m,$$

für $c = 85\ m$, $b = 77\ m$

$$a = \sqrt{162 \cdot 8} = \sqrt{81 \cdot 16} = 9 \cdot 4 = 36\ m \text{ oder auch}$$

$$a = \sqrt{162 \cdot 8} = \sqrt{324 \cdot 4} = 18 \cdot 2 = 36\ m.$$

Bestimme auf diesem Wege die Werte der zweiten Kathete in den rechtwinkligen Dreiecken mit den gegebenen Seiten.

56_1. $c = 17\ m$, $a = 8\ m$; $c = 41\ m$, $a = 9\ m$.

56_2. $c = 65\ m$, $a = 56\ m$; $c = 29\ m$, $a = 21\ m$.

56_3. $c = 221\ m$, $a = 140\ m$; $c = 325\ m$, $a = 323\ m$.

56_4. $c = 221\ m$, $a = 171\ m$; $c = 493\ m$, $a = 132\ m$.

56_5. $c = 493\ m$, $a = 468\ m$; $c = 485\ m$, $a = 476\ m$.

Die Fläche eines Dreiecks mit den Seiten $a\,b\,c$ und dem Umfang $2s = a + b + c$ hat nach der Heronischen Formel den Wert

$$F = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}.$$

Der Radius des diesem Dreieck einbeschriebenen Kreises findet sich durch die Formel

$$\varrho = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

Für das Dreieck mit den Seiten $a = 15\ m$, $b = 14\ m$, $c = 13\ m$ findet sich dann

$$F = \sqrt{21 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6} = \sqrt{7 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 7 \cdot 6} = 7 \cdot 2 \cdot 6 = 84\ qm$$

$$\varrho = \sqrt{\frac{8 \cdot 7 \cdot 6}{21}} = \sqrt{8 \cdot 2} = 4\ m.$$

56_6. 56_7. 56_8. 56_9. Bestimme durch Zerlegung solcher Art die Größe F für die Dreiecke mit den nachstehend angegebenen Seiten:

$a = 92\ m$, $b = 85\ m$, $c = 39\ m$; $a = 70\ m$, $b = 65\ m$, $c = 9\ m$;

$a = 52\ m$, $b = 41\ m$, $c = 15\ m$; $a = 55\ m$, $b = 51\ m$, $c = 26\ m$.

56_{10}. 56_{11}. 56_{12}. 56_{13}. Bestimme für diese selben Dreiecke den Wert von ϱ.

---

57. $2\sqrt{5} + 3\sqrt{5}$ $\quad 8\sqrt{7} + \sqrt{7}$ $\quad 9\sqrt{6} - \sqrt{6}$ $\quad \sqrt[3]{4} + 2\sqrt[3]{4}$

58. $\sqrt{5} + 3\sqrt{7}$ $\quad 1 + \sqrt{3}$ $\quad \sqrt[3]{a} + \sqrt[3]{b}$ $\quad 3\sqrt{a} - \sqrt{a}$

59. $a\sqrt{3} + b\sqrt{3}$ $\quad a\sqrt{5} - \sqrt{5}$ $\quad 3\sqrt{2} - 2\sqrt{3}$ $\quad 5\sqrt{x} - 4\sqrt[3]{x}$

60. $3\sqrt{5} - 2\sqrt{7} + \sqrt{9} - \sqrt{7} + 2\sqrt{5} - 3 - 4\sqrt{5} + 3\sqrt{7}$

Digitized by Google

61. $4\sqrt[3]{2} - 5\sqrt[3]{3} + \sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{8} + 4\sqrt{3} - 3\sqrt[3]{2} - \sqrt[3]{-8}$

62. $5\sqrt{4x} + 4\sqrt{x} - 6\sqrt{9x} - 8\sqrt{2x} + 8\sqrt{\tfrac{1}{4}x} + 4\sqrt{8x} + 1$

63. $6\sqrt{12a} + 6\sqrt{3b} - 4\sqrt{27a} - \sqrt{9b^3} - \sqrt{75b} + \sqrt[3]{27b^3}$

64. $3\sqrt{8x} - \sqrt{18x} - 5\sqrt{\tfrac{1}{2}x} + \sqrt{4\tfrac{1}{2}x} + \sqrt{50x} - \sqrt{32x} + \sqrt{72x}$

65. $\tfrac{1}{3}\sqrt{9a} + 3\sqrt{\tfrac{1}{4}a} - 6\sqrt{\tfrac{4}{9}a} + 2\sqrt{3a} + \sqrt{6\tfrac{1}{4}a} - \sqrt{12a}$

66. $\sqrt{0{,}5} + \sqrt{4{,}5} - \sqrt{12\tfrac{1}{2}} - \tfrac{1}{8}\sqrt{200} + \sqrt{242} + 6\sqrt{1\tfrac{1}{8}} - \sqrt{24{,}5}$

67. $6\sqrt{\tfrac{2}{3}} - 2\sqrt{\tfrac{5}{2}} + \sqrt{24} - \sqrt{96} - \sqrt{4\tfrac{1}{6}} + \sqrt{8\tfrac{1}{6}} + \sqrt{16\tfrac{2}{3}}$

68. $2\sqrt{27} - \sqrt{54} + \tfrac{1}{2}\sqrt{48} + 2\sqrt{75} + 5\sqrt{1\tfrac{1}{3}} - \sqrt{5\tfrac{1}{3}} + 4\tfrac{1}{2}\sqrt{2\tfrac{2}{3}}$

69. $\sqrt{0{,}2} + \sqrt{0{,}8} + \sqrt{20} - \sqrt{1\tfrac{4}{5}} + \sqrt{3\tfrac{1}{5}} - \sqrt{7\tfrac{1}{5}} + \sqrt{9{,}8} - \sqrt{1\tfrac{1}{4}}$

70. $\sqrt[3]{8} - \sqrt[3]{16} + 3\sqrt[3]{-2} - 2\sqrt[3]{\tfrac{1}{4}} + \sqrt[3]{54} - \sqrt[3]{-6\tfrac{3}{4}} - \sqrt[3]{2}$

71. $4\sqrt[3]{-3} - \sqrt[3]{\tfrac{8}{9}} + \sqrt[3]{\tfrac{3}{8}} - \sqrt[3]{7\tfrac{1}{9}} - \sqrt[3]{-0{,}375} + \sqrt[3]{46\tfrac{7}{8}}$

72. $\sqrt{(1+x)^2y} + \sqrt{(1-x)^2y} - \sqrt{(x-y)^2} - \sqrt{4y} + \sqrt{(x+y)^2}$

73. $\sqrt{4a^2-4b^2} + \sqrt{(a+b)^2} - 5\sqrt{a^2-b^2} + \sqrt{9a^2-9b^2} - \sqrt{(a-b)^2}$

74. $\sqrt{2x^2-4x+2} - \sqrt{8y^2-8y+2} + \sqrt{2x^2+4xy+2y^2}$

75. $\sqrt{a^2x-2abx+b^2x} - \sqrt{a^2x-2acx+c^2x} + \sqrt{b^2x+2bcx+c^2x}$

76.	$\sqrt{2}\cdot\sqrt{18}$	$\sqrt{3}\cdot\sqrt{5}$	$\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}$	$\sqrt{3}\cdot\sqrt{27}$
77.	$\sqrt{3}\cdot\sqrt{6}$	$\sqrt{5}\cdot\sqrt{15}$	$\sqrt{7}\cdot\sqrt{14}$	$\sqrt{24}\cdot\sqrt{6}$
78.	$\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{3}\cdot\sqrt[3]{9}$	$\sqrt[3]{16}\cdot\sqrt[3]{4}$	$\sqrt[3]{5}\cdot\sqrt[3]{25}$
79.	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{ab}$	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{a^3}$	$\sqrt{3x^2}\cdot\sqrt{3}$	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{9a}$
80.	$\sqrt[3]{a}\cdot\sqrt[3]{a^2}$	$\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{8x^2}$	$\sqrt[3]{3x^3}\cdot\sqrt[3]{9}$	$\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[n]{a^{n-1}}$
81.	$2\sqrt{a}\cdot 3\sqrt{a}$	$a\sqrt{2}\cdot b\sqrt{2}$	$a\sqrt{3}\cdot x\sqrt{2}$	$5\sqrt{a}\cdot 2\sqrt{x}$
82.	$\sqrt{3a}\cdot\sqrt{12a}$	$\sqrt{5y}\cdot\sqrt{20y}$	$\sqrt{8x^2}\cdot\sqrt{18}$	$\sqrt{9x}\cdot\sqrt{8x}$
83.	$\sqrt{a}\cdot\sqrt{\frac{x}{a}}$	$\sqrt{\frac{4a}{b}}\cdot\sqrt{\frac{b}{a}}$	$\sqrt{\frac{2a}{3b}}$ $\sqrt{\frac{2b}{3a}}$	$\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt{\frac{1}{3}}$
84.	$\sqrt{0{,}5}\cdot\sqrt{8x^2}$	$\sqrt{\frac{5a}{6}}\cdot\sqrt{\frac{3a}{10}}$	$\sqrt{2\tfrac{1}{2}a}\cdot\sqrt{\frac{0{,}4}{a}}$	$\sqrt{3\tfrac{1}{3}x}\cdot\sqrt{0{,}3x}$

85. $(\sqrt{2} - \sqrt{3} + \sqrt{8} - \sqrt{18} + 3\sqrt{\tfrac{1}{2}} - \sqrt{0{,}5} + 3\sqrt{\tfrac{1}{3}})\sqrt{2}$

86. $(\sqrt{3} - \sqrt{2} + \sqrt{12} - \sqrt{27} + 2\sqrt{\tfrac{1}{2}} - 2\sqrt{\tfrac{1}{3}} + 5\sqrt{1\tfrac{1}{3}})\sqrt{3}$

87. $(2\sqrt{5} - 3\sqrt{20} + 3\sqrt{45} - \sqrt{80} - 3\sqrt{0{,}2} - \sqrt{\tfrac{4}{5}})\sqrt{5}$

Digitized by Google

88. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{5})$ $(\sqrt{3}+\sqrt{5})(\sqrt{15}-1)$
89. $(\sqrt{3}-\sqrt{2})(\sqrt{6}+1)$ $(5+\sqrt{6})(5\sqrt{2}-2\sqrt{3})$
90. $(2+\sqrt{6})(3-\sqrt{6})$ $(3+\sqrt{15})(5-\sqrt{15})$
91. $(\sqrt{8}+4)(2-\sqrt{2})$ $(\sqrt{3}+6)(\sqrt{12}-1)$
92. $(a+\sqrt{x})(a-\sqrt{x})$ $(\sqrt{a}+3)(\sqrt{a}-3)$
93. $(\sqrt{a}+\sqrt{x})(\sqrt{a}-\sqrt{x})$ $(2\sqrt{a}+3\sqrt{x})(2\sqrt{a}-3\sqrt{x})$
94. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})(\sqrt{5}-\sqrt{3})$ $(\sqrt{7}+\sqrt{6})(\sqrt{7}-\sqrt{6})$
95. $(8+3\sqrt{7})(8-3\sqrt{7})$ $(5\sqrt{2}+4\sqrt{3})(5\sqrt{2}-4\sqrt{3})$
96. $(5+2\sqrt{6})(5-2\sqrt{6})$ $(3\sqrt{5}+2\sqrt{10})(3\sqrt{5}-2\sqrt{10})$
97. $(\sqrt{a+b}+\sqrt{b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{b})$
98. $(\sqrt{a+b}+\sqrt{a-b})(\sqrt{a+b}-\sqrt{a-b})$
99. $(\sqrt{x}+\sqrt{x-1})(\sqrt{x}-\sqrt{x-1})$
100. $\sqrt{3+2\sqrt{2}}\cdot\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ $\sqrt{5-2\sqrt{6}}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{6}}$
101. $\sqrt[3]{6+2\sqrt{7}}\cdot\sqrt[3]{6-2\sqrt{7}}$ $\sqrt[3]{6\sqrt{3}+9}\cdot\sqrt[3]{6\sqrt{3}-9}$
102. $(1+\sqrt{3})^2$ $(2-\sqrt{2})^2$ $(\sqrt{3}-\sqrt{5})^2$ $(\sqrt{8}-\sqrt{2})^2$
103. $(\sqrt{2}+\sqrt{\frac{1}{2}})^2$ $(\sqrt{\frac{2}{3}}+\sqrt{\frac{3}{2}})^2$ $(\sqrt{3}-\sqrt{\frac{1}{3}})^2$ $(\sqrt{5}-\sqrt{0{,}2})^2$
104. $(\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1})^2$ $(x+\sqrt{1-x^2})^2$
105. $(\sqrt{x}+\sqrt{1-x})^2$ $(2\sqrt{x}+\sqrt{3-4x})^2$
106. $(2\sqrt{x-1}+\sqrt{3x+4})^2$ $(3\sqrt{x-2}+2\sqrt{x+3})^2$
107. $\left(\sqrt{2+\sqrt{3}}+\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$ $\left(\sqrt{3+2\sqrt{2}}-\sqrt{3-2\sqrt{2}}\right)^2$
108. $\left(\sqrt{6+2\sqrt{5}}-\sqrt{6-2\sqrt{5}}\right)^2$ $\left(\sqrt{9+4\sqrt{2}}+\sqrt{9-4\sqrt{2}}\right)^2$
109. $(\sqrt{a+b+x}+\sqrt{a+b-x})^2$
110. $(\sqrt{(x+1)(y+1)}+\sqrt{(x-1)(y-1)})^2$
111. $(2+\sqrt{3}+\sqrt{7})(2+\sqrt{3}-\sqrt{7})$
112. $(\sqrt{3}+\sqrt{5}+2\sqrt{2})(\sqrt{3}+\sqrt{5}-2\sqrt{2})$
113. $(2\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7})(2\sqrt{3}-\sqrt{5}+\sqrt{7})$
114. $(\sqrt{6}+2\sqrt{3}-3\sqrt{2})(\sqrt{6}-2\sqrt{3}-\sqrt{2})$
115. $(5+2\sqrt{10}+\sqrt{15})(3-2\sqrt{6}+\sqrt{15})$
116 $(4+\sqrt{6}+\sqrt{22})(3+2\sqrt{6}-\sqrt{33})$

Digitized by Google

117. $(\sqrt{10}+\sqrt{8}-3\sqrt{2})(\sqrt{2}+\sqrt{1{,}6}+3\sqrt{0{,}4})$

118. $(\sqrt{3\tfrac{1}{5}}+\sqrt{2}+1\tfrac{1}{5}\sqrt{3})(\sqrt{2}+\sqrt{1\tfrac{1}{5}}-4\sqrt{0{,}2})$

119. $\sqrt{x^2+x}\cdot\sqrt{ax+a}$ $\quad\sqrt{12x^3-12x}\cdot\sqrt{3x^2-3}$

120. $\sqrt{x^2-x}\cdot\sqrt{x^4+x^3}$ $\quad\sqrt{ax+a}\cdot\sqrt{bx+b}$

121. $\sqrt{a^2-b^2}\cdot\sqrt{\dfrac{a+b}{a-b}}$ $\quad\sqrt{6x^2-6}\cdot\sqrt{\dfrac{3x-3}{2x+2}}$

122. $(3+\sqrt{2})^3$ $\quad(\sqrt{2}-1)^3$ $\quad(3+\sqrt{5})^3$ $\quad(\sqrt{5}-2)^3$

123. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})^3$ $\quad(\sqrt{5}-\sqrt{3})^3$ $\quad(\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{2})^3$ $\quad(\sqrt[3]{x}-1)^3$

124. $(\sqrt{5}+\sqrt{3})^2+(\sqrt{5}-\sqrt{3})^2$ $\quad(\sqrt{3}+\sqrt{0{,}5})^2+(\sqrt{3}-\sqrt{0{,}5})^2$

125. $(1+\sqrt{2})^3+(1-\sqrt{2})^3$ $\quad(2+\sqrt{3})^3+(2-\sqrt{3})^3$

126. $(1+\sqrt{x})^3+(1-\sqrt{x})^3$ $\quad(\sqrt{x}+3)^3-(\sqrt{x}-3)^3$

127. $(\sqrt{a}+\sqrt{b})^4+(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4$ $\quad(\sqrt{5}+\sqrt{0{,}2})^4-(\sqrt{5}-\sqrt{0{,}2})^4$

128. $(1+\sqrt{x})^4+(1-\sqrt{x})^4$ $\quad(3+\sqrt{x})^4-(3-\sqrt{x})^4$

---

129. $\dfrac{\sqrt{15}}{\sqrt{5}}$ $\quad\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ $\quad\dfrac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}$ $\quad\dfrac{\sqrt{24}}{\sqrt{6}}$ $\quad\dfrac{\sqrt{45}}{\sqrt{5}}$ $\quad\dfrac{\sqrt{63}}{\sqrt{7}}$ $\quad\dfrac{\sqrt{81}}{\sqrt{3}}$ $\quad\dfrac{\sqrt{112}}{\sqrt{7}}$

130. $\dfrac{\sqrt{3a}}{\sqrt{a}}$ $\quad\dfrac{\sqrt{5x}}{\sqrt{5}}$ $\quad\dfrac{\sqrt{7x^3}}{\sqrt{7}}$ $\quad\dfrac{\sqrt{9b}}{\sqrt{b}}$ $\quad\dfrac{\sqrt{12a}}{\sqrt{3a}}$ $\quad\dfrac{\sqrt[3]{6a^4}}{\sqrt[3]{2a}}$ $\quad\dfrac{\sqrt[3]{x^5}}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad\dfrac{\sqrt[3]{x^{4n}}}{\sqrt[3]{x^n}}$

131. $\dfrac{x}{\sqrt{x}}$ $\quad\dfrac{2a}{\sqrt{a}}$ $\quad\dfrac{5}{\sqrt{5}}$ $\quad\dfrac{6}{\sqrt{3}}$ $\quad\dfrac{8}{\sqrt{2}}$ $\quad\dfrac{12}{5\sqrt{3}}$ $\quad\dfrac{18}{7\sqrt{6}}$ $\quad\dfrac{20}{3\sqrt{10}}$

132. $\dfrac{x}{\sqrt[3]{x}}$ $\quad\dfrac{x}{\sqrt[3]{x^2}}$ $\quad\dfrac{x}{\sqrt[4]{x}}$ $\quad\dfrac{x}{\sqrt[4]{x^3}}$ $\quad\dfrac{1-x^2}{\sqrt{1-x}}$ $\quad\dfrac{a^2-b^2}{\sqrt{a^2-b^2}}$

133. $\sqrt{4x}:\sqrt{x}$ $\quad\sqrt{a^2x}:\sqrt{x}$ $\quad\sqrt{a^2b}:\sqrt{ab}$ $\quad\sqrt{6x}:\sqrt{2x}$

134. $\sqrt{12}:\sqrt{3}$ $\quad\sqrt{96}:\sqrt{6}$ $\quad\sqrt{60}:\sqrt{5}$ $\quad\sqrt{99}:\sqrt{22}$

135. $3\sqrt{2}:2\sqrt{3}$ $\quad3\sqrt{5}:\sqrt{15}$ $\quad2\sqrt{10}:\sqrt{20}$ $\quad5\sqrt{2}:\sqrt{10}$

136. $\sqrt{15}:\sqrt{\frac{3}{5}}$ $\quad\sqrt{\frac{5}{3}}:\sqrt{15}$ $\quad\sqrt{21}:\sqrt{\frac{7}{3}}$ $\quad\sqrt{30}:\sqrt{\frac{5}{6}}$

137. $\sqrt{a}:\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $\quad\sqrt{ab}:\sqrt{\dfrac{a}{b}}$ $\quad x\sqrt{y}:\sqrt{\dfrac{x}{y}}$ $\quad\sqrt{10x}:\sqrt{\frac{2}{5}x}$

138. $(1-x):(1-\sqrt{x})$ $\quad(ax-bx):(\sqrt{a}-\sqrt{b})$

139. $\left(1-\dfrac{1}{x}\right):(1+\sqrt{x})$ $\quad\left(\dfrac{a}{b}-\dfrac{x}{y}\right):\left(\sqrt{\dfrac{a}{x}}-\sqrt{\dfrac{b}{y}}\right)$

140. $(1-x\sqrt{x}):(1-\sqrt{x})$ $\quad(a\sqrt{a}+b\sqrt{b}):(\sqrt{a}+\sqrt{b})$

Digitized by Google

141. $\left(\frac{a}{\sqrt{b}}+\frac{b}{\sqrt{a}}\right):\left(\frac{1}{\sqrt{a}}+\frac{1}{\sqrt{b}}\right)$ $\left(x\sqrt{\frac{x}{y}}-y\right):\left(1-\sqrt{\frac{y}{x}}\right)$

142. $(x\sqrt[3]{x}-y\sqrt[3]{y}):(\sqrt[3]{x}-\sqrt[3]{y})$ $(x\sqrt[3]{x}-y\sqrt[3]{y}):(\sqrt[3]{x}+\sqrt[3]{y})$

---

143. $\frac{6}{2+\sqrt{2}}$*) $\frac{14}{3-\sqrt{2}}$ $\frac{12}{3+\sqrt{5}}$ $\frac{15}{3-\sqrt{6}}$

144. $\frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ $\frac{4}{\sqrt{7}-\sqrt{3}}$ $\frac{6}{\sqrt{5}+\sqrt{8}}$ $\frac{14}{\sqrt{3}-\sqrt{10}}$

145. $\frac{9}{2\sqrt{3}-3}$ $\frac{6}{3\sqrt{2}+4}$ $\frac{17}{3\sqrt{5}-2\sqrt{7}}$ $\frac{15}{5\sqrt{3}-3\sqrt{5}}$

146. $\frac{3+2\sqrt{2}}{3-2\sqrt{2}}$ $\frac{3+\sqrt{5}}{3-\sqrt{5}}$ $\frac{\sqrt{5}+\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}$ $\frac{8-3\sqrt{7}}{8+3\sqrt{7}}$

146_1. $\frac{7\sqrt{3}-5\sqrt{11}}{8\sqrt{3}-7\sqrt{11}}$ $\frac{3\sqrt{5}-2\sqrt{2}}{2\sqrt{5}-3\sqrt{2}}$ $\frac{4+2\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{6}+\sqrt{7}}$

147. $\frac{2\sqrt{3}+\sqrt{21}-3}{2+\sqrt{3}-\sqrt{7}}$ $\frac{1+\sqrt{2}+\sqrt{3}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}+2}$

148. $\frac{3\sqrt{5}-5\sqrt{3}+2\sqrt{30}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}-2\sqrt{2}}$ $\frac{5+2\sqrt{15}+\sqrt{35}}{2\sqrt{3}+\sqrt{5}-\sqrt{7}}$

148_1. $\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}-\sqrt{2}}{\sqrt{5}+\sqrt{3}+\sqrt{2}}$ $\frac{3\sqrt{3}+\sqrt{13}+\sqrt{14}}{3\sqrt{3}-\sqrt{13}-\sqrt{14}}$

---

149. $\sqrt{9^3}$ $\sqrt[3]{8^2}$ $\sqrt{4^3}$ $\sqrt[3]{27^2}$

150. $\sqrt{121^3}$ $\sqrt[3]{216^2}$ $\sqrt[4]{81^3}$ $\sqrt[5]{32^3}$

151. $\sqrt[8]{a^4}$ $\sqrt[6]{a^3}$ $\sqrt[6]{a^{12}}$ $\sqrt[4]{a^6}$ $\sqrt[6]{a^{3n}}$ $\sqrt[n]{a^{3n}}$ $\sqrt[4]{a^{2n}}$ $\sqrt[6]{a^{15}}$

152. $\sqrt[4]{a^6+b^6}$ $\sqrt[2x]{(a^3+b^3)^x}$ $\sqrt[2x]{a^{3x}+b^{3x}}$ $\sqrt[3x]{a^3b^3}$

---

153. $a\sqrt{x}$**) $3\sqrt{2}$ $5\sqrt{0{,}2}$ $2a\sqrt{3x}$

154. $x\sqrt{\frac{5}{x}}$ $3\sqrt{\frac{1}{3}}$ $2\sqrt{\frac{3}{4}}$ $3a\sqrt{\frac{2x}{3}}$

155. $a\sqrt[3]{x}$ $2\sqrt[3]{5}$ $5\sqrt[3]{2}$ $3\sqrt[3]{3}$

156. $a\sqrt[3]{\frac{x}{a}}$ $x\sqrt[3]{\frac{a}{x^2}}$ $2\sqrt[3]{\frac{3}{4}}$ $3\sqrt[3]{\frac{5}{9}}$

---

*) In Nr. 143.—148. sollen die Wurzeln aus dem Nenner fortgeschafft werden.

**) In Nr. 153.—158. soll der Faktor vor der Wurzel unter die Wurzel gebracht werden.

Digitized by Google

157. $(\sqrt{3}+\sqrt{2})\sqrt{5-2\sqrt{6}}$ $(\sqrt{5}+\sqrt{2})\sqrt{7-2\sqrt{10}}$

158. $(2-\sqrt{3})\sqrt{7+4\sqrt{3}}$ $(3-2\sqrt{2})\sqrt{17+12\sqrt{2}}$

---

159. $\sqrt{a}\cdot\sqrt[3]{a}$ $\sqrt{b}\cdot\sqrt[4]{b}$ $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[6]{x}$ $\sqrt{x}\cdot\sqrt[6]{y}$

160. $\sqrt{a}\cdot\sqrt[8]{a}$ $\sqrt[3]{b}\cdot\sqrt[9]{b}$ $\sqrt[5]{c}\cdot\sqrt[10]{c}$ $\sqrt{x}\cdot\sqrt[7]{y}$

161. $\sqrt[n]{x}\cdot\sqrt[2n]{x}$ $\sqrt{x}\cdot\sqrt[2n]{x}$ $\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3n]{x}$ $\sqrt[n]{a}\cdot\sqrt[3n]{a}$

162. $\sqrt{\frac{2}{3}}\cdot\sqrt[3]{\frac{3}{2}}$ $\sqrt{\frac{3}{4}}\cdot\sqrt[4]{\frac{4}{3}}$ $\sqrt{\frac{a}{x}}\cdot\sqrt[3]{\frac{x}{a}}$ $\sqrt{a}\cdot\sqrt[4]{\frac{x}{a}}$

163. $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[3]{x}}$ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[4]{x}}$ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[6]{x}}$ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[8]{x}}$ $\frac{\sqrt[3]{a}}{\sqrt[6]{a}}$ $\frac{\sqrt[3]{c}}{\sqrt[4]{c}}$ $\frac{\sqrt{x}}{\sqrt[7]{x}}$ $\frac{\sqrt[5]{x}}{\sqrt[10]{x}}$

---

164. $\sqrt{\sqrt[3]{x}}$ $\sqrt[3]{\sqrt{a}}$ $\sqrt[4]{\sqrt{x}}$ $\sqrt{\sqrt[5]{x}}$

165. $\sqrt[3]{\sqrt{a^3}}$ $\sqrt{\sqrt[3]{a^2}}$ $\sqrt[5]{\sqrt{c^5}}$ $\sqrt{\sqrt[5]{x^4}}$

166. $\sqrt{\sqrt[3]{4}}$ $\sqrt[3]{\sqrt{8}}$ $\sqrt[3]{\sqrt{16}}$ $\sqrt[3]{\sqrt{125}}$

167. $\sqrt[4]{16}$, $\sqrt[4]{9}$ $\sqrt[4]{900}$ $\sqrt[6]{27}$ $\sqrt[6]{81}$

168. $\sqrt[6]{125}$ $\sqrt[6]{144}$ $\sqrt[9]{216}$ $\sqrt[10]{32}$, $\sqrt[12]{64}$

169. $\sqrt[3]{a\sqrt{a}}$ $\sqrt[5]{a^2\sqrt{a}}$ $\sqrt{a\sqrt[3]{a}}$ $\sqrt[4]{a\sqrt[3]{a}}$

170. $\sqrt[5]{a\sqrt[4]{a}}$ $\sqrt[5]{a\sqrt[3]{a^2}}$ $\sqrt{a\sqrt[5]{a}}$ $\sqrt[3]{a\sqrt[5]{a}}$

Es ist

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+r}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-r}{2}}\quad\text{für } r=\sqrt{a^2-b},$$

wie man leicht sieht, wenn man links und rechts quadriert. Es wird sich $\sqrt{a\pm\sqrt{b}}$ in zwei einfache Quadratwurzeln zerlegen lassen, wenn a^2-b ein Quadrat ist. Sonst ist die Anwendung der Formel zwecklos. Wende die Formel an auf:

171. $\sqrt{2+\sqrt{3}}$ $\sqrt{3-\sqrt{5}}$ $\sqrt{4+\sqrt{7}}$ $\sqrt{6-\sqrt{11}}$

172. $\sqrt{3-2\sqrt{2}}$ $\sqrt{4+2\sqrt{3}}$ $\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ $\sqrt{7+2\sqrt{6}}$

Auch folgende Formeln können durch Anwendung der obigen Formeln vereinfacht werden; man kommt jedoch leichter und schneller zum Ziel, wenn man den Ausdruck quadriert und aus dem Resultat wieder die Wurzel zieht.

Digitized by Google

173. $\sqrt{3+\sqrt{5}}+\sqrt{3-\sqrt{5}}$ $\quad\sqrt{2+\sqrt{3}}-\sqrt{2-\sqrt{3}}$

174. $\sqrt{6+2\sqrt{5}}+\sqrt{6-2\sqrt{5}}$ $\quad\sqrt{5+3\sqrt{2}}-\sqrt{5-3\sqrt{2}}$

175. $\sqrt{7+4\sqrt{3}}+\sqrt{7-4\sqrt{3}}$ $\quad\sqrt{8+2\sqrt{7}}-\sqrt{8-2\sqrt{7}}$.

XVI. Bruchpotenzen.

A. Theorie.

Das fünfte Potenzgesetz (Abschnitt XI) läßt sich in der Form aussprechen: Die Potenzierung einer Potenz läßt sich durch Multiplikation ihres Exponenten ersetzen. ($(a^p)^q = a^{pq}$.) Da die Potenzierung durch die Radizierung, die Multiplikation durch die Division aufgehoben wird, muß dann umgekehrt auch die Radizierung einer Potenz durch die Division ihres Exponenten ersetzbar sein.

Dieser Satz ergibt nichts neues, wenn der Wurzelexponent im Potenzexponenten als Faktor enthalten ist, denn schon im Abschnitt XV, Nr. 2. zeigte sich, daß $\sqrt[n]{a^{nx}} = a^{\frac{nx}{n}}$ ist, weil beide Ausdrücke denselben Wert a^x besitzen. Für den Fall, daß die Division des Potenzexponenten durch den Wurzelexponenten keine ganze Zahl ergibt, bringt dieser Satz eine Erweiterung des Potenzbegriffs, er lehrt, daß dem neu auftretenden Ausdrucke $a^{\frac{m}{n}}$ die Bedeutung $\sqrt[n]{a^m}$ zukommt. In Worten bedeutet demnach eine Potenz mit gebrochenem Exponenten eine Wurzel vom Grade des Nenners aus einer Potenz vom Grade das Zählers.

Man kann, um den Sinn des neu auftretenden Ausdrucks $a^{\frac{m}{n}}$ zu ermitteln, auch so verfahren, daß man auf diesen die Form einer Potenz aufweisenden Ausdruck die Potenzgesetze anwendet. Dann hat man in Gemäßheit des fünften Potenzgesetzes die Gleichung

$$(a^{\frac{m}{n}})^n = a^{\frac{m}{n}\cdot n} = a^m, \text{ also } a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$$

und erkennt auch auf diese Weise, daß der Ausdruck $a^{\frac{m}{n}}$ nichts anderes ist, als eine neue Schreibweise für die Größe $\sqrt[n]{a^m}$, die auf diese Art die Form einer Potenz erhält und dadurch allen aus der Lehre von der Potenzrechnung entspringenden Rechnungsvereinfachungen zugänglich wird. Solche Potenzen mit gebrochenen Exponenten, oder Potenzen, deren Exponenten Brüche sind, nennt man auch kurz Bruchpotenzen.*)

Beweise, indem du die Bruchpotenzen durch Wurzelausdrücke ersetzest, die Richtigkeit der folgenden Formeln:

---

*) Daß man die Wurzeln als Potenzen mit Bruchexponenten auffassen kann, ist zuerst von Newton bemerkt worden.

Digitized by Google

1. $a^{\frac{m}{n}} \cdot a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{p}{q}}$

2. $\dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{a^{\frac{p}{q}}} = a^{\frac{m}{n}-\frac{p}{q}}$

3. $(ab)^{\frac{m}{n}} = a^{\frac{m}{n}} \cdot b^{\frac{m}{n}}$

4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{\frac{m}{n}} = \dfrac{a^{\frac{m}{n}}}{b^{\frac{m}{n}}}$

5. $\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{p}{q}}$.

B. Aufgaben.

Stelle in folgenden Ausdrücken die Wurzeln als Bruchpotenzen und die Bruchpotenzen als Wurzeln dar.

1. $\sqrt[4]{a^3}$, $\sqrt[4]{a}$, $\sqrt{x}$, $\sqrt[3]{x^2}$ $\sqrt{x^3}$, $\sqrt[4]{a^2}$ $\sqrt{a^n}$, $\sqrt[3]{a}$
2. $\sqrt[5]{x+y}$ $\sqrt[3]{x-y}$ $\sqrt[3]{a^2+b^2}$ $\sqrt[3]{(a+b)^2}$
3. $\sqrt{a^2b^2}$ $\sqrt{9a^2+4b^2}$ $\sqrt[3]{(a+b)x}$ $\sqrt[4]{a+x^3}$
4. $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{2}{3}}$, $b^{\frac{3}{4}}$, $b^{\frac{1}{4}}$ $c^{\frac{2}{5}}$, $c^{\frac{1}{5}}$, $x^{\frac{1}{n}}$, $x^{\frac{n}{2}}$
5. $a^{-\frac{1}{2}}$, $b^{-\frac{2}{3}}$, $c^{1\frac{1}{2}}$, $c^{-2\frac{1}{2}}$ $x^{0,5}$, $x^{0,2}$ $x^{-0,5}$, $x^{-0,3}$
6. $(a+b)^{\frac{1}{2}}$ $(a^2-b^2)^{\frac{1}{2}}$ $(8x^3-y^3)^{\frac{2}{3}}$ $(8x^3y^3)^{\frac{2}{3}}$

Berechne oder vereinfache folgende Ausdrücke:

7. $49^{\frac{1}{2}}$ $8^{\frac{1}{3}}$ $16^{\frac{3}{4}}$ $8^{\frac{2}{3}}$ $9^{\frac{3}{2}}$ $27^{\frac{1}{3}}$ $27^{\frac{2}{3}}$ $32^{\frac{3}{5}}$
8. $64^{\frac{1}{2}}$ $64^{\frac{3}{2}}$ $64^{\frac{2}{3}}$ $64^{\frac{1}{6}}$ $64^{\frac{5}{6}}$ $81^{\frac{1}{4}}$ $81^{\frac{3}{4}}$ $100^{\frac{3}{2}}$
9. $36^{0,5}$, $32^{0,2}$, $32^{0,4}$, $16^{-\frac{1}{2}}$, $81^{-\frac{3}{4}}$, $64^{-\frac{2}{3}}$, $64^{-\frac{5}{6}}$
10. $(\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}}$ $(2\frac{1}{4})^{-\frac{3}{2}}$ $(3\frac{3}{8})^{-\frac{1}{3}}$ $(\frac{1}{16})^{-\frac{1}{4}}$ $(0{,}008)^{-\frac{2}{3}}$ $(0{,}0081)^{-\frac{3}{4}}$

---

11. $a^{\frac{1}{2}} \cdot a^{\frac{1}{4}}$ $b^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{3}}$ $c^{\frac{1}{2}} \cdot c^{-\frac{1}{4}}$ $x^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{6}}$
12. $a \cdot a^{-\frac{1}{2}}$ $a \cdot a^{-\frac{2}{3}}$ $x^{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{x}$ $x^{\frac{2}{3}} \cdot \sqrt[3]{x}$
13. $a^0 \cdot a^{\frac{3}{4}}$, $a^0 \cdot a^{-\frac{3}{4}}$, $x^{\frac{1}{3}} \cdot x^{-\frac{1}{2}}$ $x \cdot x^{-\frac{4}{3}}$
14. $a^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[5]{a^3}$, $b^{\frac{1}{5}} \cdot \sqrt[5]{b^{-1}}$ $c^{\frac{1}{6}} \cdot \sqrt[6]{c^5}$, $d^{\frac{1}{8}} \cdot \sqrt[8]{d^{-5}}$
15. (13.) $a^{\frac{1}{2}} : a^{\frac{1}{4}}$ $b^{\frac{1}{2}} : b^{\frac{1}{3}}$ $c^{\frac{1}{2}} : c^{\frac{1}{6}}$ $x^{\frac{1}{3}} : x^{\frac{1}{12}}$

Digitized by Google

16. $\frac{x^{\frac{7}{15}}}{x^{\frac{1}{5}}}$, $\frac{y^{\frac{3}{4}}}{y^{\frac{7}{12}}}$, $\frac{u^{\frac{13}{18}}}{u^{\frac{7}{18}}}$, $\frac{v^{\frac{3}{5}}}{v^{\frac{9}{20}}}$

17. $\frac{m^{\frac{5}{6}}}{m^{\frac{4}{5}}}$, $\frac{n^{\frac{5}{8}}}{n^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{p^{\frac{5}{12}}}{p^{\frac{3}{4}}}$, $\frac{q^{\frac{7}{9}}}{q^{\frac{2}{3}}}$,

18. (14.) $a : a^{-\frac{1}{2}}$ $a : a^{-\frac{2}{3}}$ $x^{\frac{1}{2}} : \sqrt{x}$ $x^{\frac{2}{3}} : \sqrt[3]{x}$

19. (15.) $a^{\frac{1}{2}} : \sqrt[3]{a}$ $\sqrt{a} : a^{-\frac{1}{2}}$ $\sqrt[3]{x} : x^{-\frac{2}{3}}$ $\sqrt[4]{x} : x^{-\frac{1}{4}}$

20. $\frac{a^{\frac{3}{4}}}{\sqrt[4]{a}}$, $\frac{a^{\frac{7}{8}}}{\sqrt[4]{a^3}}$, $\frac{a^{\frac{7}{12}}}{\sqrt[3]{a^2}}$, $\frac{a^{\frac{5}{6}}}{\sqrt{a}}$,

21. $\frac{\sqrt[3]{x^2}}{x^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{\sqrt[4]{x^3}}{x^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{\sqrt[12]{x^5}}{x^{\frac{1}{3}}}$ $\frac{\sqrt[5]{x^3}}{x^{\frac{11}{20}}}$

22. $a^{\frac{1}{2}} \cdot b^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{4}} \cdot b^{\frac{1}{4}}$, $c^{\frac{3}{5}} \cdot d^{\frac{2}{5}}$ $c^{\frac{5}{6}} \cdot d^{\frac{1}{6}}$

23. $m^{\frac{1}{3}} \cdot n^{\frac{1}{2}}$, $m^{\frac{1}{6}} \cdot n^{\frac{1}{3}}$, $p^{\frac{1}{10}} \cdot q^{\frac{1}{5}}$, $p^{\frac{5}{6}} \cdot q^{\frac{2}{3}}$

24. $a^{\frac{3}{2}} b^{\frac{1}{2}} c^{\frac{3}{2}} \cdot a^{-\frac{1}{2}} b^{\frac{1}{2}}\ c^{-\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{2}{3}} b^{\frac{3}{2}} c^{-\frac{3}{4}} \cdot a^{\frac{1}{3}} b^{-\frac{3}{2}} c^{\frac{1}{2}} d$

25. $x^{\frac{2}{3}} y^{-\frac{1}{3}} z^{\frac{5}{6}} \cdot x^{-\frac{1}{3}} y^{\frac{1}{3}} z^{-\frac{2}{3}}$ $x^{\frac{3}{8}} y^{\frac{3}{4}} z^{\frac{1}{2}} \cdot x^{-\frac{1}{8}} y^{-\frac{1}{2}} z^{-\frac{1}{2}}$

26. $\frac{a^{\frac{3}{2}}}{b^{\frac{1}{2}}}$, $\frac{a^{\frac{3}{5}}}{b^{\frac{2}{5}}}$, $\frac{a^{\frac{5}{7}}}{b^{\frac{5}{7}}}$, $\frac{a^{\frac{7}{8}}}{b^{\frac{5}{8}}}$,

27. $\frac{x^{\frac{3}{2}}}{y^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{x^{\frac{5}{6}}}{y^{\frac{1}{3}}}$, $\frac{u^{\frac{1}{3}}}{v^{\frac{1}{4}}}$, $\frac{u^{\frac{1}{15}}}{v^{\frac{2}{5}}}$,

28. (16.) $(3\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}} \cdot (1\frac{1}{2})^{\frac{1}{2}} \cdot 5^{\frac{1}{2}}$, $(4\frac{1}{2})^{\frac{1}{3}} \cdot (\frac{3}{5})^{\frac{1}{3}} \cdot (\frac{5}{4})^{\frac{1}{3}}$

29. $(\frac{3}{5})^{\frac{1}{2}} \cdot (\frac{2}{3})^{\frac{1}{2}} \cdot (3\frac{1}{3})^{\frac{1}{2}}$, $(7\frac{1}{2})^{\frac{2}{3}} \cdot (2\frac{2}{3})^{\frac{2}{3}} \cdot (3\frac{1}{5})^{\frac{2}{3}}$

30. $(2\frac{2}{5})^{\frac{3}{5}} \cdot (6\frac{2}{3})^{\frac{3}{5}} \cdot (\frac{1}{4})^{\frac{3}{5}}$, $(1\frac{3}{5})^{\frac{3}{4}} \cdot (22\frac{1}{2})^{\frac{3}{4}} \cdot (3\frac{3}{8})^{-\frac{4}{3}}$

---

31. (18.) $(a^4)^{\frac{1}{2}}$, $(b^3)^{\frac{1}{3}}$, $(x^6)^{\frac{1}{3}}$, $(x^8)^{\frac{3}{4}}$, $(c^9)^{\frac{2}{3}}$, $(c^{-3})^{\frac{1}{3}}$, $(x^{-\frac{2}{3}})^0$, $(x^0)^{-\frac{1}{2}}$

32. $(a^8)^{\frac{1}{2}}$, $(b^{12})^{\frac{1}{3}}$, $(c^{16})^{\frac{1}{4}}$, $(d^{15})^{\frac{1}{5}}$

33. $(a^{\frac{2}{3}})^{\frac{3}{4}}$, $(b^{\frac{1}{2}})^{\frac{2}{5}}$, $(c^{\frac{1}{3}})^{\frac{3}{4}}$, $(d^{\frac{3}{4}})^{\frac{4}{3}}$

34. (17.) $(-3\frac{3}{8})^{-\frac{1}{3}} \cdot (5\frac{1}{16})^{\frac{3}{4}} \cdot (-\frac{8}{2})^{-1}$, $(2\frac{1}{4})^{-\frac{1}{2}} \cdot (15\frac{5}{8})^{\frac{2}{3}} \cdot (6\frac{1}{4})^{-1}$

35. $(m^{-\frac{1}{2}})^6$, $(n^{\frac{1}{3}})^{-6}$, $(p^{-\frac{1}{4}})^{-\frac{2}{3}}$, $(q^{\frac{3}{5}})^{-\frac{1}{3}}$

36. $(a^3 b^2)^{\frac{1}{6}}$, $(a^{\frac{6}{5}} b^{\frac{3}{4}})^{\frac{10}{3}}$, $(a^2 d^{-\frac{1}{2}})^{-\frac{3}{2}}$, $(a^{\frac{1}{2}} b^5)^{\frac{2}{5}}$

37. $(x^6 y^{12})^{\frac{5}{6}}$, $(x^{\frac{3}{4}} y^{\frac{5}{6}})^{12}$, $(x^{\frac{2}{4}} y^{\frac{3}{8}})^{-\frac{4}{9}}$, $(x^{\frac{1}{8}} y^{\frac{1}{7}})^{14}$.

Digitized by Google

XVII. Imaginäre Zahlen.

A. Theorie.

1. Die Quadratwurzel aus einer negativen Größe kann selbst weder positiv noch negativ sein, sie stellt also eine neue Größenart vor, die man imaginär nennt. Im Gegensatz dazu führen die positiven und negativen Größen zusammen den Namen reelle Größen.

2. Obwohl man gegenwärtig auch den imaginären Größen einen bestimmten Sinn beilegt, so hat man doch den Namen imaginär, d. h. „unmöglich", nur „in der Einbildung bestehend" beibehalten. Nun ist

$$\sqrt{-a} = \sqrt{a \cdot (-1)} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{-1},$$

d. h. eine imaginäre Größe läßt sich stets als Produkt aus einer reellen Größe und dem Faktor $\sqrt{-1}$ darstellen. Diesen Faktor nennt man die imaginäre Größeneinheit*) und bezeichnet ihn in der Regel mit dem Buchstaben i.

3. Auch bei anderen Operationen, als der Quadratwurzelausziehung kommt es vor, daß das Ergebnis keine reelle Größe ist, die auf diese Weise entstehenden Größen lassen sich aber, wie eine jedesmalige Untersuchung zeigt, durch reelle und imaginäre Größen ausdrücken, sie lassen sich sämtlich auf die Form $p + qi$ bringen, wobei p und q selbst reelle Größen vorstellen.**) Ein solcher aus reellen und imaginären Bestandteilen zusammengesetzter Ausdruck heißt eine komplexe Größe, im Gegensatz dazu nennt man qi auch wohl eine rein imaginäre Größe.

Die beiden komplexen Größen $p + qi$ und $p - qi$ heißen zusammen konjugiert imaginär.***)

4. Für die Reduktion der imaginären Zahlen auf die imaginäre Einheit und für die Rechnung mit imaginären Zahlen sind besonders folgende Sätze zu merken:

$$\text{I.}\quad \sqrt{-a} = \sqrt{-1} \cdot \sqrt{a} = i\sqrt{a}$$

$$\text{II.}\quad (\sqrt{-a})^2 = -a,\ i^2 = -1$$

$$\text{III.}\quad \sqrt{-a} \cdot \sqrt{-b} = \mp\sqrt{ab}.$$

---

*) Die Bezeichnung stammt von Gauß (1773—1855). Die Wörter reell und imaginär wurden zuerst von Descartes (1596—1650) gebraucht.

**) Wie im Abschnitt XV, Nr. 16. bemerkt worden ist, hat jede Wurzel soviel verschiedene Werte als ihr Exponent angibt. So hat z. B. $\sqrt[3]{+1}$ die drei Werte $1, \frac{-1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{-1-i\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt[3]{-1}$ die Werte $-1, \frac{1+i\sqrt{3}}{2}, \frac{1-i\sqrt{3}}{2}$, wie man leicht durch Kubierung dieser Werte bestätigen kann.

***) Kommt man bei eingekleideten Aufgaben auf imaginäre oder komplexe Werte für die zu bestimmenden Größen, so ist dies in der Regel ein Zeichen dafür, daß die Aufgabe unter den gegebenen Bedingungen nicht lösbar ist.

Digitized by Google

5. Das Produkt zweier konjugierten Zahlen ist reell. Man hat

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2.$$

Ein Ausdruck von der Form $a \pm bi$ wird reell, wenn man denselben mit $a \mp bi$ multipliziert. Der Satz dient dazu, aus dem Nenner von Brüchen die imaginären Zahlen fortzuschaffen und so den imaginären Teil vom reellen zu sondern, z. B.

$$\frac{7}{3+\sqrt{-5}} = \frac{7(3-\sqrt{-5})}{(3+\sqrt{-5})(3-\sqrt{-5})} = \frac{7(3-\sqrt{-5})}{9+5} = \frac{3-\sqrt{-5}}{2}$$
$$= \tfrac{3}{2} - \tfrac{1}{2}i\sqrt{5}$$
$$\frac{10}{2-i\sqrt{6}} = \frac{10(2+i\sqrt{6})}{4+6} = 2 + i\sqrt{6}.$$

6. Für die Trennung des imaginären Teils von dem reellen bei der Wurzel einer komplexen Größe findet folgende Formel Anwendung:

$$\sqrt{a \pm bi} = \sqrt{\frac{r+a}{2}} \pm i\sqrt{\frac{r-a}{2}}, \quad r = \sqrt{a^2 + b^2}.^*)$$

Die Richtigkeit der Formel ergibt sich, wenn man rechts quadriert. Nach der Formel ist

$$\sqrt{3+4i} = \sqrt{\frac{r+3}{2}} + i\sqrt{\frac{r-3}{2}}, \quad r = \sqrt{9+16} = 5, \text{ also}$$
$$\sqrt{3+4i} = 2 + i.$$

B. Aufgaben.

Bei den folgenden Aufgaben, in welchen i noch nicht eingeführt ist, soll, bevor man an die Rechnung geht, der imaginäre Teil erst durch i ausgedrückt werden. Die imaginären Werte der Kubikwurzeln werden nicht gefordert.

1.	$\sqrt{-16}$	$\sqrt{-25}$	$\sqrt[3]{-27}$	$\sqrt{-36}$
2.	$\sqrt{-64}$	$\sqrt[3]{-64}$	$\sqrt[6]{-64}$	$\sqrt[7]{-128}$
3.	$\sqrt{-x^2}$	$(\sqrt{-x})^2$	$\sqrt{-a^4}$	$(\sqrt{-a})^4$
4.	$\sqrt[3]{-a^3}$	$\sqrt[3]{(-a)^3}$	$\sqrt{-a^{2n}}$	$\sqrt{(-a)^{2n}}$
5.	$\sqrt{-8}$	$\sqrt{-20}$	$\sqrt{-45}$	$\sqrt{-63}$
6.	$5\sqrt{-12}$	$2\sqrt{-50}$	$3\sqrt{-80}$	$2\sqrt[3]{-24}$
7.	$\sqrt{-x^2y}$	$\sqrt{-4ab^2}$	$\sqrt[3]{-8ab^3}$	$\sqrt{-3x^2}$
8.	$ai \cdot bi$	$(ai)^2$	$3i \cdot 5i$	$7i \cdot i$

*) Um diese Form zu finden, setzt man $\sqrt{a+bi} = x + iy$. Quadriert man, so muß $a + bi = x^2 - y^2 + 2ixy$ sein. Der Gleichung wird genügt, wenn man $x^2 - y^2 = a$, $2xy = b$ setzt (vgl. XV, Nr. 171. flgg.).

Digitized by Google

9. $ai \cdot bi^2$ $ai \cdot (bi)^2$ $i\sqrt{-a}$ $i\sqrt{-4}$

10. $5i\sqrt[3]{-8}$ $i\sqrt{-a^2}$ $i\sqrt{-a^3}$ $i\sqrt[3]{-a^3}$

11. $\sqrt{-a} \cdot \sqrt{-a}$, $\sqrt{-x^2} \cdot \sqrt{-y^2}$, $\sqrt{-4} \cdot \sqrt{-1}$, $\sqrt[3]{-x^3} \cdot \sqrt{-1}$

12. $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-3}$ $\sqrt{3} \cdot \sqrt{-12}$ $\sqrt{-18} \cdot \sqrt{2}$ $\sqrt{32} \cdot \sqrt{-2}$

13. i^2, i^3 i^4, i^5 i^6, i^7 i^8, i^9

14. $i^{13} + i^{15}$ $i^{14} + i^{34}$ $i^{24} - i^{42}$ $i^{35} - i^{91}$

15. $\frac{1}{i}$, $\frac{1}{i^2}$ $\frac{1}{i^3}$, $\frac{1}{i^4}$ $\frac{1}{i^5} + \frac{1}{i^7}$ $\frac{1}{i^8} - \frac{1}{i^6}$

16. $\frac{\sqrt{-a}}{\sqrt{-b}}$ $\frac{ai}{\sqrt{-a}}$ $\frac{\sqrt{-6}}{\sqrt{3}}$ $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{-3}}$

17. $\sqrt{1-x} \cdot \sqrt{x-1}$ $\sqrt{5a-7b} \cdot \sqrt{7b-5a}$

18. $(3+2i)(3-2i)$ $(5+3i)(5-3i)$

19. $(7+5i)(7-5i)$ $(1+i)(1-i)$

20. $(2+3i)(3-4i)$ $(5+3i)(7-5i)$

21. $(5-3i)(7+4i)$ $(6+5i)(7-6i)$

22. $(x+iy)(x-iy)$ $(ix+y)(ix-y)$

23. $(2+i\sqrt{3})(2-i\sqrt{3})$ $(3+2i\sqrt{2})(3-2i\sqrt{2})$

24. $(5-2i\sqrt{6})(5+2i\sqrt{6})$ $(7+4i\sqrt{3})(7-4i\sqrt{3})$

25. $(5\sqrt{2}+7i)(5\sqrt{2}-7i)$ $(3\sqrt{7}+8i)(3\sqrt{7}-8i)$

26. $\sqrt{15+8i} \cdot \sqrt{15-8i}$ $\sqrt{24+7i} \cdot \sqrt{24-7i}$

27. $(1+i)^2$, $(1-i)^2$ $(a+bi)^2$, $(4+3i)^2$

28. $(5+3i)^2$, $(7-3i)^2$ $(2+2i)^2$, $(3-3i)^2$

29. $(\sqrt{3+2i}+\sqrt{3-2i})^2$ $(\sqrt{8+6i}-\sqrt{8-6i})^2$

30. $(\sqrt{15+8i}+\sqrt{15-8i})^2$ $(\sqrt{12+5i}-\sqrt{12-5i})^2$

31. $(1+i)^3$, $(a+bi)^3$ $(1+i)^4$, $(a+bi)^4$

32. $(a+bi)^3+(a-bi)^3$ $(1+i\sqrt{3})^3$, $(i\sqrt{3}-1)^3$

33. $(a+bi)^4 \pm (a-bi)^4$ $(1+ix)^4 \pm (1-ix)^4$

34. $(1+i)^6+(1-i)^6$ $(1+i)^5+(1-i)^5$

---

35. $\frac{3}{1+\sqrt{-2}}$ $\frac{6}{2+\sqrt{-2}}$ $\frac{7}{2+\sqrt{-3}}$ $\frac{14}{3+\sqrt{-5}}$

36. $\frac{2}{1+i}$ $\frac{4}{1-i}$ $\frac{5}{1+2i}$ $\frac{10}{1-3i}$

Digitized by Google

37. $\frac{13}{2+3i}$ $\frac{17}{3-5i}$ $\frac{13}{7+9i}$ $\frac{25}{11-2i}$

38. $\frac{3+2i}{2-3i}$ $\frac{3+4i}{4-3i}$ $\frac{1+i}{1-i}$ $\frac{2+i}{3-i}$

39. $\frac{a+bi}{a-bi}$ $\frac{a+bi}{c+di}$ $\frac{x+iy}{ix-y}$ $\frac{1+i}{(1-i)^3}$

40. $\sqrt{1+i}+\sqrt{1-i}$*) $\sqrt{3+4i}-\sqrt{3-4i}$

41. $\sqrt{5+2i\sqrt{6}}+\sqrt{5-2i\sqrt{6}}$, $\sqrt{3+2i\sqrt{10}}-\sqrt{3-2i\sqrt{10}}$

42. $\sqrt{8+4i\sqrt{5}}+\sqrt{8-4i\sqrt{5}}$, $\sqrt{10+2i\sqrt{11}}-\sqrt{10-2i\sqrt{11}}$.

XVIII. Logarithmen.

A. Theorie.

1. Die Einführung von negativen und gebrochenen Werten für die Potenz-Exponenten ergibt die Möglichkeit, jede beliebige positive Zahl als Potenz einer anderen positiven Zahl aufzufassen, also allgemein $g^x = a$ zu setzen, indem x je nach den Umständen einen ganzen oder gebrochenen (bzw. irrationalen), positiven oder negativen Wert besitzt.

2. Nun lehren die Potenzgesetze, wie man die an den Potenzen selbst vorzunehmenden Operationen durch einfachere Operationen, die mit den Exponenten vorzunehmen sind, ersetzen kann, sofern nur die Potenzen in der Grundzahl übereinstimmen. Insbesondere kann man

1) die Multiplikation solcher Potenzen durch die Addition ihrer Exponenten,
2) die Division solcher Potenzen durch die Subtraktion ihrer Exponenten,
3) die Potenzierung einer einzelnen Potenz durch die Multiplikation, und
4) die Radizierung solcher Potenz durch die Division ihres Exponenten

ersetzen.

3. Dies führte auf den Gedanken**), alle Zahlen als Potenzen einer einzigen Grundzahl aufzufassen, um dann statt mit den Zahlen

*) Man quadriere erstens und ziehe die Wurzel. Zweitens wende man die Formel in Nr. 6. an.

**) Die ersten Spuren dieses Gedankens finden sich bei dem Franzosen Chuquet (1484) und den Deutschen Michael Stifel (um 1544) und Bürgi (um 1600). Die erste praktische Gestaltung gab ihm der Schotte John Neper (Lord Napier of Merchiston), dessen mirifici logarithmorum canonis descriptio im Jahre 1614 erschien. Die Wahl der Zahl 10 als Grundzahl ist das Verdienst von Henry Briggs (Logarithmorum chilias prima 1618), nach dem das auf diese Zahl basierte, im allgemeinen Gebrauch befindliche Logarithmensystem das Briggssche genannt wird.

Digitized by Google

selbst mit den ihnen in bezug auf diese Grundzahl zukommenden Exponenten rechnen und demgemäß jede Rechenoperation auf eine einfachere (Multiplikation auf Addition, Division auf Subtraktion, Potenzierung auf Multiplikation, Radizierung auf Division) zurückführen zu können.

4. Nimmt man dementsprechend eine bestimmte Grundzahl (Basis) g an und setzt die Zahl $a = g^x$, so führt die Größe x den Namen Logarithmus von a in bezug auf die Basis (Grundzahl) g.

$$x = {}^{(g)}\log a.$$

Umgekehrt heißt a der Numerus von x in bezug auf g.

$$a = {}^{(g)}\mathrm{Num}\, x.$$

Die drei Gleichungen

$$a = g^x, \qquad x = {}^{(g)}\log a, \qquad a = {}^{(g)}\mathrm{Num}\, x$$

bedingen sich also gegenseitig.*)

5. Da die Logarithmenrechnung gerade voraussetzt, daß alle Zahlen als Potenzen einer und derselben Basis aufgefaßt werden, läßt man — nachdem irgend eine Grundzahl ein für allemal gewählt ist — die Bezugnahme auf diese Grundzahl in der Bezeichnung fort und schreibt einfach

$$x = \log a, \quad a = \mathrm{Num}\, x.$$

6. Für die Rechnung gelten die nachstehend angegebenen vier Gesetze, deren Begründung aus dem Vorstehenden genügend erhellt:

I. $\log(ab) = \log a + \log b$ II. $\log \frac{a}{b} = \log a - \log b$

III. $\log(a^n) = n \cdot \log a$ IV. $\log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a.$

Diese Gesetze sind in Worten auszudrücken.

7. Die geordnete Zusammenstellung der Logarithmen aller natürlichen Zahlen für eine bestimmte Basis heißt ein Logarithmensystem. Die Basis muß von der Art sein, daß sich durch die Potenzen derselben alle positiven ganzen Zahlen leicht darstellen lassen; diese muß daher eine positive Zahl und größer als 1 sein. Positiv muß sie sein, weil man sonst nicht wüßte, ob ihre Potenzen positiv oder negativ,

---

*) Das gegenseitige Verhältnis von Potenz, Wurzel und Logarithmus wird veranschaulicht durch die folgende Tabelle:

	Potenz	Wurzel	Logarithmus
	$b^n = a$	$b = \sqrt[n]{a}$	$n = {}^{(b)}\log a$
Gegeben:	b und n	a und n	a und b
Gesucht:	a	b	n
a heißt	Potenz	Radikand	Logarithmand (Zahl oder Numerus)
b „	Basis	Wurzel	Basis des Logarithmus
n „	Exponent d. P.	Exponent d. W.	Logarithmus.

Digitized by Google

reell oder imaginär wären. Sie muß größer als 1 sein, weil sonst die Logarithmen aller ganzen Zahlen, um welche es sich zunächst handelt, negativ sein würden, was die Rechnung unnötigerweise erschwert. Das überall gebräuchliche Logarithmensystem hat die Zahl 10 zur Basis. Diese Basis wird nicht geschrieben, sondern als selbstverständlich angenommen. Man hat daher, weil $10^1 = 1$, $10^2 = 100$, $10^3 = 1000$, $10^4 = 10000$ usw. ist:

$$\log 1 = 0, \quad \log 10 = 1, \quad \log 100 = 2, \quad \log 1000 = 3,$$
$$\log 10000 = 4, \quad \log 100000 = 5, \quad \log 1000000 = 6 \text{ usw.},$$
$$\text{allgemein ist } \log(10^n) = n.$$

Hieraus ist zu ersehen, daß unter der ersten Million natürlicher Zahlen nur sieben vorkommen, deren Logarithmen im voraus bekannt sind. Die Logarithmen aller übrigen Zahlen sind irrational, sie lassen sich nur genähert angeben.*)

8. Für die Grundzahl 10 nehmen die Potenzgesetze die folgende Gestalt an:

$$\text{I. } 10^x \cdot 10^y = 10^{x+y} \qquad \text{II. } 10^x : 10^y = 10^{x-y}$$

$$\text{III. } (10^x)^n = 10^{n \cdot x} \qquad \text{IV. } \sqrt[n]{10^x} = 10^{\frac{x}{n}}.$$

Setzt man daher $10^x = a$, $10^y = b$, also $x = \log a$, $y = \log b$ und beachtet, daß $\log 10^x = x$, $\log 10^y = y$ ist, so ergeben sich die Sätze über Logarithmen von selbst. Man hat

$$\log ab = \log(10^x \cdot 10^y) = \log 10^{x+y} = x + y = \log a + \log b$$

$$\log \frac{a}{b} = \log(10^x : 10^y) = \log 10^{x-y} = x - y = \log a - \log b$$

$$\log a^n = \log(10^x)^n = \log 10^{n \cdot x} = n \cdot x = n \cdot \log a$$

$$\log \sqrt[n]{a} = \log \sqrt[n]{10^x} = \log 10^{\frac{x}{n}} = \frac{x}{n} = \frac{1}{n} \cdot x = \frac{1}{n} \log a = \log a : n.$$

Der letzte Satz kann auch aus dem vorletzten abgeleitet werden:

$$\log a = \log(\sqrt[n]{a})^n = n \cdot \log \sqrt[n]{a}, \text{ also } \log \sqrt[n]{a} = \frac{1}{n} \cdot \log a.$$

9. Jeder Logarithmus zerfällt, wenn er nicht überhaupt ganzzahlig ist (Nr. 7.), in einen ganzzahligen und einen gebrochenen Teil, welch letzterer stets als Dezimalbruch geschrieben und auf eine gewisse Stellenzahl (für das praktische Bedürfnis genügen 5, oft auch 4 Stellen) abgekürzt wird.

Bei dem Briggsschen Logarithmensystem kann man den ganzzahligen Teil eines jeden Logarithmus sofort bestimmen. So ist z. B. der log 284,75 größer als der log 100, der den Wert 2 und kleiner

*) Die irrationalen Zahlen, welche Wurzelwerte darstellen, können durch Potenzieren mit ganzen Zahlen rational gemacht werden. Das ist bei den Logarithmen, die wenigen schon an sich rationalen Logarithmen ausgenommen, nicht möglich.

Digitized by Google

als der log 1000, der den Wert 3 hat; er besteht also aus der ganzen Zahl 2 und einem Bruch. Eine Zahl, die drei Stellen vor dem Komma hat, liegt zwischen 10^2 und 10^3, eine vierstellige zwischen $10^3 = 1000$ und $10^4 = 10000$ usw.

Hat eine Zahl n Ziffern vor dem Komma, so liegt sie zwischen 10^{n-1} und 10^n; ihr Logarithmus ist größer als $n - 1$, aber kleiner als n, er besteht also aus der ganzen Zahl $n - 1$ und einem echten Dezimalbruch.

Demnach kann man vom Logarithmus einer jeden Zahl den ganzzahligen Teil sofort angeben, er ist stets um 1 kleiner als die Zahl der Ziffern, die die Zahl vor dem Komma hat.

Dieser ganzzahlige Teil führt den Namen Kennziffer oder Charakteristik. Die Logarithmen der Zahlen, die nur eine Ziffer vor dem Komma aufweisen, haben die Kennziffer 0, z. B.:

$$\log 6 = 0{,}77815; \qquad \log 4{,}3 = 0{,}63347.$$

Der der Charakteristik folgende gebrochene Teil des Logarithmus führt den Namen Mantisse (deutsch: Zugabe).

10. Ein weiterer Vorzug des Briggsschen Systems besteht nun darin, daß bei Verschiebung des Komma im Numerus die Mantisse des Logarithmus ungeändert bleibt.

Hat man z. B. $\log 5287 = 3{,}72321$, so hat man damit auch die Werte von $\log 528{,}7$; von $\log 52{,}87$; von $\log 5{,}287$.

Denn $528{,}7 = 5287 : 10$;

also $\log 528{,}7 = \log 5287 - \log 10 = 3{,}72321 - 1 = 2{,}72321$

$\log 52{,}87 = \log 5287 - \log 100 = 3{,}72321 - 2$

$= 1{,}72321$ usw.

Ebenso ist $\log 528700 = \log 5287 + \log 100 = 3{,}72321 + 2$

$= 5{,}72321.$

Hier hat sich überall nur die Charakteristik geändert, die Mantisse ist dieselbe geblieben. Zahlen, die sich nur durch die Stellung des Komma voneinander unterscheiden, haben im Logarithmus dieselbe Mantisse.

Dieser Umstand erleichtert die Herstellung einer übersichtlichen Tafel für die Logarithmen der natürlichen Zahlen ganz außerordentlich. Solche Tafel enthält überhaupt nur die Mantissen, da die Kennziffern aus der Stellenzahl der Zahl ohne weiteres ersichtlich sind und gibt immer für eine gewisse Gruppe von Zahlen, die sich nur durch das Komma voneinander unterscheiden, die Mantisse auf einmal. So gibt sie z. B. zugleich die Mantisse für log 3, log 30, log 300, log 3000.

11. Es war $\log 5{,}287 = 0{,}72321$ (s. Nr. 10.). Verschiebe ich das Komma noch weiter nach links, so erhalte ich

$$\log 0{,}5287 = \log 5{,}287 - \log 10 = 0{,}72321 - 1$$

$$\log 0{,}05287 = \log 5{,}287 - \log 100 = 0{,}72321 - 2 \text{ usw.}$$

Digitized by Google

Die Logarithmen der echten Brüche haben negative Werte, sie zerfallen ebenfalls in einen gebrochenen Teil, der auch hier Mantisse heißt und immer als positive Größe behandelt wird, und eine Kennziffer, die in diesem Falle negativ ist.

Steht bei einem echten Dezimalbruche die erste geltende Ziffer unmittelbar hinter dem Komma, so hat sein Logarithmus die Kennziffer — 1; steht die erste geltende Ziffer des Numerus in der zweiten Stelle hinter dem Komma, so hat sein Logarithmus die Kennziffer — 2; steht jene Ziffer in der *n*. Stelle hinter dem Komma, so hat der Logarithmus die Kennziffer — *n*.

12. Jetzt ist es nun leicht, in der Logarithmentafel zu einem gegebenen Logarithmus den Numerus aufzuschlagen. Es sei z. B. Num 2,72321 zu bestimmen. Zur Mantisse 72321 gehört ein Numerus mit der Ziffernfolge 5287. Da der Logarithmus die Kennziffer 2 hat, müssen im Numerus 3 Stellen vor das Komma zu stehen kommen. Es ist also

$$\text{Num } 2{,}72321 = 528{,}7$$

(gelesen: Numerus von 2,72321 gleich 528,7).

Ebenso ist

$$\text{Num } (0{,}72321 - 3) = 0{,}005287,$$

denn zu der Mantisse 72321 gehört auch hier ein Numerus mit der Ziffernfolge 5287; da die Kennziffer den negativen Wert — 3 hat, so muß die erste geltende Ziffer des Numerus, d. i. 5, in die dritte Stelle hinter das Komma kommen.

13. Steht ein Logarithmus nicht genau in der Tafel, so muß der zugehörige Numerus zwischen den beiden Werten liegen, deren Logarithmen den gegebenen Logarithmus als nächst benachbarte einschließen.

Ist z. B. Num 1,33740 zu bestimmen, so wird man die Mantisse 33740 in der Tafel vergeblich suchen. Wohl aber findet sich als nächst kleinere Mantisse 33726, als nächst größere 33746 und es ist

$$\text{Num } 1{,}33726 = 21{,}74,$$ wofür man auch 21,740 schreiben kann

und $$\text{Num } 1{,}33746 = 21{,}75 = 21{,}750.$$

Num 1,33740 muß dann zwischen 21,740 und 21,750 liegen. Denkt man sich zwischen 21,740 und 21,750 noch 9 Zahlen 21,741, 21,742 usw. bis 21,749 eingeschaltet und verteilt den Unterschied zwischen den beiden Mantissen 33726 und 33746 gleichmäßig auf diese dazwischen eingeschalteten Zahlen, so erhält man log 21,741 = 1,33728; log 21,742 = 1,33730 usw. Dabei findet sich log 21,747 = 1,33740, also ist umgekehrt 21,747 = Num 1,33740.

Hierbei muß man meist Abrundung n vornehmen. So liegt die Mantisse 52184 zwischen den in der Tafel stehenden Mantissen 52179 und 52192

$$\text{Num } 0{,}52179 = 3{,}3250; \text{ Num } 0{,}52192 = 3{,}3260.$$

Digitized by Google

Schaltet man wieder 9 Zahlen mit ihren Logarithmen ein, so erhält man bei Abrundung auf fünf Stellen, da die gleichmäßig auf 10 Teile zu verteilende Differenz der Mantissen den Wert 13 hat

$$\log 3{,}3251 = 0{,}52179 + 0{,}000013 = 0{,}52180$$
$$\log 3{,}3252 = 0{,}52179 + 0{,}000026 = 0{,}52182$$
$$\log 3{,}3253 = 0{,}52179 + 0{,}000039 = 0{,}52183$$
$$\log 3{,}3254 = 0{,}52179 + 0{,}000052 = 0{,}52184 \text{ usw.}$$
$$\text{Num } 0{,}52184 = 3{,}3254.$$

Durch Umkehrung dieses Verfahrens kann man andererseits zu der 5 Ziffern aufweisenden Zahl 3,3254 den Logarithmus mittels einer Tafel finden, die zunächst nur die Logarithmen vierziffriger Zahlen liefert, wie dies bei den praktisch im Gebrauch befindlichen Tafeln der Fall zu sein pflegt. Man nennt dieses Verfahren, das durch gewisse Sondereinrichtungen*) in den Tafeln noch besonders erleichtert wird, die Berechnung durch Einschaltung oder Interpolation. Ein geübter Rechner führt diese Interpolationsrechnung jedesmal sofort im Kopf aus.

14. Die logarithmische Rechnung verlangt nun, daß das Ergebnis mittels der aus der Tafel zu findenden Logarithmenwerte in Gemäßheit der Logarithmengesetze gefunden wird. Dabei ist es nötig, die gegebene Gleichung in die für diese Rechnung geeignete Form zu bringen oder, wie man sagt, zu *logarithmieren*. Wie sich die Rechnung in den einfachsten Fällen gestaltet, zeigen die nachstehenden Beispiele:

I. $3 \cdot 5 = x \qquad \log 3 + \log 5 = \log x$
$\log 3 = 0{,}47712$
$\log 5 = 0{,}69897$
$x = \text{Num } 1{,}17609 = 15$

II. $17 : 4 = x \qquad \log 17 - \log 4 = \log x$
$\log 17 = 1{,}23045$
$\log 4 = 0{,}60206$
$x = \text{Num } 0{,}62839 = 4{,}25$
$8 : 0{,}2 = x \qquad \log 8 - \log 0{,}2 = \log x$
$\log 8 = 0{,}90309 = 1{,}90309 - 1$
$\log 0{,}2 = 0{,}30103 - 1$
$x = \text{Num } 1{,}60206 = 40$

*) Diese Einrichtungen bestehen in der Zugabe kleiner Tabellen für die Zehntel der Differenzen zwischen zwei aufeinanderfolgende Tafel-Logarithmen; diese Tabellen befinden sich in einer Spalte mit der Überschrift P. P., d. i. Partes proportionales oder Proportionalteile (nämlich Teile der Differenzen)

Digitized by Google

III. $3^4 = x \qquad 4 \cdot \log 3 = \log x$

$\log 3 = 0{,}47712$

$\underline{\qquad\qquad 4}$

$x = \text{Num } 1{,}90848 = 81$

IV. $\sqrt[7]{13} = x \qquad \log x = \frac{1}{7} \log 13 = \log 13 : 7$

$\log 13 = 1{,}11394$

$\underline{7)\qquad\qquad}$

$x = \text{Num } 0{,}15913 = 1{,}4425$

$\sqrt[3]{0{,}026} = x \qquad \log x = \frac{1}{3} \log 0{,}026 = \log 0.026 : 3$

$\log 0{,}026 = 0{,}41497 - 2 = 1{,}41497 - 3$

$\underline{3)\qquad\qquad}$

$x = \text{Num } (0{,}47166 - 1) = 0{,}29625.$

Von diesen Aufgaben sind die ersten solche, die natürlich in Wirklichkeit niemand mittels der Logarithmen lösen würde, weil man durch einfache Kopfrechnung schneller zum Ziel kommt. Sie sind absichtlich gewählt, um zu zeigen, wie das Resultat der Logarithmenrechnung mit dem der Kopfrechnung übereinstimmt.

Bei der Aufgabe III ist diese Übereinstimmung nicht vollständig, aus der Tafel ergibt sich vielmehr, daß $81 = \text{Num } 1{,}90849$ ist. Diese Abweichung rührt daher, daß die Logarithmen abgekürzte Dezimalbrüche sind. Auf 7 Stellen berechnet lautet der Wert von log 3 vielmehr 0,4771213, die Multiplikation dieses Wertes mit 4 gibt 1,9084852, die Abrundung auf 5 Stellen gibt dann 1,90849.

Bei der Aufgabe III ist die Stellung des Multiplikators (4) und bei den beiden Aufgaben unter IV die Stellung des Divisors (8 und 3) zu beachten.

Bei der zweiten Aufgabe unter IV ist statt 0,41497 — 2 vielmehr 1,41497 — 3 geschrieben worden, damit nach der Division die hinter dem Minuszeichen folgende Zahl ganzzahlig ausfallen sollte, wie es für die Aufsuchung des Numerus nötig ist. Eine ähnliche, wenn auch nicht unumgänglich nötige Umformung ist bei der zweiten Aufgabe unter II vorgenommen worden.

15. Ausdrücke, deren Teile durch Addition oder Subtraktion miteinander verbunden sind, können nicht Gegenstand einer zusammenhängenden logarithmischen Rechnung sein. Hat man z. B. die Größe

$$13 \cdot 47{,}42 + (1{,}9)^8 - \sqrt[4]{28 \cdot 6{,}12}$$

zu bestimmen, so muß man jedes der drei Glieder für sich unter gehöriger Anwendung der Logarithmengesetze berechnen und die Resultate dann durch Addition und Subtraktion miteinander vereinigen.

Bei dem Ausdruck $\sqrt[5]{17^3 + 24^5}$ kann der Wert des Radikandus nicht in einer einzigen logarithmischen Rechnung bestimmt werden,

Digitized by Google

vielmehr sind die beiden Teile (17^2 und 24^3) für sich logarithmisch zu berechnen und dann zu addieren, worauf von der erhaltenen Summe der Logarithmus aufzusuchen und durch 5 zu dividieren ist. Der Numerus zu dem durch diese Division erhaltenen Logarithmus ist die gesuchte Größe. Solche Rechnungen bezeichnet man als unterbrochene logarithmische Rechnungen.

16. Ferner ist wohl zu beachten, daß alle Zahlen, deren Logarithmen in der Rechnung vorkommen, insofern sie als Potenzen der positiven Zahl 10 aufgefaßt werden, selbst positiv sein müssen. Handelt es sich nun um die Berechnung eines negativen Wertes, so kann diese nicht unmittelbar auf logarithmischem Wege bewirkt werden; man muß die zu logarithmierende Gleichung vor der Logarithmierung so umformen, daß auf beiden Seiten positive Größen zu stehen kommen. So wird man z. B. die Gleichung

$$x^3 = 2{,}4^5 - 3{,}2^4,$$

die für x offenbar einen negativen Wert liefert, zunächst in die Form bringen

$$(-x)^3 = -x^3 = 3{,}2^4 - 2{,}4^5,$$

woraus $\log(-x) = \frac{1}{3}\log\{3{,}2^4 - 2{,}4^5\}$ folgt. Die Größe $-x$ ist hier trotz ihres negativen Zeichens vielmehr positiv, da x selbst negativ ist; man findet demnach den Wert von x, indem man die Größen $3{,}2^4$ und $2{,}4^5$ für sich logarithmisch berechnet, zu der Differenz dieser Größen den Logarithmus aufschlägt und zu dem dritten Teil dieses Logarithmus den Numerus sucht, der zunächst den Wert von $(-x)$ vorstellt, worauf man diesem Numerus das Zeichen $-$ vorsetzt.

$$-x = 2{,}9352 \qquad x = -2{,}9352.$$

17. Die Berechnung der Logarithmen erfolgt durch besondere, sehr rasch zum Ziele führende Methoden, deren Verständnis ein höheres Maß von mathematischen Kenntnissen, als das hier vorausgesetzte, erfordert. Daß aber solche Berechnung überhaupt möglich ist, ersieht man leicht aus dem allerdings umständlichen Verfahren, das durch die nachstehend gegebenen Beispiele erläutert wird.

Es ist $2^{10} = 1024$; da 1024 wenig größer als 1000 ist, kann der Wert von $\log(2^{10})$ den Wert von $\log 1000$, d. i. 3, nur wenig übertreffen. $\log(2^{10}) = 10 \log 2$ ist etwas größer als 3; folglich $\log 2$ etwas größer als $3 : 10$, d. i. als 0,3. In der Tat ist auch $\log 2 = 0{,}30103$.

Man sieht hieraus, wie man durch Potenzierung der zu logarithmierenden Zahl und Verwertung der Stellenzahl der herauskommenden Potenz einen gewissen Anhalt für die Beurteilung der Größe ihres Logarithmus findet.

Praktisch führt man diese Potenzierung nun so aus, daß man die zu logarithmierende Zahl lauter aufeinanderfolgenden Quadrierungen unterwirft, also von der Zahl a der Reihe nach die Potenzen a^2 a^4 a^8 a^{16} ... usw. bildet, bei der jede das Quadrat der vorher-

Digitized by Google

gehenden ist. Führt man diese Rechnung beispielsweise bei den Zahlen 2 und 3 aus, so findet sich, daß 2^{1024} eine 309stellige, 3^{1024} eine 489stellige Zahl ergibt, es muß also $\log(2^{1024}) = 1024 \cdot \log 2$ zwischen 308 und 309, $\log(3^{1024}) = 1024 \cdot \log 3$ zwischen 488 und 489, oder $\log 2$ zwischen $\frac{308}{1024} = 0{,}30078$ und $\frac{309}{1024} = 30117$; $\log 3$ zwischen $\frac{488}{1024} = 0{,}4765$ und $\frac{489}{1024} = 0{,}4775$ liegen. Bei dieser Potenzierung kommt es immer nur auf die Stellenzahl des Resultates an, die vorzugsweise von den ersten Ziffern der zu quadrierenden Größe abhängt; dieser Umstand erleichtert die Ausführung der Rechnung sehr wesentlich, die man übrigens natürlich beliebig weit treiben kann. In den beiden hier angeführten Beispielen ist sie bis zur 1024. Potenz getrieben worden, was — da $1024 = 2^{10}$ ist — zehn aufeinanderfolgende Quadrierungen erfordert, das Ergebnis ist bis auf einen Betrag genau, der noch nicht eine Einheit der dritten Dezimalstelle ausmacht.

18. Mit Hilfe der Briggsschen Logarithmen kann man nun auch die Logarithmen für jede andere Grundzahl ausdrücken und demgemäß auch berechnen. Ist s der Logarithmus von a in bezug auf die Grundzahl g, hat man also die Gleichung

$$s = {}^{g}\log a \text{ d. h. } g^s = a,$$

so gibt die Logarithmierung der letzteren Gleichung im Briggsschen System die Gleichung

$$s \log g = \log a; \quad s = \log a : \log g$$

d. h. in Worten: Der Logarithmus einer Zahl für eine beliebige Grundzahl ist gleich dem Briggsschen Logarithmus dieser Zahl, dividiert durch den Briggsschen Logarithmus der Grundzahl.

19. Aus dem im Abschnitt II, 6. aufgestellten zweiten Grundsatz zieht man hier die Folgerung. Die Logarithmierung gleicher Zahlen gibt wieder gleiche Größen.*)

*) Der Ausdruck a^m kann als Potenz aufgefaßt werden, insofern entsteht er durch eine an der Basis a vorgenommene Operation, die Potenzierung, deren Gegenteil die Radizierung ist. Man kann denselben Ausdruck aber auch als eine Größe auffassen, die durch gewisse nach Maßgabe der Größe a mit dem Exponenten m vorgenommene Operationen entstanden ist. In diesem Sinne heißt a^m eine Exponentialgröße, die mit m vorgenommene Operation heißt Exponentiierung, deren Gegenteil ist die Logarithmierung. Ist $b = a^m$, so entsteht b aus m durch Exponentiierung; m (d. i. der Logarithmus von b für die Basis a) aus b durch Logarithmierung. — Exponentiieren und Logarithmieren stehen auf derselben Stufe; beide Operationen gehören nicht mehr zu den algebraischen Operationen, unter welchem Namen man Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzierung und Radizierung zusammenfaßt, sie gehören vielmehr zu den über das Gebiet dieser Operationen hinausgreifenden sogenannten transzendenten Operationen. — Es würde infolgedessen auch in der elementaren Mathematik von ihnen nicht die Rede sein, wenn nicht die wichtigen Rechenvorteile, die die Logarithmenrechnung gewährt, die Behandlung der Regeln, nach denen diese Rechnung erfolgt, zum Bedürfnis machte.

Digitized by Google

B. Aufgaben.

Drücke den Inhalt folgender Potenzgleichungen durch Logarithmengleichungen aus:

1. $5^2 = 25$ $2^5 = 32$ $7^3 = 343$ $3^7 = 2187$
2. $4^4 = 256$ $3^3 = 27$ $5^3 = 125$ $8^3 = 512$.

Gib zu folgenden Logarithmengleichungen die entsprechenden Potenzgleichungen an:

3. $^{(10)}\log 10 = 1$ $^{(7)}\log 7 = 1$ $^{(6)}\log 36 = 2$ $^{(3)}\log 27 = 3$
4. $^{(3)}\log 81 = 4$ $^{(9)}\log 81 = 2$ $^{(4)}\log 64 = 3$ $^{(2)}\log 64 = 6$
5. $^{(7)}\mathrm{Num}\,2 = 49$ $^{(7)}\mathrm{Num}\,3 = 343$ $^{(2)}\mathrm{Num}\,3 = 8$ $^{(2)}\mathrm{Num}\,5 = 32$
6. $^{(8)}\mathrm{Num}\,3 = 512$ $^{(3)}\mathrm{Num}\,6 = 729$ $^{(2)}\mathrm{Num}\,8 = 256$ $^{(3)}\mathrm{Num}\,5 = 243$.

Bestimme den Wert folgender Logarithmen ohne Hilfe der Tafeln:

7. $^{(2)}\log 32$ $^{(2)}\log 128$ $^{(2)}\log \frac{1}{2}$ $^{(2)}\log 0{,}25$
8. $^{(2)}\log 64$ $^{(4)}\log 64$ $^{(8)}\log 64$ $^{(3)}\log 81$
9. $^{(5)}\log 125$ $^{(2)}\log 0{,}125$ $^{(3)}\log \frac{1}{3}$ $^{(5)}\log 0{,}04$.

Bestimme ohne Anwendung der Tafeln x aus folgenden Gleichungen:

10. $^{(2)}\log x = 3$ $^{(3)}\log x = 5$ $^{(4)}\log x = 5$ $^{(6)}\log x = 4$
11. $^{(2)}\log x = 8$ $^{(7)}\log x = 2$ $^{(8)}\log x = 4$ $^{(9)}\log x = 3$
12. $x = {}^{(7)}\mathrm{Num}\,1$ $x = {}^{(8)}\mathrm{Num}\,1$ $x = {}^{(9)}\mathrm{Num}\,0$ $x = {}^{(3)}\mathrm{Num}\,5$
13. $x = {}^{(3)}\mathrm{Num}\,4$ $x = {}^{(5)}\mathrm{Num}\,2$ $x = {}^{(3)}\mathrm{Num}\,6$ $x = {}^{(2)}\mathrm{Num}\,9$.

Zerlege mündlich die Logarithmen der folgenden zusammengesetzten Ausdrücke:

14. $\log 5abc$ $\log 2a\,(b+c)$ $\log (7a \cdot 5b)$ $\log 6\,(a+b)x$
15. $\log \frac{4a}{9b}$ $\log \frac{7ab}{3}$ $\log \frac{5}{9}xy$ $\log 8\frac{1}{3}ab$
16. $\log \frac{7\,(a+b)}{3\,(a-b)}$ $\log \frac{5ac}{x-y}$ $\log \frac{a+b}{3ax}$ $\log \frac{a^2-b^2}{4xy}$
17. $\log a^3$ $\log \sqrt[3]{a}$ $\log ab^2$ $\log a\sqrt{b}$
18. $\log (ab)^3$ $\log \sqrt[3]{ab}$ $\log \sqrt{a^2-b^2}$ $\log \sqrt{ab^2}$
19. $\log 3ab^2\sqrt{c}$ $\log 5a\sqrt[3]{7x^2}$ $\log (a+b^2)$ $\log (a+b)^2$
20. $\log \frac{2ab^2}{3c\sqrt{d}}$ $\log \frac{7a\sqrt{b}}{3cx^2}$ $\log \frac{ax}{a^2+x^2}$ $\log \frac{ax}{a^2-x^2}$
21. $\log \left(\frac{ax-b}{cx-d}\right)^2$ $\log \frac{ax-b^2}{cx-d^2}$ $\log \sqrt[3]{\frac{a+b^2}{a-b^2}}$ $\log \sqrt[3]{\frac{5ac}{a^2-b^2}}$

Digitized by Google

22. $\log \frac{5a\,(2x-3y)^4}{3b\sqrt{5x-y}}$ $\log \frac{1}{3a(b-c)^2\sqrt{d}}$

23. $\log(\sqrt{7}+\sqrt{8})$ $\log\sqrt{7-\sqrt{8}}$

24. $\log\sqrt[3]{5a+\sqrt{b}}$ $\log\sqrt{a-\sqrt{a^2-b^2}}$.

Fasse die folgenden logarithmischen Ausdrücke in einen Logarithmus zusammen:

25. $\log a + \log b$ $\log a - \log b$

26. $\log a + \log b - \log c$ $\log a - (\log b + \log c)$

27. $2\log a - \frac{1}{2}\log b + \log c$ $\log a + \frac{1}{3}\log b - 2\log c$

28. $3\log a - \frac{1}{2}\log(b+c)$ $\log a - \frac{1}{2}(\log b + \log c)$

29. $\log(a+b) + \log(a-b)$ $\log(a+b) + \log a - \log b$

30. $\log x + \log \frac{a}{x}$ $\log(1-x) + \log \frac{1+x}{1-x}$

31. $\log \frac{a}{b} + \log ab$ $2\log \frac{a}{b} + 3\log \frac{b}{a}$.

Suche folgende Logarithmen in den Tafeln auf. Sie sind sämtlich ohne Anwendung der Proportionaltäfelchen zu finden.

32.	log 7	log 35	log 57	log 91
33.	log 223	log 532	log 643	log 785
34.	log 2307	log 4030	log 5751	log 8970
35.	log 4715	log 8137	log 6540	log 9138
36.	log 357,6	log 47,38	log 5,831	log 0,7356
37.	log 0,0387	log 0,0084	log 0,09387	log 0,00092.

Suche zu folgenden Logarithmen, die sämtlich genau in den Tafeln stehen, den Numerus auf. Die Proportionalteile sind nicht zu benutzen. Es ist zu schreiben: Num 1,97772 = 95; oder $\log x = 1{,}97772$, $x = 95$.

38.	1,97772	1,56820	0,56820	0,56820 — 2
39.	2,69425	0,93611	0,70027 — 1	0,99021 — 2
40.	4,58636	0,43457 — 3	0,83020 — 1	0,75043.

Bestimme log und Num in den nachstehenden Aufgaben. Bei allen sind die Proportionalteile zu benutzen. — Hat bei der Bestimmung des Numerus der Logarithmus nicht die Form eines fünfstelligen Dezimalbruchs mit positiver Mantisse, so ist ihm zunächst diese Form zu geben. So ist Num 0,73 = Num 0,73000; Num $2\frac{1}{2}$ = Num 2,50000; Num $(-2\frac{1}{3})$ = Num (0,66667 — 3) (vgl. Abschnitt III, B, Aufg. 61); Num (— 0,4) = Num (0,60000 — 1).

Digitized by Google

41. log 53843 log 74067 log 80395 log 76306
42. log 38057 log 74183 log 62626 log 83638
43. log 34,043 log 3,7408 log 0,57654 log 0,084375
44. log 4,7385 log 0,38471 log 763,84 log 0,075638
45. log $47\frac{5}{8}$ log $736\frac{3}{4}$ log $\frac{43}{24}$ log $\frac{47}{36}$.

---

46. Num 4,38754 Num 3,05867 Num 2,75306 Num 1,65073
47. Num 0,83705 Num 2,85439 Num (0,40765 — 1) Num (0,37605 — 2)
48. Num 0,08375 Num (0,95368 — 3) Num 1,75431 Num (0,57093 — 1)
49. Num 2,37 Num 1,563 Num 0,337 Num (0,875 — 1)
50. Num $\frac{3}{4}$ Num $1\frac{2}{3}$ Num $(-\frac{1}{2})$ Num $(-\frac{5}{8})$
51. Num (— 0,3) Num (1,765) Num (— 0,005) Num (— 0,43).

Folgende Zahlenausdrücke sollen logarithmisch berechnet werden. Kommen Zahlen mit 6 Ziffern vor, so ist auch die 6. Ziffer mit Hilfe der Proportionalteile in Rechnung zu bringen, indem von den für die fünfte Stelle angegebenen Werten der Proportionalteile die Zehntel genommen werden. Sind 7 Ziffern vorhanden, so kürze man die Zahl bis auf 6 Ziffern ab. Für die Zahlen, welche mit 1000 bis 1090 anfangen, reichen die Tafeln auf 6 Stellen. Das Resultat ist immer auf 5 Stellen abzurunden.

52. $27{,}389 \cdot 0{,}73854$ $853{,}74 \cdot 0{,}037695$
53. $5{,}7684 \cdot 23{,}4787$ $7938{,}54 \cdot 0{,}0043768$
54. $276{,}586 \cdot 0{,}037948$ $538{,}974 \cdot 0{,}14839$
55. $\frac{2{,}3768}{0{,}87534}$ $\frac{34{,}785}{3{,}8768}$
56. $\frac{73{,}5875}{0{,}895347}$ $\frac{3{,}78548}{0{,}40382}$
57. $\frac{7{,}8564 \cdot 3{,}7653}{98{,}706}$ $\frac{17{,}539 \cdot 0{,}87643}{42{,}397}$
58. $\frac{5{,}4763 \cdot 19{,}8547}{23{,}6053}$ $\frac{736{,}894 \cdot 0{,}09387}{19{,}7508}$
59. $\frac{754{,}098}{24{,}6893 \cdot 8{,}4957}$ $\frac{98{,}3907}{0{,}76085 \cdot 58{,}9673}$
60. $\frac{839 \cdot 0{,}75436}{976 \cdot 0{,}08754}$ $\frac{0{,}43687 \cdot 47643}{9{,}7685 \cdot 8{,}0765}$
61. $\frac{576 \cdot 0{,}38954 \cdot 37{,}807}{983 \cdot 0{,}07549 \cdot 56{,}754}$ $\frac{3754 \cdot 45{,}786 \cdot 0{,}78394}{4537 \cdot 9{,}837 \cdot 0{,}34075}$

Digitized by Google

62. $(1{,}3578)^5$ $(1{,}5097)^6$ $(1{,}4987)^7$ $(2{,}7359)^4$

63. $\left(\frac{19}{13}\right)^{10}$ $\left(\frac{57}{41}\right)^8$ $\left(\frac{79}{53}\right)^7$ $\left(\frac{97}{75}\right)^9$

64. $\left(\frac{5768}{4307}\right)^4$ $\left(\frac{0{,}30854}{0{,}16687}\right)^6$ $\left(\frac{7638}{4075}\right)^2$ $\left(\frac{0{,}75834}{0{,}47039}\right)^5$

65. $(2\frac{217}{87})^6$ $(1\frac{47}{97})^7$ $(2\frac{8}{91})^5$ $(1\frac{43}{137})^8$

66. $(0{,}9387)^5$ $(0{,}89167)^6$ $(0{,}9736)^8$ $(0{,}79365)^7$

67. $\left(\frac{53}{75}\right)^4$ $\left(\frac{56385}{98076}\right)^2$ $\left(\frac{83}{94}\right)^5$ $\left(\frac{37{,}809}{63{,}735}\right)^3$

68. $(736{,}85)^{0{,}3}$ $(19{,}854)^{1{,}5}$ $(2{,}90305)^{0{,}7}$ $(93{,}878)^{1{,}4}$

69. $(5{,}06114)^{1{,}2}$ $(2960{,}118)^{0{,}3}$ $(7{,}19249)^{1{,}3}$ $(181{,}0193)^{0{,}4}$

70. $\sqrt[3]{9}$ $\sqrt[3]{9876}$ $\sqrt[3]{19}$ $\sqrt[3]{837}$

71. $\sqrt{10}$ $\sqrt{8507}$ $\sqrt{738}$ $\sqrt{58076}$

72. $\sqrt[7]{1000}$ $\sqrt[8]{93{,}768}$ $\sqrt[9]{100}$ $\sqrt[10]{876{,}39}$

73. $\sqrt{0{,}764}$ $\sqrt{0{,}078549}$ $\sqrt{0{,}9876}$ $\sqrt{0{,}003879}$

74. $\sqrt[3]{0{,}876}$ $\sqrt[3]{0{,}08395}$ $\sqrt[3]{0{,}2376}$ $\sqrt[3]{0{,}007934}$

75. $\sqrt[4]{0{,}837}$ $\sqrt[5]{0{,}07365}$ $\sqrt[6]{0{,}008394}$ $\sqrt[7]{0{,}01769}$

76. $\sqrt{\frac{73}{41}}$ $\sqrt[3]{\frac{789}{31}}$ $\sqrt{\frac{91}{17}}$ $\sqrt[3]{\frac{835}{59}}$

77. $\sqrt{17\frac{5}{9}}$ $\sqrt[3]{627\frac{5}{6}}$ $\sqrt{23\frac{5}{11}}$ $\sqrt[3]{193\frac{5}{7}}$

78. $\sqrt{\frac{83}{97}}$ $\sqrt[3]{\frac{973}{8745}}$ $\sqrt{\frac{197}{873}}$ $\sqrt[3]{\frac{573}{1768}}$

79. $\sqrt[4]{\frac{7}{9873}}$ $\sqrt[6]{\frac{8}{3769}}$ $\sqrt[5]{\frac{19}{89057}}$ $\sqrt[7]{\frac{27}{98471}}$

80. $(0{,}7428737)^{1{,}2}$ $(0{,}6894191)^{0{,}6}$

81. $(0{,}6942832)^{1{,}4}$ $(0{,}8602648)^{0{,}7}$

82. $73{,}845 \cdot \sqrt{0{,}0970093}$ $37{,}468 \cdot \sqrt[3]{0{,}887005}$

83. $78{,}9466 \cdot \sqrt[3]{0{,}8574}$ $45{,}6373 \cdot \sqrt{0.6573}$

84. $\frac{\sqrt{3{,}8057}}{0\,59463}$ $\frac{\sqrt{8{,}376}}{0{,}5788264}$ $\frac{\sqrt{5{,}6047}}{0{,}73058}$ $\frac{\sqrt[3]{7{,}6805}}{0{,}6576708}$

85. $\frac{9807}{2908} \cdot \left(\frac{0{,}7873}{0{,}9175}\right)^3$ $\frac{38075}{33746} \cdot \left(\frac{0{,}0857}{0{,}0683}\right)^5$

86. $\frac{85{,}39\ \sqrt{45}}{708{,}73}$ $\frac{0{,}8948\sqrt[3]{83}}{6{,}0895}$

87. $\frac{3{,}8497\sqrt[3]{100}}{0{,}7308}$ $\frac{0{,}80947\sqrt{10}}{0{,}23095}$

Digitized by Google

88. $\frac{89547}{15304} \cdot \sqrt{\frac{43}{9871}}$ $\qquad$ $\frac{703{,}85}{61{,}78} \cdot \sqrt[3]{\frac{87}{90478}}$

89. $\frac{837 \cdot (0{,}08834)^3}{385 \cdot (0{,}17587)^4}$ $\qquad$ $\frac{8715 \cdot (0{,}008738)^4}{2813 \cdot (0{,}000957)^3}$

90. $\frac{847 \cdot \sqrt{0{,}5374}}{331 \cdot \sqrt[3]{0{,}4378}}$ $\qquad$ $\frac{9{,}387 \cdot \sqrt[3]{0{,}09307}}{0{,}568 \cdot \sqrt{0{,}07038}}$

91. $\sqrt{41 \pm \sqrt{87}}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{97 - \sqrt[3]{813}}$

92. $\sqrt[3]{73 \pm \sqrt{8375}}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{65 \pm \sqrt{13785}}$

93. $\frac{7{,}38 \pm \sqrt{9{,}3076}}{0{,}53074}$ $\qquad$ $\frac{9{,}74 \pm \sqrt{73{,}086}}{0{,}7853}$

94. $\sqrt{\frac{4{,}308 \pm \sqrt{7{,}6805}}{0{,}4748}}$ $\qquad$ $\sqrt{\frac{8{,}37 \pm \sqrt{37{,}596}}{0{,}8905}}$

95. $\frac{73853}{32978} + \frac{28359}{10273}$ $\qquad$ $\frac{82708}{73943} + \frac{92250}{49031}$

96. $\frac{90387}{38053} + \sqrt{\frac{38{,}2233}{14{,}4803}}$ $\qquad$ $\frac{82703}{13097} + \sqrt{\frac{4{,}87217}{1{,}71531}}$

97. $\sqrt{\frac{21{,}90248}{1{,}163809}} + \sqrt{\frac{10{,}95347}{1{,}551746}}$ $\qquad$ $\sqrt[3]{\frac{8{,}230172}{116{,}3215}} + \sqrt[3]{\frac{187{,}6404}{930{,}5717}}$

97_1. 97_2. $aq^n + r\frac{q^n - 1}{q - 1}$ für $a = 3000$; $q = 1{,}04$; $r = 200$; $n = 10$. ($a = 4500$; $q = 1{,}035$; $r = 150$; $n = 13$).

97_3. 97_4. $aq^n - r\frac{q^n - 1}{q - 1}$ für $a = 3500$; $q = 1{,}05$; $r = 250$; $n = 8$. ($a = 6000$; $q = 1{,}045$; $r = 300$; $n = 17$).

97_5. 97_6. $-aq^n + r\frac{q^n - 1}{q - 1}$ für $a = 4500$; $r = 500$; $q = 1{,}0325$; $n = 11$. ($a = 10000$; $r = 800$; $q = 1{,}035$; $n = 20$).

97_7. 97_8. $-aq^n + rq\frac{q^n - 1}{q - 1}$ für $a = 7000$; $r = 250$; $q = 1{,}045$; $n = 8$. ($a = 10000$; $r = 350$; $q = 1{,}03$; $n = 15$).

98. Berechne $a^2 - b^2$ für $a = 7{,}3854$; $b = 3{,}7608$.

99. Desgl. $\sqrt{a^2 - b^2}$ für $a = 47{,}935$; $b = 39{,}873$.

100. Desgl. $\sqrt{\frac{1}{a} + \frac{1}{b}}$ für $a = 0{,}837$; $b = 0{,}765$.

101. Desgl. $\sqrt{\frac{a}{b} - \frac{b}{a}}$ für $a = 7368$; $b = 5473$.

102. Desgl. $\sqrt[3]{a^3 + b^3}$ für $a = 1{,}9768$; $b = 3{,}7805$*).

*) Man hat $\sqrt[3]{a^3 + b^3} = a\sqrt[3]{1 + \left(\frac{b}{a}\right)^3}$, $\sqrt[3]{a^3 - b^3} = a\sqrt[3]{1 - \left(\frac{b}{a}\right)^3}$.

Digitized by Google

103. Berechne $\sqrt[5]{a^3 - b^5}$ für $a = 83{,}75$; $b = 68{,}93$.

103_1. Desgl. $\frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}$ für $a = 2{,}47$; $b = 3{,}61$; $c = 1{,}59$.

103_2. Desgl. für $a = 18{,}05$; $b = 11{,}32$; $c = 15{,}43$.

103_3. Desgl. für $a = 7{,}45$; $b = 8{,}56$; $c = 13{,}21$.

103_4. Desgl. für $a = 1{,}23$; $b = 2{,}34$; $c = 3{,}45$.

103_5. Desgl. $\frac{(a+b)^2}{ab - c^2}$ für $a = 5{,}3$; $b = 4{,}7$; $c = 2{,}5$.

103_6. Desgl. für $a = 1{,}75$; $b = 3{,}61$; $c = 6$.

103_7. Desgl. $\sqrt{ab} - \sqrt[3]{cd}$ für $a = 1{,}7$; $b = 3{,}5$; $c = 2{,}4$; $d = 5{,}2$.

103_8. Desgl. $\sqrt[3]{a^2 - 3ab + b^2}$ für $a = 2{,}5$; $b = 2{,}4$.

---

104. Der Inhalt eines Dreiecks, dessen Seiten a, b und c sind, wird gefunden nach der Formel $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$, wo $s = \frac{1}{2}(a + b + c)$ ist. Wie groß ist derselbe für $a = 825\,m$, $b = 783\,m$, $c = 694\,m$?

105. Desgl. für $a = 82{,}374\,m$, $b = 73{,}685\,m$, $c = 64{,}873\,m$?

106. Der Inhalt eines Dreiecks wird aus den vier Berührungsradien gefunden nach der Formel $\sqrt{\varrho\varrho_1\varrho_2\varrho_3}$, wo für den Radius des eingeschriebenen Kreises ϱ die Gleichung gilt $\frac{1}{\varrho} = \frac{1}{\varrho_1} + \frac{1}{\varrho_2} + \frac{1}{\varrho_3}$. Wie groß ist hiernach der Inhalt eines Dreiecks für $\varrho_1 = 8{,}37\,m$, $\varrho_2 = 6{,}54\,m$, $\varrho_3 = 5{,}87\,m$?

107. Desgl. für $\varrho_1 = 81{,}97\,m$; $\varrho_2 = 73{,}68\,m$; $\varrho_3 = 64{,}19\,m$?*)

108. Wie heißen die Grundzahlen der Logarithmensysteme, in welchen man hat: 1) $\log 20 = 3$; 2) $\log 873 = 4$; 3) $\log 7776 = 5$; 4) $\log 6561 = 8$; 5) $\log 555 = 3{,}92620$; 6) $\log 1000 = 3{,}85530$?

109. Wie groß sind 1) $^{(2)}\log 34$; 2) $^{(3)}\log 100$; 3) $^{(4)}\log 1000$; 4) $^{(5)}\log 3333$?

110. Berechne 1) $^{(7)}\mathrm{Num}\,3$; 2) $^{(8)}\mathrm{Num}\,5$; 3) $^{(5)}\mathrm{Num}\,0{,}56932$; 4) $^{(9)}\mathrm{Num}\,4{,}00724$.

111. Berechne für das natürliche Logarithmensystem, dessen Basis $e = 2{,}71828$ ist: 1) Log 2; 2) Log 3; 3) Log 50; 4) Log 1000.

---

*) Als weitere Aufgaben empfehlen sich hier die Anfangsaufgaben (3. bis 34.) des Abschnitts XXIX, B.

Digitized by Google

XIX. Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

A. Theorie.

1. Im allgemeinen Sinne versteht man unter einer Gleichung einen Ausdruck für die Gleichheit zweier Größen. Die Gleichheit wird bezeichnet durch das Gleichheitszeichen (=). Die Größen, welche einander gleichgesetzt sind und auf beiden Seiten des Gleichheitszeichens stehen, heißen die Seiten der Gleichung. — Man unterscheidet identische Gleichungen und Bestimmungsgleichungen. Identische Gleichungen sind solche Gleichungen, deren Seiten entweder schon an sich gleich sind oder infolge mathematischer Gesetze, z. B. $a = a$; $b + 5 = b + 5$; $2 \cdot 3 = 6$; $a + b = b + a$. Alle mathematischen Formeln sind identische Gleichungen, z. B. $a + b = b + a$; $a \cdot b = b \cdot a$; $(ab)^n = a^n \cdot b^n$ usw.

2. Bestimmungsgleichungen sind solche Gleichungen, welche zur Bestimmung einer oder mehrerer in ihnen vorkommenden unbekannten Größen dienen; sie müssen daher eine Größe oder mehrere Größen enthalten, deren Wert man noch nicht kennt. Diese unbekannten Größen, kurz die Unbekannten genannt, werden ausgedrückt durch die letzten Buchstaben des Alphabets, durch x, y, z usw. Die außer diesen in der Gleichung etwa vorkommenden Buchstaben gelten als bekannte Größen. In einer Bestimmungsgleichung soll die unbekannte Größe so bestimmt oder durch die bekannten Größen ausgedrückt werden, daß der für sie gefundene Wert die Gleichung erfüllt oder der Gleichung genügt, d. h. die Bestimmungsgleichung zu einer identischen macht, wenn man für die unbekannte Größe den gefundenen Wert setzt. So ist $x + 3 = 8$ eine Bestimmungsgleichung; x ist die unbekannte Größe, 3 und 8 sind bekannte Größen. Der Gleichung wird genügt durch $x = 5$; denn $5 + 3 = 8$ ist eine identische Gleichung. Jede Bestimmungsgleichung schließt daher eine Aufgabe ein, die unbekannte Größe zu bestimmen.

3. Manche Gleichungen können bald als identische, bald als Bestimmungsgleichungen gelten. Zu diesen gehören die Bedingungsgleichungen oder Relationen, Gleichungen, welche die Abhängigkeit mehrerer Größen voneinander oder die Beziehung derselben zueinander ausdrücken. Sind z. B. die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks a und b, die Hypotenuse c, so muß zwischen a, b und c die Relation $a^2 + b^2 = c^2$ stattfinden. Sind alle drei Seiten bekannt, so ist die Gleichung identisch; ist eine unbekannt, so läßt sich diese mit Hilfe der Gleichung finden. — Auch zwischen den Koeffizienten einer Gleichung kommen vielfach Bedingungsgleichungen vor. Sollen die Koeffizienten der Gleichung $x^4 + ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ der Gleichung $c = \frac{1}{2}ab - \frac{1}{8}a^3$ genügen, so ist diese Gleichung eine Bedingungsgleichung oder Relation zwischen den Koeffizienten.

Digitized by Google

4. Ohne nähere Angabe versteht man unter Gleichungen fast nur **Bestimmungsgleichungen**. In diesem Sinne spricht man von der Auflösung der Gleichungen, von dem Grade der Gleichungen usw. — Wie alle Gleichungen überhaupt, werden insbesondere auch die Bestimmungsgleichungen in **algebraische Gleichungen** und **transzendente Gleichungen** eingeteilt. Algebraisch heißt eine Bestimmungsgleichung, in welcher an den unbekannten Größen keine anderen als die sechs algebraischen Operationen (Addition, Subtraktion, Multiplikation, Division, Potenzierung und Radizierung), namentlich also auch weder Exponentiierung, noch Logarithmierung (vgl. Anm. S. 137) vorgenommen worden sind. Solche Gleichung läßt sich durch geeignete Umformungen immer auf die Gestalt $x^n + ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + px + q = 0$ bringen, bei der links ein nach Potenzen der unbekannten Größe x geordnetes Aggregat, rechts der Wert Null steht. Je nach der höchsten dabei vorkommenden Potenz von x bestimmt sich der Grad der Gleichung. — Alle anderen Gleichungen heißen transzendent; dahin gehören namentlich auch die Gleichungen, bei denen x als Exponent auftritt, wie $x + a^x = b$ und Gleichungen, in denen $\log x$ vorkommt, wie $ax + b \log x = c$. — Aus solchen transzendenten Gleichungen lassen sich bisweilen algebraische Gleichungen herleiten. So folgt aus der Gleichung $a \cdot b^{x+1} = c \cdot d^{x-1}$ durch Logarithmierung die algebraische Gleichung

$$\log a + (x + 1) \log b = \log c + (x - 1) \log d.$$

5. Die Lehre von den algebraischen Gleichungen bildet den Inhalt der Algebra*) im engeren Sinne. Die algebraischen Gleichungen werden wieder eingeteilt nach dem **Grade**, in welchem die Unbekannte vorkommt. Kommt die Unbekannte nur in der ersten Potenz vor, so heißt die Gleichung eine **Gleichung vom ersten Grade** oder eine **einfache Gleichung**, z. B. $ax + b = 0$, $ax + b = cx + d$. Kommt die Unbekannte auch in der zweiten Potenz vor, aber in keiner höheren, so heißt die Gleichung eine **Gleichung vom zweiten Grade** oder eine **quadratische Gleichung**, z. B. $ax^2 + bx + c = 0$. Entsprechend ist $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$ eine Gleichung vom dritten, $ax^4 + bx^3 + cx^2 + d = 0$ eine solche vom vierten Grade. — Gleichungen, in welchen x unter einer Wurzel, im Nenner oder in einer Klammer vorkommt, müssen erst umgeformt werden, wenn man den Grad derselben bestimmen will.

6. Die Gleichungen werden ferner eingeteilt nach der **Zahl der Unbekannten**, welche in ihnen vorkommen, in **Gleichungen mit einer Unbekannten**, **Gleichungen mit zwei Unbekannten**, **Gleichungen mit drei Unbekannten** usw. Sollen sich die Unbekannten genau bestimmen lassen, so müssen so viele voneinander

*) Das Wort **Algebra** kommt von dem arabischen Wort Algebr, welches Ergänzung heißt. Die Ergänzung von $x - 5$ zu x ist 5. So wird aus $x - 5 = 3$ die neue Gleichung $x = 5 + 3$ usw. — Das Wort Algebra war schon im 16. Jahrhundert (vor Vieta) in Gebrauch.

Digitized by Google

unabhängige Gleichungen vorhanden sein, als Unbekannte gesucht werden. Auch die Gleichungen mit mehr als einer Unbekannten werden nach ihrem Grade unterschieden. Um den Grad beurteilen zu können, muß die Gleichung auf die Form gebracht werden, bei der auf der einen Seite Null, auf der anderen ein Aggregat von Gliedern steht, die aus bekannten und unbekannten Größen durch Multiplikation gebildet sind. Der Grad eines Gliedes richtet sich nach der Zahl der in ihm vorkommenden unbekannten Faktoren, das Glied höchsten Grades bestimmt den Grad der Gleichung.

7. Die einfachsten Bestimmungsgleichungen sind die *Gleichungen vom ersten Grade mit einer Unbekannten*. Es handelt sich daher zunächst um die Auflösung dieser Gleichungen. Diese erfolgt durch systematische Umformung der Gleichung in Gemäßheit des in Abschnitt I, 5 aufgestellten Grundsatzes, daß gleiche Operationen, an gleichen Größen vorgenommen, zu gleichen Ergebnissen führen. Dieser Grundsatz führt zu den in Abschn. II, 33; XI, 11; XV, 17; XVIII, 19 angegebenen besonderen Sätzen, die man für den Zweck der Gleichungs-Auflösung in folgender Weise ausdrücken kann: 1) Man kann beide Seiten der Gleichung um dieselbe Zahl vermehren oder vermindern; 2) man kann beide Seiten der Gleichung mit derselben Zahl multiplizieren oder dividieren; 3) man kann beide Seiten der Gleichung mit derselben Zahl potenzieren, radizieren oder logarithmieren. In 2) ist auch der Satz enthalten: 4) Man kann allen Gliedern der Gleichung das entgegengesetzte Zeichen geben.

8. Die Auflösung der Gleichung ist erreicht, wenn man sie durch die vorgenommenen Umformungen in die Gestalt gebracht hat, bei der auf der einen Seite nur die unbekannte Größe steht, auf der anderen nur bekannte Größen. Dann ist die unbekannte Größe durch die bekannten ausgedrückt. Man muß es daher verstehen, Größen von einer Seite der Gleichung nach der anderen zu bringen, ohne die Richtigkeit der Gleichung zu beeinträchtigen. Zu diesem Zwecke hat man aus den oben in 7. angegebenen Sätzen folgende Sätze zu bilden:

1) *Ein Summand der einen Seite wird ein Subtrahend der anderen Seite.* So wird aus $x + a = b$, indem man $a = a$ subtrahiert, $x = b - a$.

2) *Ein Subtrahend der einen Seite wird ein Summand der anderen Seite.* So wird aus $x - a = b$, indem man $a = a$ addiert, $x = b + a$.

3) Beide Sätze lassen sich in den einen Satz zusammenfassen: *Ein Glied der einen Seite der Gleichung kann auf die andere Seite gesetzt werden, wenn man demselben das entgegengesetzte Zeichen gibt.* So wird aus $x \pm a = b$ die neue Gleichung $x = b \mp a$. — Dieser Satz heißt *der Satz von der Versetzung oder Transposition der Glieder.* Diese Versetzung geschieht nicht Schritt für Schritt mit den Gliedern einzeln, sondern mit allen zu versetzenden Gliedern zugleich. So folgt aus $3x - a + b = 2x - c - x + d$ sofort $3x - 2x + x = a - b - c + d$.

Digitized by Google

Man hat die Glieder mit x auf die eine Seite, die Glieder ohne x auf die andere Seite zu bringen. In der Regel bringt man die Glieder mit x auf die linke Seite, die Glieder ohne x auf die rechte Seite. Kann man es im voraus übersehen, auf welcher Seite x positiv wird, so bringt man x nach dieser Seite, und vertauscht, falls dies nötig ist, nachher die Seiten der Gleichung, z. B. $3x+7=8x-13$, $20=5x$, $x=4$. — Sind die Glieder mit x auf eine Seite gebracht und die Glieder ohne x auf die andere Seite, so sind die Glieder mit x und die ohne x zu vereinigen. Kommen nur Zahlenfaktoren vor, so ist die Vereinigung leicht (II, 20 und 21). Kommen Buchstabenfaktoren vor, so muß man VIII, 1 anwenden. So ist $ax+bx=(a+b)x$, $ax+bx-x=(a+b-1)x$. — Eine Gleichung auf Null bringen heißt alle Glieder nach einer Seite (der linken) bringen, so daß auf der anderen Seite (rechts) nur Null bleibt. — Der Satz von der Versetzung der Glieder reicht aus für die Auflösung der Gleichungen Nr. 1.—36.

4) Ein Faktor der einen Seite wird ein Divisor der anderen Seite. So folgt aus $ax=b$, indem man mit $a=a$ dividiert, $x=\frac{b}{a}$. Dieser Satz soll eingeübt werden in Nr. 37.—58. In Nr. 59.—90. und 121.—173. kommt dieser Satz nebst dem vorhergehenden zur Anwendung.

5) Ein Divisor der einen Seite wird ein Faktor der anderen Seite. So folgt aus $\frac{x}{a}=b$ durch Multiplikation mit a die neue Gleichung $x=b\cdot a$ oder $a\cdot b$. — Dieser Satz soll in Nr. 91.—120. und 194.—215. eingeübt werden. Bei der Anwendung dieses und des vorigen Satzes hat man wohl zu beachten, daß Multiplikation und Division sich auf die ganze Seite der Gleichung beziehen, nicht auf ein einzelnes Glied. So folgt aus $ax+b=c$ nicht $x+b=\frac{c}{a}$, aus $3x=6a+b$ nicht $x=2a+b$, aus $\frac{x}{3}+a=b$ nicht $x+a=3b$ usw. Ähnliches gilt von den in 6) angegebenen Sätzen.

Satz 5) oder Satz 8, 2) wird dazu benutzt, um die Gleichung von ihren Nennern zu befreien. Man sucht den Hauptnenner und multipliziert mit ihm alle Glieder der Gleichung. Hier hat man nicht zu vergessen, daß auch die Glieder, welche nur aus Ganzen bestehen, mit dem Hauptnenner zu multiplizieren sind. Ist der Zähler eines Bruches mehrgliedrig und hat der Bruch das Zeichen — (minus) vor sich, so müssen bei dem Fortfallen des Bruchstriches, der zugleich die Stelle der Klammer vertreten hatte, alle Glieder des Zählers das entgegengesetzte Zeichen erhalten. Die Fortschaffung der Nenner ist nur dann notwendig, wenn x darin vorkommt. Dennoch wird das Fortschaffen der Nenner fast immer zweckmäßig sein. Die Gleichung wird dadurch wesentlich vereinfacht und folglich die Auflösung wesentlich erleichtert. Auch muß man schließlich, um die Glieder mit x

Digitized by Google

und die ohne x vereinigen zu können, doch die Brüche gleichnamig machen. — Das Fortschaffen der Nenner soll in Nr. 237. bis 350. geübt werden. — Dezimalbrüche brauchen nicht beseitigt zu werden; sie werden wie ganze Zahlen behandelt. Doch kann man sich auch die Rechnung dadurch erleichtern, daß man in allen Gliedern das Komma um eine gleiche Anzahl von Stellen weiter rückt und so alle Dezimalbrüche in ganze Zahlen verwandelt. Man muß das Komma um soviel Stellen nach rechts rücken, als der meiststellige Dezimalbruch Stellen hat.

6) Ein Potenzexponent der einen Seite wird ein Wurzelexponent der anderen Seite, und umgekehrt: ein Wurzelexponent der einen Seite wird ein Potenzexponent der anderen Seite. So wird aus $x^n = a$ die neue Gleichung $x = \sqrt[n]{a}$; aus $\sqrt[n]{x} = a$, $x = a^n$. Ähnlich wird aus $\log x = a$, $x = 10^a$ oder $x = \text{Num}\, a$; aus $a^x = b$, $x \log a = \log b$, d. h. $x = \log b : \log a$.

Kommt x unter einer Wurzel vor, so muß die Wurzel fortgeschafft werden. Dies geschieht dadurch, daß man die betreffende Wurzel isoliert, d. h. auf eine Seite allein bringt, und beide Seiten der Gleichung mit dem Wurzelexponenten potenziert, also bei einer Quadratwurzel quadriert, bei einer Kubikwurzel kubiert. So gibt $\sqrt[n]{x} = a$ sofort $x = a^n$; $\sqrt[n]{x} = a$ gibt $x = a^n$; $\sqrt{x} + a = b$ gibt $\sqrt{x} = b - a$, $x = (b - a)^2$. Hierbei hat man wohl zu beachten, daß man nicht die einzelnen Glieder der Gleichung zu potenzieren (quadrieren oder kubieren) hat, sondern die ganzen Seiten der Gleichung. So folgt aus $\sqrt{x+5} = \sqrt{x} + 1$, $x + 5 = (\sqrt{x} + 1)^2 = x + 2\sqrt{x} + 1$, $2\sqrt{x} = 4$, $\sqrt{x} = 2$, $x = 4$. Kommen in einer Gleichung zwei Quadratwurzeln vor, so muß man zuerst nur eine fortschaffen und diese zu dem Zwecke isolieren, dann die noch bleibende Quadratwurzel. Ganz so verfährt man meistens, wenn drei Quadratwurzeln vorkommen. Kommen vier Quadratwurzeln vor, so wird es meistens am besten sein, je zwei auf eine Seite zu bringen und dann zu quadrieren. Das Fortschaffen der Wurzeln soll geübt werden in Nr. 405.—554.

9. Noch eine Operation muß bei der Auflösung der Gleichungen erwähnt werden, die Auflösung der Klammern. Diese geschieht ganz nach den oben (V, 2 und 3 und VI, 7) dafür aufgestellten Sätzen. Nur solche Klammern müssen unbedingt aufgelöst werden, in welchen x vorkommt. Klammern, in welchen x nicht vorkommt, werden nur dann aufgelöst, wenn dadurch eine Vereinfachung der Gleichung erzielt wird. Die Auflösung der Klammern soll zunächst in Nr. 174.—193., dann in Nr. 216.—236. geübt werden.

10. Nach dem Obigen kommen daher bei der Auflösung der Gleichungen folgende Operationen vor: 1) Fortschaffung der Wurzeln (Irrationalitäten), 2) Fortschaffung der Nenner, 3) Fortschaffung der Klammern, 4) Versetzung der Glieder, 5) Vereinigung der Glieder mit x und der ohne x, 6) Division durch den Faktor von x. — Diese Operationen hat der Anfänger in der hier angegebenen Reihenfolge zu merken.

Digitized by Google

11. Einige besondere Bemerkungen erleichtern oft die Auflösung der Gleichung.

1) Bevor man an die Beseitigung der Nenner geht, ist es oft zweckmäßig, solche Glieder zu vereinigen, welche schon gleichnamig sind oder sich leicht gleichnamig machen lassen. Oft fallen dadurch die Brüche fort oder lassen sich kürzen. So folgt aus der Gleichung $\frac{1}{8}x - 2x + 18 = \frac{4x}{8}$ die Gleichung $18 = 2x + x = 3x$, d. h. $x = 6$.

2) Bevor man an die Beseitigung der Nenner geht, ist es oft zweckmäßig, die ganzen Zahlen (nach Abschnitt III, A, V) gegenseitig möglichst fortzuheben. So hat man z. B. bei der Gleichung $1\frac{5}{9}x - 100 = 2\frac{1}{3}x - 186\frac{1}{3} + 55\frac{1}{3} - \frac{1}{2}x$ eine große Rechnung, wenn man die Gleichnamigmachung sofort vornimmt. Man schreibt zweckmäßigerweise zunächst $\frac{5}{9}x = 1\frac{1}{3}x - 31\frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2}x$ und macht jetzt alle Glieder gleichnamig.

3) Oft ist es unzweckmäßig, gleich alle Brüche gleichnamig zu machen; man macht erst diejenigen Brüche gleichnamig, welche sich leicht gleichnamig machen lassen. In diesem Falle verschwinden die Nenner nicht sofort vollständig. Man tut hierbei gut, die betreffenden Brüche auf einer Seite, die anderen Glieder auf der anderen Seite zu vereinigen. So hat man in der Gleichung

$$\frac{10-x}{3} + \frac{13+x}{7} = \frac{7x+26}{x+21} - \frac{17+4x}{21}$$

das vierte Glied nach links zu bringen und links die Brüche zu addieren. Das gibt links $\frac{126}{21} = 6$. Daher ist weiter zu lösen

$$6 = \frac{7x+26}{x+21}.$$

Ähnlich wird man in Nr. 339. das 3. Glied nach rechts bringen, und beide Seiten für sich gleichnamig machen; in Nr. 340. das 2. und 3. Glied umstellen usw.

4) Haben beide Seiten der Gleichung oder alle Glieder der Gleichung einen gemeinsamen Faktor, so kann man diesen Faktor fortlassen, d. h. die Gleichung durch diesen Faktor dividieren. Durch einen solchen Faktor ist stets zu dividieren, wenn sich mit demselben nicht auch zugleich x forthebt. So folgt aus $(m-n)(3x-5) = (m-n)x + 7(m-n)$, $3x - 5 = x + 7$ usw. — Kommt x nur in dem gemeinsamen Faktor vor, so kann man den Faktor gleich Null setzen und aus der so erhaltenen Gleichung x bestimmen Damit ist auch die Gleichung selber aufgelöst. Aus

$$a(1-x) - \frac{b}{c}(1-x) = d\ (1-x)$$

folgt sofort $1 - x = 0$, d. h. $x = 1$; denn man hat

$$(a - \frac{b}{c} - d)\ (1-x) = 0, \text{ d. h. } 1 - x = 0.$$

Digitized by Google

5) Haben alle Glieder der Gleichung den Faktor x, so muß $x = 0$ der Gleichung genügen. Aus

$$ax - x = bx \text{ oder } ax + bx - x = 0$$

folgt sofort $x = 0$. — Kommt x in der Gleichung nicht anderweitig vor, so ist $x = 0$ die einzige Auflösung der Gleichung. Kommt x sonst noch in der Gleichung vor, so ist es gestattet, bevor die quadratischen Gleichungen erklärt sind, durch den Faktor x zu heben. Aus $ax^2 - x = bx$ folgt $ax - 1 = b$ usw.

12. Exponentialgleichungen sind Gleichungen, in welchen x als Exponent vorkommt. Hier können nur solche Exponentialgleichungen gelöst werden, welche sich auf algebraische Gleichungen reduzieren lassen. Gleichungen dieser Art müssen sich auf die Form $a^x = b$ bringen lassen. Diese wird durch Logarithmierung gelöst. — Manche Exponentialgleichungen lassen sich auch ohne Anwendung der Logarithmen lösen. Es sind solche, in welchen sich schließlich beide Seiten der Gleichung durch **Potenzen derselben Basis** ausdrücken lassen. Dann schließt man: Potenzen von gleicher Basis können nur dann gleiche Werte haben, wenn sie auch gleiche Exponenten besitzen, man hat also nur die Potenzexponenten einander gleich zu setzen und aus der sich so ergebenden Gleichung x zu bestimmen. Aus $a^{x-1} = a^{3-x}$ folgt $x - 1 = 3 - x$, d. h. $x = 2$; aus $(0{,}25)^{x-1} = 2^{10-3x}$ folgt, da $0{,}25 = \frac{1}{4} = (\frac{1}{2})^2 = 2^{-2}$ ist, $2^{-2(x-1)} = 2^{10-3x}$, also $-2x + 2 = 10 - 3x$, d. h. $x = 8$. — Kommt in einer Gleichung x zugleich als Exponent und als Basis vor, so läßt sich eine solche Gleichung nicht mehr in eine algebraische Gleichung verwandeln, sie ist **transzendent** (über die Algebra hinausgehend), z. B. $a^x = bx + c$.

B. Aufgaben.

1. $x + a = b$
2. $x - a = b$
3. $b + x = a$
4. $a = x - b$
5. $a - x = b$
6. $a = b - x$
7. $x - 9 = 10$
8. $8 + x = 11$
9. $x - 5 = 6$
10. $x - 9 = 1$
11. $x + 5 = 8$
12. $13 + x = 43$
13. $9 + x = 5$
14. $x - 7 = 3$
15. $x - 53 = 37$
16. $9 = 15 - x$
17. $x - 17 = 23$
18. $13 = 9 - x$
19. $27 - x = 16$
20. $18 = 7 - x$
21. $x - 11 = -6$
22. $9 - x = -5$
23. $x + 8 = 9{,}6$
24. $2{,}8 = 5 - x$
25. $x + 7{,}5 = 9{,}3$
26. $3{,}7 = 7{,}3 - x$
27. $16{,}5 - x = 8{,}7$
28. $19{,}8 = 18{,}9 - x$

Digitized by Google

29. $x - 5{,}7 = 2{,}8$
30. $x + 7{,}5 = 5{,}7$
31. $x + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$
32. $\frac{1}{2} = \frac{3}{5} - x$
33. $\frac{1}{12} = \frac{3}{4} - x$
34. $\frac{1}{6} - x = -\frac{1}{8}$
35. $\frac{4}{5} + x = \frac{3}{4}$
36. $\frac{2}{5} = \frac{3}{8} - x$

---

37. $ax = b$
38. $a = bx$
39. $ax = b + c$
40. $a - b = cx$
41. $5x = 15$
42. $28x = 7$
43. $3x = 24$
44. $56x = 8$
45. $4x = -12$
46. $36 = -9x$
47. $33x = -11$
48. $6x = -4$
49. $7x = 0$
50. $8x = 3x$
51. $5x = 3{,}5$
52. $7x = -4{,}2$
53. $0{,}72 = -9x$
54. $0{,}3 = -6x$
55. $7x = 8\frac{2}{5}$
56. $9x = 11\frac{1}{4}$
57. $8\frac{3}{4} = -5x$
58. $13x = -10\frac{1}{9}$

---

59. $ax - b = c$
60. $mx + n = p$
61. $a = bx + c$
62. $m = px - q$
63. $m + nx = a$
64. $a = p - qx$
65. $bx + a = a$
66. $m = m - nx$
67. $7x - 5 = 9$
68. $9x + 4 = 31$
69. $5x - 16 = 9$
70. $8x + 1 = 17$
71. $25 = 29 - 4x$
72. $4 = 16 - 3x$
73. $19 = 100 - 9x$
74. $29x - 97 = -10$
75. $15x - 2{,}7 = 4{,}8$
76. $8{,}5 - 14x = -1{,}3$
77. $7x + 19 = 14{,}8$
78. $5{,}2 = 9 - 19x$
79. $5x - \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$
80. $\frac{1}{20} = \frac{3}{4} - 7x$
81. $\frac{1}{15} + 11x = \frac{4}{5}$
82. $\frac{5}{7} = 8x - \frac{17}{21}$
83. $3(x + a) = 15$
84. $7(x - 1) = 35$
85. $a(x + b) = 2ab$
86. $3ab = (3a - x)b$
87. $9 = (18 - x) \cdot 0{,}5$
88. $15 = 0{,}3 \cdot (27 + x)$
89. $(a - b)^2 = (a - x)(a - b$
90. $(x - b)(a + b) = a^2 - b^2$

Digitized by Google

91. $\frac{x}{a} = b$

92. $\frac{x}{m} = 1$

93. $\frac{x}{5} = 8$

94. $\frac{x}{8} = 0$

95. $7 = \frac{x}{3}$

96. $\frac{x}{9} = 0$

97. $\frac{x}{m} = a + b$

98. $\frac{x}{2} = a + 0{,}5$

99. $\frac{x}{0{,}5} = 6$

100. $\frac{x}{0{,}25} = 8$

101. $1 = \frac{a}{x}$

102. $3 = \frac{12}{x}$

103. $0{,}5 = \frac{8}{x}$

104. $9 = \frac{0{,}3}{x}$

105. $\frac{x}{16} = 0{,}375$

106. $\frac{x}{0{,}8} = 86{,}25$

107. $x : \frac{2}{3} = 6$

108. $6 = \frac{2}{5} : x$

109. $x : 1\frac{1}{2} = 3\frac{1}{3}$

110. $1\frac{3}{4} = 5\frac{1}{4} : x$

111. $x : \frac{5}{8} = 16$

111_1. $4\frac{1}{2} : 1\frac{5}{7} = 8\frac{3}{4} : x$

111_2. $6\frac{3}{4} : 7\frac{1}{5} = 4\frac{3}{8} : x$

111_3. $2\frac{1}{7} : 5\frac{1}{3} = 2\frac{1}{4} : x$

111_4. $5\frac{5}{7} : 4\frac{1}{6} = 2\frac{2}{5} : x$

111_5. $4\frac{3}{8} : 3\frac{3}{4} = 6\frac{2}{3} : x$

111_6. $2\frac{2}{3} : 4\frac{1}{6} = 2\frac{2}{5} : x$

112. $x : 7\frac{5}{8} = 0$

113. $\frac{x}{8} + 3 = 8$

114. $5 - \frac{x}{7} = 4$

115. $\frac{x}{0{,}3} - 9 = 1$

116. $2 = 7 - \frac{x}{0{,}4}$

117. $\frac{x+10}{8} = 3$

118. $3 = \frac{19-x}{5}$

119. $8 = \frac{7-x}{0{,}5}$

120. $\frac{x-9}{0{,}8} = 15$

---

121. $3x + 2x - 4 = 21$

122. $9x - 7x + 14 = 20$

123. $8x = 11 - 5x + 2x$

124. $15x = 57 - 9x + 5x$

125. $7x - 9 = 3x + 31$

126. $8x - 5 = 17 - 3x$

127. $6 + 17x = 10x + 27$

128. $13x - 35 = 9x - 7$

129. $3x - 23 = 17 - 5x$

130. $19 - 3x = 14 - 8x$

131. $4x + 7 = 98 - 9x$

132. $51x + 35 = 15x - 73$

133. $ax + bx = c$

134. $mx - nx = a$

135. $ax - x = b$

136. $x - mx = a$

137. $ax - bx = 0$

138. $ax = x$

Digitized by Google

139. $cx = a - bx$ 140. $ax = b + cx$
141. $x = a + mx$ 142. $a - x = mx$
143. $ax - b = cx - d$ 144. $ax + bx - c = x$
145. $ax - b = a - bx$ 146. $ax - a = bx - b$
147. $ax - m = bx - x$ 148. $x - ax + 1 = bx$
149. $ax - b = cx - b$ 150. $ax + bx - x = 0$
151. $ax - 7 = 5x + 8$ 152. $ax - x = 10 - 2x$
153. $ax + bx - cx + x = 0$ 154. $ax - x = bx - cx$

---

155. $19x - 17 - 3x + 72 = 12 + 9x - 25 + 4x + 83$
156. $13 + 17x - 5 + 23 - 7x - 97 = 10x + 29 - 5x$
157. $x = 91 - 76x - 35 + 27x + 47 + 9x + 33 + 7x$
158. $100x - 100 = 7x - 38 + 31x - 25x + 141 + 58x$
159. $51x - 45 + 71 - 9x = x - 145 + 39 - 47x$
160. $25 - x - 97 + 39x = 73x - 26 - 81x + 41 + 17x$
160_1. $\frac{13}{12}x - \frac{5}{8} + \frac{5}{6}x = \frac{10}{9}x - \frac{31}{24} \cdot 1 + 34\frac{1}{2}$.
160_2. $\frac{2}{3}x - 1 - \frac{3}{4}x = \frac{7}{9}x + 2\frac{3}{8} - \frac{13}{12}x + 14\frac{1}{8} - \frac{x}{6}$.
160_3. $\frac{8}{9}x - \frac{7}{15} - \frac{11}{6}x = 7 - \frac{6}{5}x + \frac{3}{2}x - 56$
161. $10x - 5a + 7b + x = 17x - 3a + 5b - 8x + 4b$
162. $0 = 9a - 7b - 11x + 12b - 5a - 3x - a + b + 11x$
163. $19x + 3a - 12b = 14x + 15a - 7b + x - 13b$
164. $29a - 29x = 51b + 7x + 45a - 41x - a - 26b$
165. $5{,}83 - 5{,}72x - 89{,}4 + 17{,}5x = 7{,}38x - 8{,}87 - 3{,}9x$
166. $8{,}45x - 79{,}1 + 3{,}79 = 93{,}7 + 7{,}3x - 17{,}51x - 19{,}73$
167. $0{,}34 - 7{,}8x - 9{,}438 + 17{,}45x + 7{,}8 = 9x - 0{,}9795$
168. $7{,}34x - 0{,}943 + x = 63{,}737 - 13{,}85x + 0{,}63x$

---

169. $7ax - 9m - 5bx = a - 7bx - 8m + 4ax$
170. $x + 5a - 5ax + 1 = 6a + 7b - 6ax + bx - 6b$
171. $9mx - 18n + 15nx - 7m = 14nx - 6m + 8mx - 19n$
172. $19a - 10ax + 15b - 8bx = 16b - 9ax + 16a - 11bx$
173. $47ax - 91 + 8bx - 53cx + 37 = 7ax - 54 - 17cx$

---

174. $(7a - 5x) - (5b - 17x) - (8x + 7a - 5b) = 0$
175. $(8x + 5) + (5x - 8) + 7a = 10x - (3 - 2x - 8a)$

Digitized by Google

176. $x-(7x-6b-9a)+(6x-5b)=2x-(x-8a)$

177. $7bx-(8+ax-bx)=(5bx-a)-(x-3bx+9)$

178. $7(5x-3)+9=58$ 179. $3(9x-4)-31=146$

180. $19-0{,}4(3x-2)=9$ 181. $3{,}8-1{,}4(5-8x)=30{,}4$

182. $m(a-x)=n(a-x)$ 183. $a(m-x)+b(x-m)=0$

184. $3(x-5+4a)-5(3x+a-5)+(5x-3+m)=m$

185. $5(3x-7)-7(2a-3x+7)-2(5x-7a+36)=0$

186. $(2x-5)a-(5x-1)b=3(b-a)-(5b-2a+2)x$

187. $(5a-b)x-(5m-x)n-(8a-7b)x+5mn=0$

188. $4(3a-9x+3)-2(6a-8b-15x)=4b$

189. $3(4x^2-7x+10)=2(6x^2-5x+4)$

190. $5(3x^2-8x+9)=3(5x^2-7x-4)$

190_1. $\frac{1}{3}\cdot(5x+4)-\frac{1}{4}\cdot(2x-1)=\frac{1}{5}\cdot(7x+3)-\frac{1}{6}\cdot(2x-11)$

190_2. $\frac{3}{52}x+\frac{1}{19}\cdot(60-21x)=2-\frac{1}{39}\cdot(16-5x)-\frac{1}{38}\cdot(45x-61)$

190_3. $\frac{1}{20}\cdot[(2x+3)^2-5]-\frac{1}{5}\cdot[x^2+1]=+1\frac{1}{5}+x$

190_4. $\frac{1}{35}\cdot[(5x+4)^2-46]-\frac{1}{7}(5x^2+4)=6x-16$

191. $2(3-1{,}4x)-4(5-1{,}6x)+6(7-1{,}8x)+8=0$

192. $0{,}3(4-5x)-0{,}5(6-7x)+0{,}7(8-9x)=1{,}1-4x$

193. $1{,}7(2{,}7x-5)-3{,}7(4{,}7x-6)+5{,}7(6{,}7-7x)+1{,}81=x$

---

194. $(x-5):(3x-7)=5:7$ 195. $(5x-7):(19-3x)=4:5$

196. $(9-7x):20=(13-5x):11$

197. $(25x-17):(17x-25)=11:7$

198. $\frac{51}{5-x}-3=14$ 199. $\frac{87}{3x-1}+17=20$

200. $\frac{x-1}{x+1}=\frac{2}{3}$ 201. $\frac{5x-4}{4x-5}=\frac{4}{5}$

202. $\frac{9x-5}{9+5x}=23$ 203. $\frac{a-x}{x-b}=1$

204. $\frac{5}{x-3}=\frac{3}{5-x}$ 205. $\frac{7}{a-x}=\frac{8}{b-x}$

206. $\frac{a-x}{b}=\frac{x+b}{a}$ 207. $\frac{a}{a-x}=\frac{b}{b-x}$

208. $\frac{x+m}{x-m}=\frac{5}{4}$ 209. $\frac{a+x}{b+x}=\frac{a+1}{b+1}$

210. $\frac{a-bx}{ax-b}=\frac{3}{4}$ 211. $\frac{a-bx}{ax+b}=\frac{a}{b}$

Digitized by Google

212. $\frac{5x^2-19x-6}{7x^2-29x+6}=\frac{5}{7}$ 213. $\frac{21x^2-17x+37}{28x^2-27x+58}=\frac{3}{4}$

214. $\frac{ax^2-3x+5}{mx^2-5x+3}=\frac{a}{m}$ 215. $\frac{4x^2+ax-b}{6x^2+bx-a}=\frac{2}{3}$

---

216. $(3x+8)(x-2)=(x+4)(3x-7)$
217. $(27-x)(6x-5)=(2x+11)(5-3x)$
218. $(8-x)(x-3)=(6-x)(x-4)$
219. $(a-x)(x-b)=(ab-x)(x-1)$
220. $(3x+1)(2x+7):(5x-2)(3x+14)=2:5$
221. $(7x-5)(6x+7):(8x-9)(7x+12)=3:4$
222. $(2x-5)(3x-7)-(3x-5)(2x-7)+30=5x$
223. $(8x-3)(3x+1)-(5x-7)(5x-11)=9-x^2$
224. $(a+bx)(m+n)-(a-bx)(m-n)=2(an-bmx)$
225. $(a+x)(x+b)-(ax-1)(1-bx)=x(x+1)(ab+1)$
226. $(ab-x)(ax-b)-(a-bx)(x-ab)=(abx-x^2)(a-b)$
227. $a(x-m)+b(x-m)+c(x-m)=d(x-m)$
228. $a(x-5)+b(5-x)=c(x-5)+d(5-x)$
229. $(a+b)(x+c)-(a+b)m=ac+bc$
230. $(a+x)(c-d)+2dx-b(d-c)=2cx$
231. $(4x-11)^2+(3x+23)^2=(5x+10)^2$
232. $(12x-14)^2+(5x-11)^2=(13x-17)^2$
233. $(5x+3)^2+(8x+15)(3x-16)=(7x-8)^2$
234. $(4x+3)^2+(7x-3)^2=(8x-7)^2+(x+7)^2$
235. $(x-6)^2+(x-4)^2+(2x-9)^2=(x-6)(6x-7)$
236. $(2x+1)^2+(3x+1)^2+(8x-3)^2=(7x-2)(11x-1)$
236_1. $(8-3x)^2+(5-4x)^2-6=(9-5x)^2+20x-4$
236_2. $(12x-5)^2-(37x-18)^2+10=786-(35x-13)^2$

---

237. $\frac{1}{3}x+\frac{1}{4}x=14$ 238. $\frac{1}{4}x-\frac{1}{5}x=3$
239. $\frac{3}{4}x-\frac{5}{9}x=21$ 240. $\frac{4}{5}x+9=\frac{5}{4}x$
241. $3\frac{1}{3}x-2\frac{1}{2}x=4\frac{1}{6}$ 242. $2\frac{1}{5}x+11=5\frac{1}{2}x$
243. $7\frac{1}{6}x-12\frac{1}{3}=x$ 244. $7\frac{1}{8}x-6\frac{6}{7}x=30$
245. $29\frac{1}{4}x+14\frac{1}{3}=32\frac{5}{6}x$ 246. $18\frac{2}{3}x-49=5\frac{3}{5}x$

Digitized by Google

247. $\frac{x}{a} - \frac{x}{3a} = 2$

248. $\frac{5x}{7m} - \frac{3x}{5m} = 4$

249. $\frac{a}{x} + b = \frac{b}{x} + a$

250. $\frac{a}{x} + \frac{x-b}{x} - \frac{a-x}{x} = 1$

251. $3\left(\frac{x}{5} - 3\right) = 5\left(\frac{x}{3} - 5\right)$

252. $a\left(\frac{x}{2} - 5\right) - b\left(\frac{x}{5} - 2\right) = 0$

253. $7\left(\frac{x}{a} - 1\right) = x\left(1 - \frac{a}{x}\right)$

254. $a - \frac{x}{b} = \frac{x}{a} - b$

255. $\frac{x-a}{b} + \frac{x-b}{a} = 2$

256. $m\left(\frac{x}{a} - b\right) = n\left(\frac{x}{b} - a\right)$

257. $\frac{1}{2}x + \frac{2}{3}x - \frac{3}{4}x + \frac{4}{5}x - \frac{5}{6}x + 2 = \frac{5}{12}x$

258. $\frac{1}{2}x - 19 + \frac{3}{4}x + 18\frac{5}{6} = 27\frac{2}{3}x - 3\frac{7}{12} - 26\frac{1}{6}x - \frac{10}{3}$

259. $15\frac{7}{8} - \frac{7}{8}x + 15\frac{1}{2}x - \frac{11}{12}x + 18\frac{5}{6} - 13\frac{5}{8}x = 22\frac{1}{8}$

260. $3\frac{1}{2} - 3\frac{1}{2}x - 7\frac{3}{4} + 7\frac{3}{4}x + 4\frac{1}{5} - 4\frac{1}{5}x - 5\frac{1}{8} + 5\frac{1}{8}x = 0$

261. $33\frac{3}{4}x - 25\frac{4}{5} + 43\frac{2}{3} = 71\frac{1}{5} - 12\frac{1}{3}x - 28\frac{1}{4} + 21x$

262. $8\frac{5}{6}x - 9\frac{3}{4} + 2\frac{7}{9} - 3\frac{5}{9}x + 17\frac{11}{12} - 7\frac{1}{2}x = 14\frac{1}{2} - 2\frac{2}{3}x$

263. $\frac{9}{x} - 7\frac{1}{2} = \frac{7}{x} - \frac{2x-1}{3} + \frac{4x+1}{6}$

263_1. $\frac{5x-3}{2x} - 1\frac{1}{3} - \frac{1}{x} = 3\frac{1}{4} - \frac{2x+1}{3x} - 2\frac{1}{2}$

263_2. $\frac{5}{4x} - 2\frac{2}{5} - \frac{7x+1}{5x} = \frac{10-7x}{4x} - 1\frac{1}{5} - \frac{4}{x}$

263_3. $\frac{3x+2}{5x} - 2\frac{1}{4} - \frac{8}{3x} = 1\frac{4}{5} - \frac{x+3}{2x} - 3\frac{1}{3}$

264. $\frac{7}{2x} - \frac{8}{3x} + \frac{9}{4x} - \frac{1}{3} = \frac{31-7x}{6x}$

265. $\frac{2}{3x} - \frac{4}{5x} + \frac{6}{7x} - \frac{8}{9x} + \frac{1}{3} = \frac{7x-3}{18x}$

266. $3x - 4\,(7 - \frac{3}{4}x) + 5\,(3\frac{1}{2} - 4x) - 7\,(2\frac{1}{2}x - 5) = 2$

267. $5(3\frac{1}{2} - x) - 6\,(\frac{2}{3}x - \frac{3}{2}) + 7\,(\frac{3}{2}x - \frac{10}{3}) = \frac{8}{3}\,(x - 1)$

268. $\frac{2}{3}(3\frac{1}{2}x - 5) - \frac{5}{2}\,(3\frac{1}{4}x + 8) + 2\frac{3}{4}\,(8 + 5\frac{1}{2}x) = 7x + 8$

269. $\frac{3}{4}(5\frac{1}{3}x - 7) - 2\frac{1}{3}\,(\frac{5}{7}x - 8) + 1\frac{1}{2}\,(1\frac{1}{3} - 5x) = \frac{x-4}{12}$

270. $\frac{5}{6}(2{,}4 - 7{,}2x) - 0{,}7\,(3\frac{3}{4} - 43x) = 5{,}4$

271. $50{,}5 - 7\frac{1}{2}\,(9{,}56x - 74{,}8) + 1{,}12\,(3\frac{3}{4}x - 3\frac{4}{7}) = 0$

272. $56{,}281 - \frac{3}{4}\,(7{,}3x - 5\frac{1}{3}) + 0{,}456\,(4\frac{2}{3}x - 7\frac{5}{12}) = 0$

273. $\frac{3x-8}{5} - \frac{x-1}{4} + \frac{7-x}{3} = \frac{8-2x}{6} - \frac{8-5x}{10}$

274. $\frac{2x-7}{4} - \frac{3x-5}{8} - \frac{8-7x}{5} + \frac{1-9x}{10} + 6 = x$

Digitized by Google

275. $\frac{3-5x}{3} - \frac{3x-7}{5} + \frac{1-5x}{4} + 7\frac{1}{2} = \frac{9-11x}{10} - \frac{x-33}{15}$

276. $1\frac{1}{2} - \frac{9x-5}{4} - \frac{3x+7}{5} + \frac{5-x}{3} - \frac{1}{20} = \frac{11-7x}{2}$

277. $\frac{5x-2a-7}{5} - \frac{7x-2a-5}{4} = \frac{1}{5}\left(\frac{1}{2}a - 3\frac{6}{7}x\right)$

278. $\frac{2x-7a+5b}{4} - \frac{7x-3a+4b}{5} + \frac{3x+3(a-b)}{3} = \frac{1}{4}(a-b)$

279. $\frac{3x-1}{0{,}5} - \frac{7x+1}{1{,}2} + \frac{2x-1}{11} = 3$

280. $\frac{7x+12}{2{,}9} - \frac{6x+1}{2{,}3} + 19 = x$

281. $\frac{4x-0{,}7}{0{,}5} - \frac{7x+0{,}9}{3} + 5 = \frac{9x+0{,}8}{0{,}7}$

282. $\frac{7x-4{,}1}{3} - \frac{5x-3{,}1}{7} = \frac{9x-9{,}5}{4}$

283. $\frac{3(5x-3{,}5)}{5} + \frac{5(7x-5{,}9)}{4} - \frac{7(9x-9{,}3)}{6} = \frac{2(3x+3{,}9)}{5}$

284. $\frac{3x-4{,}7}{4} - \frac{3(4x-2{,}7)}{5} + \frac{5(5x-5{,}7)}{6} = \frac{4(x+1{,}7)}{5}$

285. $\frac{5x+3}{2} - \frac{7x-5}{3} + \frac{5-x}{6} = \frac{13x+15}{3x+5}$

286. $\frac{x+4}{3} + \frac{3x-7}{4} - \frac{x-5}{12} - \frac{x-7}{x+7} = x$

287. $\frac{5x-7}{5} - \frac{3x-5}{4} = \frac{11x^2-5}{6(2x+1)} - \frac{2x-1}{3}$

288. $\frac{3x-23}{17-2x} = \frac{49-6x}{4x-31}$

289. $\frac{5x-7}{49-3x} = \frac{59-10x}{6x-83}$

290. $\frac{a+bx}{a-b} = \frac{c+dx}{c-d}$

291. $\frac{a+x}{m+a} = \frac{a-x}{m-a}$

292. $\frac{a-2x}{6x-b} = \frac{a-x}{3x-b}$

293. $\frac{x+a}{x-b} = \frac{x-a}{x+b}$

294. $\frac{5x-1}{5x+1} = \frac{2a+3b}{3a+2b}$

295. $\frac{x-a}{x-2} = \frac{x+b}{x-3}$

296. $\frac{2x-3}{2x+3} = \frac{5b-a}{5a-b}$

297. $\frac{7x-5}{5x-7} = \frac{a-11b}{11a-b}$

298. $\frac{\frac{x}{2}-\frac{1}{3}}{\frac{x}{3}-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{3x}{4}-\frac{1}{6}}{\frac{x}{2}-\frac{2}{3}}$

299. $\frac{\frac{5}{7}-\frac{1}{x}}{1-\frac{5}{7x}} = \frac{\frac{5}{3}-\frac{3}{x}}{\frac{7}{3}-\frac{3}{x}}$

300. $\frac{\frac{5}{3}-\frac{3x}{2}}{\frac{7}{8}-\frac{2x}{3}} = \frac{3x-\frac{7}{3}}{\frac{4x}{3}-\frac{1}{2}}$

301. $\frac{\frac{x}{5}+\frac{1}{3}}{\frac{x}{5}-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{x}{3}+\frac{1}{15}}{\frac{x}{3}-\frac{4}{5}}$

Digitized by Google

302. $\frac{7x^6-5x^5}{4}-27x^5=\frac{10x^7-13x^6}{3x}-5x^6$

303. $\frac{3x^{10}-2x^7}{6x}+\frac{7x^8-3x^7}{3x+1}=\frac{1}{2}x^9+\frac{6x^{10}-x^9}{3x^8}$

304. $\frac{5x^4-7x^3}{3x-5}+4x^3-\frac{8x^3-34x^2}{3}=\frac{9x^5-8x^4}{3x^2-5x}$

305. $\frac{7x^n-3x^{n-1}}{5}-2x^{n-1}=x^n-\frac{3x^{n+1}-5x^n}{7x}$

306. $ax\left(x^{n-1}-\frac{x^n}{b}\right)=bx^{n-1}\left(x-\frac{x^2}{a}\right)$

307. $\frac{3}{x-1}-\frac{5}{3(x-1)}-\frac{7}{5(x-1)}+\frac{1}{3}=\frac{x-2}{5(x-1)}$

308. $\frac{5x}{2x-2}-\frac{2x+3}{3x-3}+\frac{3x+2}{4x-4}-\frac{4x+1}{5x-5}=2$

309. $\frac{5x-1}{2x-1}-\frac{5x+2}{4x-2}-\frac{4x+1}{6x-3}+\frac{7x-2}{8x-4}=1$

310. $\frac{7x-1}{x-2}-\frac{5x-3}{3x-6}+\frac{8x-5}{5x-10}=\frac{9x-7}{7x-14}$

311. $\frac{5x}{3x-2}-\frac{7x+2}{9x-6}=1$

312. $\frac{3x-1}{2x-3}-\frac{x+9}{4x-6}=1$

313. $\frac{7x-5}{3x-7}-\frac{6-5x}{7-3x}=1$

314. $\frac{5x+3}{7x-9}-\frac{4x+9}{9-7x}=2$

315. $\frac{2x-7}{x-2}+\frac{3x-7}{x-3}=5$

316. $\frac{3x-5}{x-1}-\frac{2x-5}{x-2}=1$

317. $\frac{9x-7}{3x-2}-\frac{4x-5}{2x-3}=1$

318. $\frac{3(x-2)}{3x-5}+\frac{10x+1}{5x-3}=3$

319. $\frac{9}{3x-2}-\frac{2}{2x-3}=\frac{2}{x}$

320. $\frac{891}{9x-7}-\frac{245}{7x-9}=\frac{64}{x}$

321. $\frac{x+1}{x-7}-\frac{2(x+6)}{3(x-6)}=\frac{x-1}{3x-21}$

322. $\frac{x+3}{x+1}-\frac{2x+5}{x+2}=\frac{x-5}{3x+3}-\frac{4x-3}{3x+6}$

323. $\frac{2x-9}{2x-5}-\frac{3x+9}{3x+7}+\frac{13x+69}{6x^2-x-35}=0$

324. $\frac{3x-53}{x-15}+\frac{4(x-15)}{x-17}=7+\frac{2}{x-17}$

325. $\frac{8x-50}{x-7}+\frac{5(x-7)}{x-4}=13-\frac{6}{x-4}$

326. $\frac{3x-11}{x-5}+\frac{2x-9}{x-3}-\frac{3x-19}{x^2-8x+15}=5$

327. $\frac{7(x-2)}{x-9}-\frac{6(x+4)}{x-7}-\frac{6x-48}{x^2-16x+63}=1$

328. $\frac{7x+2}{3x+1}+\frac{8x+1}{3x+2}+\frac{10x+17}{9x^2+9x+2}=5$

Digitized by Google

329. $\frac{3x-5}{x+2}+\frac{7x-10}{x+1}+\frac{x+99}{x^2+3x+2}=10$

330. $\frac{3x-5}{3(x-1)}-\frac{2x-7}{2(x+1)}=\frac{19x-3}{6(x^2-1)}$

331. $\frac{5(2x^2-1)}{2x+3}-\frac{7x+2}{2x-3}=5x-11$

332. $\frac{5(2x^2+3)}{2x-1}-\frac{7x-12}{2x-7}=5x-1$

333. $\frac{2}{x-1}+\frac{3}{x-2}=\frac{20}{4x-7}$

334. $\frac{9}{x-5}-\frac{5}{x-9}+\frac{28}{45-7x}=0$

335. $\frac{13}{x-8}-\frac{15}{3x-26}=\frac{8}{x-13}$

336. $\frac{2}{2x-5}-\frac{9}{3x-5}+\frac{4}{2x-15}=0$

337. $\frac{x+7}{x+1}+\frac{x+9}{x+2}=\frac{4(x+8)}{2x+3}$

338. $\frac{x-5}{x-8}+\frac{x-1}{x-7}=\frac{4(x-3)}{2x-15}$

339. $\frac{1}{x-8}-\frac{1}{x-7}+\frac{1}{x-4}=\frac{1}{x-5}$

339_1. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{1}{x-5}-\frac{1}{x-3}$

339_2. $\frac{1}{x+4}+\frac{1}{8-x}=\frac{1}{7-x}+\frac{1}{5+x}$

339_3. $\frac{1}{x+3}+\frac{1}{x-7}=\frac{1}{x+7}+\frac{1}{x-11}$

340. $\frac{7}{x-9}+\frac{2}{x-4}=\frac{7}{x-7}+\frac{2}{x-11}$

340_1. $\frac{3}{x+3}-\frac{3}{x+8}=\frac{5}{x-8}-\frac{5}{x-5}$

340_2. $\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x+3}=\frac{2}{x-3}+\frac{2}{2-x}$

341. $\frac{4}{x-5}+\frac{1}{x-3}-\frac{1}{x-7}=\frac{4}{x-4}$

342. $\frac{1}{x-13}-\frac{2}{x-15}+\frac{2}{x-18}=\frac{1}{x-19}$

343. $\frac{6}{x-5}-\frac{9}{x-3}=\frac{1}{x-7}-\frac{4}{x-1}$

344. $\frac{9}{x-4}-\frac{10}{x-5}+\frac{6}{x-9}=\frac{5}{x-8}$

345. $\frac{4}{x-2}-\frac{9}{x-3}+\frac{6}{x-4}-\frac{1}{x-5}=0$

Digitized by Google

346. $\frac{1}{x-5} - \frac{6}{x-6} + \frac{9}{x-7} - \frac{4}{x-8} = 0$

347. $\frac{x+5}{x-7} - \frac{x+3}{x-8} + \frac{x+1}{x-9} = \frac{x+2}{x-7} - \frac{x-1}{x-8} + \frac{x}{x-9}$

348. $\frac{x+8}{x-5} - \frac{x+6}{x-6} + \frac{x+4}{x-7} = \frac{x+5}{x-5} - \frac{x+2}{x-6} + \frac{x+3}{x-7}$

349. $\frac{x+2}{x+1} - \frac{x+4}{x-2} + \frac{x+6}{x-7} - \frac{x+8}{x-8} = \frac{x-3}{x+1} - \frac{x-5}{x-2} + \frac{x-3}{x-7} - \frac{x+3}{x-8}$

350. $\frac{x+1}{x-1} - \frac{x+3}{x-3} + \frac{x+5}{x-5} - \frac{x+7}{x-6} = 1 - \frac{x-2}{x-3} + \frac{x}{x-5} - \frac{x+5}{x-6}$

---

351. $4\,[4\,(4\,(4x-3)-3)-3]-3=1$

352. $13\,[10\,(7\,(4x-3)-6)-9]-12=1$

353. $\frac{1}{3}\,[\frac{1}{3}\,(\frac{1}{3}\,(\frac{1}{3}x-2)-2)-2]-2=0$

354. $\frac{1}{2}\,[\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}\,(\frac{1}{2}x-3)-3)-3]-3=0$

355. $\frac{1}{3}\,[\frac{1}{3}\,(\frac{1}{3}\,(\frac{1}{3}x-\frac{1}{3})-\frac{1}{3})-\frac{1}{3}]-\frac{1}{3}=0$

356. $19{,}9 - 199\,(0{,}199x - 1{,}99) = 1{,}99x - 0{,}199(19{,}9 - 1{,}99x)$

357. $5{,}89x - 58{,}9\,(0{,}589x - 58{,}9) + 0{,}589(589 - 5{,}89x) = 589$

---

358. $(a+b-x)(m-n)+(n-p)x=(a+b)(n-p+q)-qx$

359. $(ax-b)(cx-b)=(ax-d)(cx-d)$

360. $\frac{a-5b}{5x} - \frac{c-2b}{2x} = \frac{2}{c} - \frac{5}{a}$

361. $\left(\frac{m}{a}+\frac{n}{b}\right)x-(an+bm)=x-ab$

362. $\frac{2x-a}{b}+\frac{b-2x}{a}=\frac{a^2-b^2}{ab}$

363. $\frac{x-a^2}{b}+\frac{x-b^2}{a}=a+b$

364. $\frac{ax}{bc}+\frac{bx}{ac}+\frac{cx}{ab}=1$

365. $\frac{x}{a}+\frac{a-x}{b}-\frac{c}{d}\left(1-\frac{x}{a}\right)=1$

366. $\frac{x}{a}+\frac{a}{b}(a-x)-\frac{b}{a}(x-a)=1$

367. $(a+b)\left(\frac{x}{m}-n\right)=(a-b)\left(\frac{x}{n}-m\right)$

368. $\frac{m-x}{a}+\frac{x-m}{b}=\frac{m-x}{c}-\frac{x-m}{d}$

Digitized by Google

369. $m\left(1-\frac{x}{a}\right)-\frac{x-a}{b}=n\left(\frac{x}{a}-1\right)-\frac{x-a}{c}$

370. $\frac{7a-bx}{2a}-\frac{5b-cx}{3b}-\frac{11c-ax}{6c}=0$

371. $\frac{2a-x}{a}+\frac{3b-x}{b}+\frac{4c-x}{c}=\frac{9d-x}{d}$

372. $\frac{ax}{b(a-x)}-\frac{bx}{a(a-x)}-\frac{b}{a}=1$

373. $\frac{a(x-a)}{b}+b=\frac{b(x+b)}{a}-a$

374. $\frac{m(x-a)}{b}+\frac{n(x-b)}{a}=m+n$

375. $\frac{ax}{a+b}+\frac{bx}{a-b}=a^2+b^2$

376. $\frac{x-a^2}{b}-\frac{x-b^2}{a+b}+\frac{x-3ab}{a-b}=a$

377. $\frac{x+b^2}{a+b}+\frac{x-a^2}{a-b}+\frac{x-ab}{a+b}=2a$

378. $\frac{a}{b}=\frac{x-b^2}{x-a^2}$

379. $\frac{x+ab}{x-ab}=\frac{a^2+ab+b^2}{a^2-ab+b^2}$

380. $\frac{a+x}{a+b}+\frac{a-x}{a-b}=2$

381. $\frac{x+m}{a+m}+\frac{x-m}{a-m}=2$

382. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{m+a}{m-a}=2$

383. $\frac{x+a}{x-a}+\frac{x+b}{x-b}=2$

384. $\frac{x+a}{x-b}+\frac{x+b}{x-a}=2$

385. $\frac{a-2x}{b-x}+\frac{b-x}{a-2x}=\frac{5}{2}$

386. $\frac{a+bx}{a-bx}=\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^3$

387. $\frac{a(x+1)-b(x-1)}{b(x+1)-a(x-1)}=\frac{a^3}{b^3}$

388. $\frac{2(x+a}{x-a}-\frac{m+a}{m-a}=\frac{m-a}{m+a}$

389. $\frac{a^3-b^3}{a^3+b^3}=\frac{a(x-b^2)+b(a^2-x)}{a(x-b^2)-b(a^2-x)}$

390. $\frac{3a-5b}{15ab}+\frac{a+7x}{12ax}+\frac{5b+4x}{20bx}+\frac{3}{4a}+\frac{3}{5b}-\frac{4}{3x}=0$

391. $\frac{6a+x}{6bx}-\frac{5a-4b}{4ax}-\frac{3b-5x}{5ab}+\frac{3}{5a}-\frac{1}{6b}+\frac{5}{4x}=\frac{x+1}{ab}$

392. $\frac{5a-2x}{10ax}-\frac{3b-4x}{12bx}+\frac{4a^2-5b}{20a^2b}-\frac{a^2-x}{4a^2x}-\frac{a-b}{5ab}+\frac{2}{3b}=\frac{1}{x}$

393. $\frac{x-a}{2bc}+\frac{x-b}{2ac}+\frac{x-c}{2ab}=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$

394. $\frac{ax+bc}{2cx(c-x)}+\frac{ax-bc}{2cx(c+x)}=\frac{(a-b)x}{c^2-x^2}$

395. $\frac{ax+b}{mx-m}-\frac{ax-b}{nx-n}=\frac{a}{m}-\frac{b}{n}$

396. $\frac{a}{a-x}+\frac{b}{b-x}=\frac{a+b}{a+b-x}$

Digitized by Google

397. $\frac{a+b}{x-a-b}+\frac{a-b}{x-a+b}+\frac{2a}{2a-x}=0$

398. $\frac{a-b}{x-1}+\frac{b-c}{x-2}+\frac{c-a}{c-3}=0$

399. $\frac{a+b-x}{c}+\frac{a-x}{b}+\frac{b-x}{a}+\frac{2x}{a+b}=0$

400. $\frac{a+b-x}{c}+\frac{a+c-x}{b}+\frac{b+c-x}{a}+\frac{4x}{a+b+c}=1$

401. $\frac{x-ab}{a+b}+\frac{x-ac}{a+c}+\frac{x-b}{b+c}=a+b+c$

402. $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{a+c}+\frac{x-c}{a+b}=\frac{3x}{a+b+c}$

403. $\frac{x-a}{b+c}+\frac{x-b}{a+c}+\frac{x-c}{a+b}-2=\frac{x}{a+b+c}$

404. $\frac{x-2a}{b+c-a}+\frac{x-2b}{a+c-b}+\frac{x-2c}{a+b-c}-\frac{2x}{a+b+c}=1$

---

405. $\sqrt{x}=a$ $\sqrt[3]{x}=a$

406. $\sqrt{x}=5$ $\sqrt[3]{x}=7$

407. $\sqrt[4]{x}=3$ $\sqrt[5]{x}=2$

408. $\sqrt[6]{x}=10$ $\sqrt[3]{x}=1$

409. $\sqrt{x+4}=3$, $\sqrt{5-x}=2$

410. $\sqrt[3]{x+5}=2$, $\sqrt[4]{x+79}=3$

411. $\sqrt{x-a}=b$, $\sqrt[3]{a-x}=b$

412. $\sqrt[4]{a^4+x}=a$, $\sqrt{a^b-x}=b$

413. $2\sqrt{x}=3$ $\frac{1}{2}\sqrt{x}=5$

414. $\frac{3}{4}\sqrt{x}=4\frac{1}{2}$ $1\frac{1}{4}\sqrt{x}=7\frac{1}{2}$

415. $\sqrt{3x}=6$ $\sqrt{5x}=10$

416. $\frac{3}{4}\sqrt{2x}=1\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{8}\sqrt{7x}=43\frac{3}{4}$

417. $\sqrt{2x-3}=7$

418. $\sqrt{17-2x}=3$

419. $2\sqrt{3x-2}=8$

420. $7\sqrt{8x+9}=91$

421. $\frac{1}{3}\sqrt{x+17}=3$

422. $\frac{2}{3}\sqrt{99-x}=6$

423. $2\frac{1}{2}\sqrt{93+x}=25$

424. $3\frac{1}{4}\sqrt{78-7x}=19\frac{1}{2}$

425. $\sqrt{3x}=\sqrt{2x}$

426. $2\sqrt{5x}=3\sqrt{7x}$

427. $2\sqrt{x-7}=3\sqrt{x-17}$

427_1. $3\sqrt{x+3}=2\sqrt{x+8}$

428. $7\sqrt{x-3}=5\sqrt{2x-7}$

428_1. $4\sqrt{x+7}=3\sqrt{x+14}$

429. $9\sqrt{x-7}=4\sqrt{5x-31}$

429_1. $2\sqrt{x+4}=3\sqrt{x-1}$

430. $9\sqrt{x-21}=7\sqrt{x+11}$

430_1. $4\sqrt{x+3}=3\sqrt{x+10}$

431. $a\sqrt{x-1}=b\sqrt{1-x}$

432. $5\sqrt{x-a}=8\sqrt{a-x}$

433. $3+\sqrt{x}=5$

434. $\sqrt{x}-4=3$

435. $7-\sqrt{x}=4$

436. $7-3\sqrt{x}=1$

Digitized by Google

437. $5\sqrt{x} - 8 = 7$

438. $19 - 2\sqrt{x} = 7$

439. $8 + 3\sqrt{x - 7} = 23$

440. $7 + 5\sqrt{x - 3} = 17$

441. $13 - \sqrt{3x - 5} = 8$

442. $7 + \sqrt{19 + 3x} = 17$

443. $17 - 2\sqrt{7x + 1} = 1$

444. $29 - 3\sqrt{13 - 2x} = 20$

445. $x + \sqrt{x^2 - a^2} = a$

446. $x + \sqrt{x^2 + a^2} = a$

447. $43\sqrt{x-8} - 53\sqrt{8-x} = 0$

448. $17\sqrt[3]{x - 7} = 71\sqrt[3]{7 - x}$

449. $\sqrt{\frac{a+x}{b+x}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

450. $\sqrt{\frac{a-x}{b-x}} = \sqrt{\frac{b}{a}}$

451. $a\sqrt{\frac{x}{a} - b} = b\sqrt{a - \frac{x}{b}}$

452. $b\sqrt[3]{\frac{x}{a} - b} = a\sqrt[3]{a - \frac{x}{b}}$

453. $a\sqrt[3]{x - b} = b\sqrt[3]{a - x}$

454. $a\sqrt[4]{x - b^2} = b\sqrt[4]{x - a^2}$

455. $a\sqrt{b(ax-1)} = b\sqrt{a(1-bx)}$

456. $a\sqrt[3]{b(ax-1)} = b\sqrt[3]{a(1-bx)}$

457. $7\sqrt{3x - 2} - 5\sqrt{3x - 2} = 2$

458. $9\sqrt{5x + 1} = 20 + 4\sqrt{5x + 1}$

458_1. $7\sqrt{4x + 5} - 20 = 3\sqrt{4x + 5}$

459. $\frac{3}{2}\sqrt{x} - \frac{2}{3}\sqrt{x} + 7 = 2\sqrt{x}$

460. $\frac{5}{3}\sqrt{15x} - \frac{3}{5}\sqrt{15x} - 11 = \frac{1}{3}\sqrt{15x}$

461. $4\frac{5}{6}\sqrt{5x + 4} - 2\frac{1}{3}\sqrt{5x + 4} = 20$

462. $\frac{17}{10}\sqrt{19 + 5x} - \frac{23}{15}\sqrt{19 + 5x} = 2$

463. $5\frac{1}{2}\sqrt{7x - 13} - 3\frac{1}{3}\sqrt{7x - 13} - 1\frac{1}{6}\sqrt{7x - 13} = 6$

464. $3\sqrt{2x} - 5\sqrt{8x} + 7\sqrt{18x} = 9\sqrt{20x}$

465. $2\sqrt{x - 7} + 3\sqrt{x + 1} = 11\sqrt{x - 7}$

466. $7\sqrt{3x - 5} + 2\sqrt{5x - 1} = 13\sqrt{3x - 5}$

466_1. $7\sqrt{3x + 4} - 2\sqrt{14x + 4} = 3\sqrt{3x + 4}$

467. $a\sqrt{x - 5} - b\sqrt{5 - x} = c\sqrt{x - 5} - d\sqrt{5 - x}$

468. $3\sqrt{a - x} + 4\sqrt{x - b} = 4\sqrt{a - x} + 3\sqrt{x - b}$

469. $\frac{1 + \sqrt{x}}{1 - \sqrt{x}} = 3$

470. $\frac{\sqrt{x} + 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{a}{b}$

471. $\frac{9}{7 + 2\sqrt{x}} = \frac{8}{13 - 5\sqrt{x}}$

472. $\frac{23}{7\sqrt{x} + 2} = \frac{31}{9\sqrt{x} + 4}$

473. $\frac{17 - 3\sqrt{x}}{11} = \frac{23 - 4\sqrt{x}}{15}$

474. $\frac{29 - 5\sqrt{x}}{9} = \frac{39 - 5\sqrt{x}}{19}$

Digitized by Google

475. $\frac{3\sqrt{x}+1}{7\sqrt{x}-5}=\frac{8}{15}$ 476. $\frac{5\sqrt{x}+12}{7\sqrt{x}+15}=\frac{4}{5}$

477. $\frac{5\sqrt{x}+13}{7\sqrt{x}+5}=\frac{3}{2}$ 478. $\frac{3\sqrt{x}-2\sqrt{3}}{5\sqrt{x}-3\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{2}{3}}$

479. $\frac{7\sqrt{x}-\sqrt{15}}{5\sqrt{x}-\sqrt{21}}=\sqrt{\frac{5}{7}}$ 480. $5\frac{1}{3}+\sqrt{\frac{9x-4}{4x-9}}=6$

481. $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{9x-7}{13-x}}=3\sqrt{\frac{4-x}{4x+6}}$ 482. $\frac{a}{b}\sqrt{\frac{c^2-x}{d^2-x}}=\frac{c}{d}\sqrt{\frac{a^2-x}{b^2-x}}$

483. $(7\sqrt{3x}-3\sqrt{7})(7\sqrt{3x}+3\sqrt{7})$
$=10(2\sqrt{5x}+3\sqrt{6})(2\sqrt{5x}-3\sqrt{6})$

484. $(3\sqrt{5x}+2\sqrt{3})(2\sqrt{3}-3\sqrt{5x})$
$=(7\sqrt{x}+2\sqrt{13})(2\sqrt{13}-7\sqrt{x})$

485. $(\sqrt{ax}+\sqrt{b})(\sqrt{ax}-\sqrt{b})=(a+1)(a-1)b$

486. $(7-\sqrt{x})(8-\sqrt{x})=x+11$

487. $(3\sqrt{x}-5)(5\sqrt{x}-3)=5(3x-31)$

488. $(19-8\sqrt{x})(25-9\sqrt{x})=3(31-12\sqrt{x})(5-2\sqrt{x})$

489. $(7+6\sqrt{x})(48-13\sqrt{x})=3(81-26\sqrt{x})(22+\sqrt{x})$

490. $(3\sqrt{x}-1)^2+(4\sqrt{x}-7)^2=(5\sqrt{x}-6)^2$

491. $(5\sqrt{x}-2)^2+(12\sqrt{x}-9)^2=(13\sqrt{x}-9)^2$

492. $\frac{3\sqrt{x}-5}{2}-\frac{2\sqrt{x}-7}{3}=\sqrt{x}-1$

493. $\frac{7\sqrt{x}-13}{3}-\frac{3\sqrt{x}-8}{4}+\frac{4\sqrt{x}-11}{5}=3\sqrt{x}-7$

494. $a(\sqrt{x}-a)-b(\sqrt{x}-b)+(a+b)=\sqrt{x}$

495. $\frac{13}{\sqrt{x}}-7\frac{1}{2}=\frac{8}{\sqrt{x}}-6\frac{2}{3}$

496. $3\sqrt{5}-5\sqrt{3x}=3\sqrt{5x}-5\sqrt{3}$

497. $\sqrt{3x}-3\sqrt{2}=\sqrt{2x}-2\sqrt{3}$

498. $5\sqrt{2x}-7\sqrt{x}+2\sqrt{2}=3$

499. $3(\sqrt{5x}-\sqrt{10})=5(\sqrt{3x}-\sqrt{6})$

500. $\sqrt{6x}-3\sqrt{2}=\sqrt{6}-\sqrt{2x}$

501. $\sqrt{ax}-a\sqrt{b}=\sqrt{bx}-b\sqrt{a}$

502. $\sqrt{7x+5}=\frac{9x-7}{\sqrt{7x+5}}$ 503. $\sqrt{8x-12}=\frac{3x+8}{\sqrt{2x-3}}$

Digitized by Google

504. $\sqrt{x+7} = \frac{3(x+2)}{\sqrt{9x-2}}$ 505. $\sqrt{4x-3} = \frac{2(3x-1)}{\sqrt{9x+1}}$

506. $\frac{3(x-1)}{\sqrt{40-32x}} + \frac{x}{\sqrt{2{,}5-2x}} = \sqrt{10-8x}$

507. $\frac{7x-3}{\sqrt{48x-40}} + \frac{3x+2}{\sqrt{3x-2{,}5}} = \sqrt{12x-10}$

508. $3\sqrt{2x-1} - \sqrt{8x+17} = \frac{2(x-3)}{\sqrt{2x-1}}$

509. $5\sqrt{2x+3} - \sqrt{18x-5} = \frac{4(x+3)}{\sqrt{2x+3}}$

510. $\sqrt{a-x} - \sqrt{b-x} = \frac{a-b}{\sqrt{b-x}}$

511. $3\sqrt{a-x} - \sqrt{b-x} = \frac{2(a-x)}{\sqrt{b-x}}$

512. $\frac{7+\sqrt{a-x}}{7-\sqrt{a-x}} = \frac{m+\sqrt{a-x}}{m-\sqrt{a-x}}$

513. $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = 5$ 514. $\frac{\sqrt{1+x}+\sqrt{1-x}}{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}} = \frac{3}{2}$

515. $\frac{\sqrt{a-x}+\sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{x-b}} = 1$ 516. $\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{b+x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{b+x}} = 3$

517. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{a+x}}{\sqrt{b}+\sqrt{b+x}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$ 518. $\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{b}+\sqrt{a-x}} = \sqrt{\frac{a}{b}}$

519. $\sqrt{x-3} = 3 - \sqrt{x}$ 520. $\sqrt{x+7} = 7 - \sqrt{x}$

521. $\sqrt{4x-3} = 2\sqrt{x} - 1$ 522. $\sqrt{x+a} = a - \sqrt{x}$

523. $\sqrt{x+6} - \sqrt{x-1} = 1$ 524. $\sqrt{x-1} + \sqrt{x+8} = 9$

525. $\sqrt{9x-17} - 3\sqrt{x-4} = 1$

526. $\sqrt{4x+5} + 2\sqrt{x-3} = 17$

527. $2\sqrt{9x+4} - 3\sqrt{4x-11} = 5$

528. $\sqrt{a^2x+b^2} = a\sqrt{x} + b$

529. $a\sqrt{x} = b + \sqrt{a^2x-2ab+b^2}$

530. $\sqrt{a^2-x} + \sqrt{b^2-x} = a + b$

531. $\sqrt{a^2x+b^2} + \sqrt{a^2+b^2x} = a + b$

532. $\sqrt{a-x} - \sqrt{b-x} = \sqrt{a-b}$

533. $\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x} = \sqrt{a+b}$

Digitized by Google

534. $\frac{\sqrt{a^2+x}+\sqrt{b^2-x}}{\sqrt{a^2+x}-\sqrt{b^2-x}}=\frac{a+b}{a-b}$

535. $\frac{(a-x)\sqrt{b-x}-(b-x)\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}}=x$

536. $\sqrt{9x-14}=5\sqrt{x-3}-\sqrt{4x-19}$

537. $2\sqrt{4x-15}+\sqrt{25x+39}=9\sqrt{x-1}$

538. $2\sqrt{x+17}+\sqrt{x-4}=3\sqrt{x+8}$

539. $3\sqrt{x-65}+4\sqrt{x+68}=7\sqrt{x-1}$

540. $\sqrt{a^2x+b^2}+\sqrt{b^2x+a^2}=(a+b)\sqrt{x+1}$

541. $a\sqrt{x+4ab}+b\sqrt{x-4ab}=(a+b)\sqrt{x}$

542. $x-\sqrt{(x-1)(x-2)}-\sqrt{x^2-36}=2$

543. $x-\sqrt{x^2-1\frac{3}{4}}+\sqrt{x^2-4}=\frac{1}{2}$

544. $\sqrt{x^2+x-20}-\sqrt{x^2+5x-176}=2$

545. $\sqrt{x^2+6x-91}-\sqrt{x^2-12x-28}=9$

546. $\sqrt{x+1}+\sqrt{x-6}=\sqrt{x+10}+\sqrt{x-11}$

547. $\sqrt{x+9}+\sqrt{x-12}-\sqrt{x-7}=\sqrt{x}$

548. $\sqrt{x+4}-\sqrt{x-8}+\sqrt{x-3}-\sqrt{x+13}=0$

549. $\sqrt{x+12}-\sqrt{x-12}+\sqrt{x-1}=\sqrt{x+27}$

550. $\sqrt{9x-8}+5\sqrt{2x+5}-2\sqrt{9x-8}=25$

551. $\sqrt{2x-1-\sqrt{5x+1}}+\frac{1}{4}\sqrt{5x+1}=2$

552. $\sqrt{x-1+\sqrt{3x-2}}+\sqrt{x-1-\sqrt{3x-2}}=4$

553. $\sqrt{2x-1+2\sqrt{7x-5}}+\sqrt{2x-1-2\sqrt{7x-5}}=10$

554. $\sqrt{2x+3+5\sqrt{3x-23}}+\sqrt{2x+3-5\sqrt{3x-23}}=10$

---

555. $a^{2x-5}=a^{7}$*)

556. $b^{3x-8}=b^{4-x}$

557. $a^{6}\cdot a^{3x-1}=a^{2x+7}$

558. $c^{x}\cdot c^{2x-8}=c^{5}\cdot c^{4-x}$

559. $\sqrt{a^{11-x}}=a^{8-x}$

560. $\sqrt[3]{a^{x+2}}=\sqrt{a^{x-3}}$

561. $2^x=64,\ 3^x=81$

562. $4^x=8,\ 8^x=32$

563. $(\frac{2}{3})^x=(1\frac{1}{2})^5$

564. $(1\frac{1}{3})^7=(0{,}75)^{x-3}$

---

*) Nr. 555.—568. sind ohne Logarithmentafeln zu lösen.

Digitized by Google

565. $2^{x-1} = (0{,}5)^{2x-5}$
566. $4^{3x-1} = (0{,}5)^{x-5}$
567. $a^{n+x} = bc^{n-x}$
568. $a^x \cdot b^{x-1} = c^x \cdot d^{x+1}$
569. $10^x = 5$, $5^x = 10$
570. $100^x = 8$, $8^x = 100$
571. $5^x = 9{,}51827$
572. $7^x = 8{,}5037$
573. $13^x = 7{,}783138$
574. $2{,}3^x = 6{,}791629$
575. $19^x = 91$, $(1{,}7)^x = 7777$
576. $4{,}3^x = 10000$, $3^x = 555$
577. $4{,}967583^x = 55$
578. $3{,}831288^x = 88$
579. $1{,}859853^x = 77$
580. $6{,}9313^x = 333$
581. $(3\frac{1}{2})^x = 33022$
582. $(2\frac{1}{3})^x = 22033$
583. $(5\frac{1}{4})^x = 19{,}78275$
584. $(2\frac{1}{7})^x = 303{,}7034$
585. $(\frac{3}{4})^x = \frac{2}{3}$, $(\frac{4}{5})^x = \frac{1}{5}$
586. $0{,}7683^x = \frac{1}{7}$, $0{,}3065^x = \frac{1}{8}$
587. $0{,}2307^x = 2307$
588. $0{,}73568^x = 10$
589. $(\frac{3}{4})^x = 34$, $(\frac{4}{7})^x = 74$
590. $47^x = \frac{4}{7}$, $83^x = \frac{3}{8}$
591. $(\frac{5}{6})^x = (\frac{6}{5})^9$
592. $(\frac{2}{3})^x = (\frac{5}{4})^8$
593. $\sqrt[x]{795{,}68} = 3{,}803187$
594. $\sqrt[x]{100} = 4{,}64157$
595. $\sqrt[x]{8888} = 3{,}116022$
596. $\sqrt[x]{87635} = 6{,}664685$
597. $\sqrt[x]{\frac{3}{4}} = 304$
598. $\sqrt[x]{\frac{5}{7}} = 705$
599. $\sqrt[x]{\frac{9351}{19253}} = 37$
600. $\sqrt[x]{\frac{1348}{4883}} = 73$
601. $\sqrt[x]{0{,}97051} = 10$
602. $\sqrt[x]{0{,}4172262} = 33$.

XX. Anwendung der Gleichungen des ersten Grades mit einer Unbekannten.

A. Theorie.

1. Die folgenden Aufgaben sollen mit Hilfe der Gleichungen des ersten Grades gelöst werden. Die in der Aufgabe gegebenen Bedingungen sind mathematisch auszudrücken oder die Worte der Aufgabe in mathematische Zeichen zu übertragen. Die in der Aufgabe gesuchte Größe bezeichnet man mit einem Buchstaben, in der Regel mit x. Mit dieser Größe x nimmt man die in der Aufgabe vorgeschriebenen Operationen vor, man verfährt dabei, als ob x eine bekannte Größe wäre, mit der man die Probe machen wolle, ob sie auch den gegebenen Bedingungen genügt. Auf diese Weise muß sich die Gleichung von selbst ergeben. Beide Seiten der Gleichung müssen verschiedene Ausdrücke für dieselbe Größe sein. Welche Größe so auf doppelte Weise ausgedrückt wird, hat man auf Grund des Aufgabentextes in jedem einzelnen Falle durch eine besondere Überlegung zu ermitteln.

Digitized by Google

2. Hierbei muß man im Auge behalten, daß die Lösung einer Gleichung stets eine reine Zahl ist. Es macht darum einen Unterschied, ob in der Aufgabe selbst unmittelbar nach einer Zahl gefragt ist, oder nach irgend einer durch Zahlen ausdrückbaren Größe von bestimmter Art.

Hat man z. B. die Frage zu beantworten: Welche Zahl muß man zu 7 addieren, um 11 zu erhalten, so ist die gesuchte Zahl einfach mit x zu bezeichnen, es ergibt sich dann die Gleichung:

$$7 + x = 11, \quad \text{also } x = 4.$$

3. Hat man aber die Frage zu beantworten: Wie groß ist die Summe, deren Dreifaches noch um 11 ℳ 70 *Pf.* unter 100 ℳ bleibt, so kann man nicht sagen: Die gesuchte Summe heiße x, da ja derselbe Geldbetrag je nach der Wahl der Münzeinheit durch ganz verschiedene Zahlen ausgedrückt werden kann. Man muß vielmehr sagen: Die gesuchte Summe betrage x ℳ, dann ergibt sich die Gleichung:

$$3x + 11{,}70 = 100; \quad x = 29{,}10;$$

in Worten: Die gesuchte Summe beträgt 29,10 ℳ, d. i. 29 ℳ 10 *Pf.*

Statt dessen kann man auch die auftretenden Beträge sämtlich in Pfennigen ausdrücken. Die gesuchte Summe betrage s *Pf.*, so hat man:

$$3s + 1170 = 10\,000; \quad s = 2910.$$

Die gesuchte Summe findet sich gleich 2910 *Pf.*, in Übereinstimmung mit dem vorher erhaltenen Ergebnis. Hierbei ist wesentlich, daß Größen gleicher Art überall durch dieselben Größeneinheiten ausgedrückt werden.

4. Bei manchen Aufgaben, besonders bei verwickelteren, ist es oft nicht zweckmäßig, die gesuchte Größe als Unbekannte anzunehmen. Der Ansatz ergibt sich oft viel leichter, wenn man die unbekannte Größe indirekt sucht. Man bezeichnet eine andere, ebenfalls unbekannte Größe mit x und bestimmt erst, nachdem man diese gefunden hat, mit Hilfe dieser Größe die gesuchte Größe. In diesem Falle muß die Größe x so beschaffen sein, daß man durch sie erstens alle in der Aufgabe vorkommenden, nicht direkt gegebenen Größen, zweitens die gesuchten Größen selber leicht ausdrücken kann.

5. Bei den meisten Aufgaben kann man verschiedene Wege einschlagen, um zur Auflösung zu gelangen. Man kann einerseits von dieser oder von jener Bedingung der Aufgabe ausgehen, um die Gleichung zu entwickeln, und wird so jedesmal die Gleichung in einer anderen Form erhalten. Man kann auch andererseits die gesuchte Größe selber oder eine andere nicht bekannte Größe als x annehmen und gelangt so ebenfalls zu verschiedenen Formen der Gleichung. Der Schüler soll alle Wege einschlagen, welche ihm der Form der Aufgabe angemessen zu sein scheinen. — Alle diese Aufgaben lassen sich auch ohne Anwendung der Algebra lösen Es ist sehr förderlich, bei jeder Aufgabe auch diesen Weg zu versuchen. Manche Aufgaben sind auf dem gewöhnlichen Wege durch bloße Schlüsse ebenso einfach zu

Digitized by Google

lösen, als durch Algebra; manche, welche mit Hilfe der Algebra sehr leicht sind, machen auf dem gewöhnlichen Wege schon Schwierigkeiten. Häufig tut hierbei die sogenannte Regula falsi gute Dienste. Das Wesen derselben besteht darin, daß man annimmt, die Differenzen zwischen verschiedenen für die unbekannte Größe angenommenen Werten stehen in demselben Verhältnis, wie die Differenzen der bei Verwendung dieser Werte auftretenden Fehler. Diese Annahme ist um so mehr begründet, je geringer diese Fehler sind. Sind also a_1 und a_2 zwei Werte für x, die der Gleichung nahezu Genüge leisten, sind ferner α_1 und α_2 die dabei auftretenden Fehler, so hat man $(a_1 - a_2) : (a_1 - x) = (\alpha_1 - \alpha_2) : (\alpha_1 - 0)$, indem für x der Fehler 0 sein muß. Das gibt x. — Meistens setzt man $a_1 = 1$, $a_2 = 0$. Dann ist x gleich dem ersten Fehler durch die Differenz der Fehler $\left(\frac{\alpha_1}{\alpha_1 - \alpha_2}\right)$. Aufg 15., 115. u. a.

6. In manchen Aufgaben sollen mehrere Größen gesucht werden. Bei solchen Aufgaben werden sich alle Größen leicht ergeben, wenn man eine derselben gefunden hat. Es ist jedoch vorläufig nicht gestattet, mehr als eine Unbekannte in die Rechnung einzuführen.

B. Aufgaben.*)

Erste Stufe.

1. Welche Zahl muß man zu 739 addieren, um 937 zu erhalten?

2. Welche Zahl muß man von 847 subtrahieren, um 748 zu erhalten?

3. Welche Zahl muß man mit 7 multiplizieren, um 1001 zu erhalten?

4. Welche Zahl muß man durch 27 dividieren, um 37 zu erhalten?

5. Zu welcher Zahl muß man 0,735 addieren, um 1 zu erhalten?

6. Von welcher Zahl muß man 7,667 subtrahieren, um 3,333 zu erhalten?

7. Mit welcher Zahl muß man 30,03 multiplizieren, um 111,111 zu erhalten?

8. Durch welche Zahl muß man 70,07 dividieren, um 7,7 zu erhalten?

9. Welche Zahl gibt $\frac{3}{4}$, wenn sie um $\frac{1}{12}$ vermehrt wird?

10. Welche Zahl gibt $3\frac{5}{6}$, wenn man sie um $2\frac{2}{3}$ vermindert?

*) Die Aufgaben sind vielfach einander sehr ähnlich, so daß der Ansatz bei einer von ihnen vorbildlich für den Ansatz bei einer Reihe von anderen ist. Auf diesen Ansatz (d. h. den Ausdruck des Sachverhalts durch mathematische Zeichen) kommt es bei diesen Aufgaben vorzugsweise an.

Digitized by Google

11. Welche Zahl gibt $\frac{3}{5}$, wenn sie mit $\frac{4}{9}$ multipliziert wird?

12. Mit welcher Zahl muß man $\frac{5}{4}$ multiplizieren, um den umgekehrten Bruch zu erhalten?

13. Welche Zahl gibt $\frac{8}{9}$, wenn sie durch $1\frac{1}{2}$ dividiert wird?

14. Welche Zahl muß man durch $\frac{7}{8}$ dividieren, um $\frac{8}{7}$ zu erhalten?

15. Um welche Zahl muß man b vermehren, um a zu erhalten?

16. Welche Zahl muß man von $a + 1$ subtrahieren, um 2 zu erhalten?

17. Von welcher Zahl muß man a subtrahieren, um b zu erhalten?

18. Welche Zahl muß man mit a multiplizieren, um 1 zu erhalten?

19. Welche Zahl muß man in a dividieren, um b zu erhalten?

---

20. Welche Zahl gibt von 5,96 subtrahiert ebensoviel, als zu 3,74 addiert?

21. Um welche Zahl muß man $\frac{8}{9}$ vermindern, um die Zahl selber zu erhalten?

22. Welche Zahl liegt in der Mitte zwischen $7\frac{5}{6}$ und $10\frac{1}{2}$?

23. Welche Zahl gibt verdoppelt ebensoviel als halbiert?

24. Welche Zahl gibt, um ihr Dreifaches vermehrt, 132?

25. Welche Zahl gibt, mit $\frac{2}{5}$ multipliziert, ebensoviel, als um $\frac{2}{3}$ vermindert?

26. Welche Zahl gibt, um $4\frac{1}{2}$ vermehrt, ebensoviel, als mit $2\frac{1}{2}$ multipliziert?

27. Der dritte und der fünfte Teil einer Zahl machen zusammen 40. Wie heißt die Zahl?

28. Welche Zahl muß man von $7\frac{1}{2}$ subtrahieren, um das Vierfache derselben zu erhalten?

29. Von welcher Zahl muß man $3\frac{1}{3}$ subtrahieren, um den dritten Teil derselben zu erhalten?

30. Der dritte Teil einer Zahl übertrifft den fünften Teil um 76. Wie heißt die Zahl?

31. Multipliziert man eine Zahl mit 0,85 und mit $1\frac{1}{2}$ und addiert beide Produkte, so erhält man 94. Wie heißt die Zahl?

32. Welche Zahl ist um ihren 9. Teil kleiner als 100?

33. Welche Zahl ist um ihren 20. Teil größer als 95?

34. Welche Zahl hat die Eigenschaft, daß ihr Vierfaches um ebensoviel über 34 steigt, als ihr Dreifaches unter 43 bleibt?

35. Multipliziert man eine Zahl mit $4\frac{1}{3}$, so beträgt das Produkt gerade soviel über 200, als die Zahl selber unter 200 liegt. Wie heißt dieselbe?

Digitized by Google

36. Addiert man zu einer Zahl $4\frac{4}{5}$ und dividiert die Summe durch 7, so erhält man die Zahl selber. Wie heißt die Zahl?

37. Subtrahiert man von $19\frac{3}{4}$ eine gewisse Zahl und teilt die Differenz durch 5, so erhält man $3\frac{3}{4}$. Wie heißt die Zahl?

38. Subtrahiert man von einer Zahl $7\frac{1}{2}$ und dividiert die Zahl 19 durch die Differenz, so erhält man 38. Wie heißt die Zahl?

39. Subtrahiert man von 7 eine gewisse Zahl und dividiert die Zahl 5 durch die Differenz, so erhält man ebensoviel, als wenn man die Zahl von 6 subtrahiert und durch diese Differenz die Zahl 4 dividiert. Wie heißt die Zahl?

---

40. Mein Vater, sagte ein Knabe, schenkte mir gestern zu meinem Geburtstage 2 *M*. Heute habe ich 20 *Pf.* ausgegeben; aber ich habe trotzdem jetzt noch um $\frac{1}{10}$ mehr als vorgestern. Wieviel hatte er ursprünglich gehabt?

41. Heute gab ich 1,30 *M* aus. Daher habe ich noch 9mal soviel übrig behalten, als ich ausgegeben habe. Wieviel hatte ich anfangs?

42. Kannst' du raten, wie viel Äpfel ich habe, sprach ein Knabe zu einem andern, so sollst du den 4. Teil weniger zwei oder, was dasselbe ist, den 6. Teil und einen erhalten. Wieviel Äpfel hatte der Knabe?

43. Gebe ich, antwortete jemand, der nach seiner Barschaft gefragt wurde, den 3. Teil und den 7. Teil aus, so behalte ich noch 50 *Pf.* mehr als die Hälfte. Wie groß war seine Barschaft?

44. Ein Vater ist jetzt 43 Jahre und 4 Monate alt und daher um den 3. Teil mehr als dreimal so alt als sein Sohn. Wie alt ist dieser?

45. Nimmt man von einer Zahl den 3. Teil und noch 18 fort, so bleiben noch 19 mehr als die Hälfte. Wie heißt die Zahl?

46. Eine Schule besteht aus vier Klassen. In der ersten Klasse sitzen $\frac{1}{6}$ der ganzen Anzahl, in der zweiten $\frac{1}{4}$, in der dritten $\frac{1}{3}$, in der vierten $\frac{1}{5}$ und noch 9. Wie stark war die Schule?

47. Durch einen Preisrückgang des Roggens um 50 *Pf.* für das *hl* verminderte sich das Erträgnis eines Roggenverkaufs um 20 *M*. Um wieviel *hl* handelte es sich?

48. Ein Landmann hoffte an Weizen das Zwölffache der Aussaat zu ernten. Er erntete jedoch nur 19 Tonnen $7\frac{1}{2}$ Ztr. Das waren $20\frac{1}{2}$ Ztr. weniger, als er erwartet hatte. Wieviel Korn hatte er ausgesäet?

49. Ein Landmann hatte Hagelschaden. Deswegen erntete er nur den 3. Teil von dem, was er sonst der Wahrscheinlichkeit nach geerntet

Digitized by Google

haben würde. Er rechnete den Verlust auf $37\frac{1}{5}$ Tonnen. Wieviel hätte er nach seiner Rechnung ohne Hagel ernten müssen?

50. Ob man eine Zahl mit 7 multipliziert und 9 addiert, oder ob man sie mit 9 multipliziert und 7 subtrahiert, ist gleich. Wie heißt die Zahl?

51. Addiert man zu einer Zahl 5, multipliziert die Summe mit 3, zieht vom Produkte 6 ab, dividiert den Rest durch 7, so erhält man eine Zahl, die um 5 kleiner ist als die gesuchte Zahl. Wie heißt dieselbe?

52. Zieht man von einer Zahl 3 ab, multipliziert den Rest mit 7, addiert 5, teilt die Summe durch die Zahl selber, so erhält man 5. Wie heißt die Zahl?

---

53. Zwei Knaben, von denen der ältere doppelt so alt ist als der jüngere, sind zusammen 18 Jahre alt. Wie alt ist jeder?

54. Mein Vater, sagte ein Knabe, der nach dem Alter seines Vaters gefragt wurde, ist jetzt 29 Jahre älter als ich, oder, was dasselbe sagt, um ein Jahr mehr als $3\frac{1}{3}$mal so alt als ich. Wie alt sind Vater und Sohn?

55. Die Summe zweier Zahlen beträgt 728, ihre Differenz 278. Wie heißen die Zahlen?

56. Die Summe zweier Zahlen, von denen die zweite um $13\frac{1}{3}$ größer ist als die erste, beträgt 100. Wie heißen dieselben?

57. Die Differenz zweier Zahlen, von denen die erste $4\frac{1}{5}$mal so groß ist als die zweite, beträgt 10. Wie heißen dieselben?

58. Die Differenz zweier Zahlen, von denen die zweite den 7. Teil der ersten beträgt, ist 7,2. Wie heißen dieselben?

59. Von zwei Zahlen, deren Summe 1000 beträgt, ist die zweite in der ersten $2\frac{1}{3}$mal enthalten. Wie heißen dieselben?

60. Es soll 99 so in zwei Teile geteilt werden, daß die Differenz der Teile in dem größeren Teil 5mal enthalten ist.

61. Gotha und Coburg hatten am Ende des 19. Jahrhunderts zusammen 51 000 E. Wieviel Einwohner hatte jede Stadt, wenn Gotha 19 000 E. mehr hat als Coburg?

62. Weimar hatte am Ende des 19. Jahrhunderts 8000 E. mehr als Jena. Hätte die Stadt Jena 1500 E. weniger gehabt, so würde ihre Einwohnerzahl zwei Drittel von der von Weimar ausgemacht haben. Wieviel Einwohner hatte jede Stadt?

63. Frankfurt a. O. hatte am Ende des 19. Jahrhunderts 226 000 E. weniger als Frankfurt a. M. Hätte die Stadt Frankfurt a. M. 40 000 E. weniger gehabt, als sie hatte, so hätte sie viermal soviel Einwohner gehabt als Frankfurt a. O. Wieviel Einwohner hatte jede Stadt?

Digitized by Google

64. Zerlege die Zahl 555 in zwei Teile, die sich wie 7 : 8 verhalten.

65. Zerlege die Zahl 105 in zwei Teile, die sich verhalten wie $2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{3}$.

66. A und B gründen ein Geschäft mit 7850 ℳ, von denen A 3450, B 4400 hergibt. Sie haben einen Gewinn von 628 ℳ. Wieviel erhält jeder von demselben?

67. Es sollen 1000 ℳ so an zwei Personen verteilt werden, daß die erste so oft 3 ℳ erhält als die zweite $3\frac{2}{3}$. Wieviel erhielt jede?

68. Bei einem Mahle gab es gebratene Tauben und Krebse. Die hatten zusammen 700 Füße und 90 Köpfe. Wieviel Tiere von jeder Art waren vorhanden?

69. Potsdam hatte 1898 etwa 20000 E. weniger als Erfurt. Der fünfte Teil der Einwohnerzahl von Potsdam übertraf den achten Teil der Bevölkerung von Erfurt um 2000 E. Wie hoch belief sich die ungefähre Seelenzahl jeder Stadt?

70. Danzig und Magdeburg hatten am Ende des 19. Jahrhunderts zusammen 368 000 E. Wieviel Einwohner hatte jede Stadt, wenn sich ihre Einwohnerzahlen wie 3 : 5 verhalten?

71. Kopenhagen und Hamburg hatten am Anfang des 20. Jahrhunderts zusammen rund 1 050 000 E. Wieviel Einwohner kamen auf jede Stadt, wenn Hamburg noch einmal soviel hatte als Kopenhagen?

72. Jemand wünschte für 10 Taler Markstücke und Zehnpfennigstücke. Wieviel Geldstücke erhielt er von jeder Art, wenn die ganze Anzahl 147 betrug?

73. Es wünscht jemand für 100 Golddollars Markstücke und Franken. Er erhält im ganzen 460 Geldstücke. Wieviel von jeder Art, wenn der Golddollar zu 4,20 ℳ, der Frank zu 80 *Pf.* gerechnet wird?

74. Man soll 81 in zwei Teile zerlegen. Dividiert man mit dem zweiten Teil in den ersten, so erhält man 3, Rest 1. Wie heißen die Teile?

75. Zwei Zahlen verhalten sich wie $2\frac{2}{5} : 5\frac{1}{3}$. Dividiert man die zweite durch die erste, so erhält man 2, Rest 14. Wie heißen die Zahlen?

76. Man soll $2a$ in zwei Teile zerlegen, deren Differenz 2 ist.

77. Zwei Zahlen zu finden, deren Summe gleich a ist und die sich verhalten wie 7 : 3.

78. Zwei Zahlen verhalten sich wie $1 + n$ zu $1 - n$. Wie heißen dieselben, wenn ihre Summe $2a$ beträgt?

79. Zwei Zahlen verhalten sich umgekehrt wie $n - 1$ zu $n + 1$. Wie heißen sie, wenn die erste um 2 größer ist als die zweite?

Digitized by Google

80. Welches Kapital ist nach Verlauf eines Jahres bei $4\frac{1}{2}$ Pzt. mit den Zinsen zu 7691,20 ℳ angewachsen?

81. Wenn jemand eine Ware mit 772 ℳ verkauft und dabei $3\frac{1}{2}$ Pzt. verliert, wieviel hat er für die Ware im Einkauf bezahlt?

82. Wäre mein Kapital um 1265 ℳ größer, als es ist, so würde ich 450 ℳ Zinsen haben. Wie groß war das Kapital, $4\frac{1}{2}$ Pzt. gerechnet?

83. Ein Verleger hatte eine Nettoeinnahme von 77 000 ℳ. Er hatte den Sortimentsbuchhandlungen für den 4. Teil der Bücher $33\frac{1}{3}$ Pzt., für die übrigen Bücher 25 Pzt. Rabatt gegeben. Für wieviel Mark Bücher hatte er verschickt?

84. Zwei Buchhändlerrechnungen, von denen die erste um 100 ℳ größer war als die zweite, bezahlte ich zusammen nach Abzug des Rabatts bar mit 391 ℳ. Es waren für die erste 5, für die zweite 10 Pzt. Rabatt angesetzt. Wie hoch war jede Rechnung?

85. Von zwei Buchhändlern erhielt ich zwei Rechnungen, die zusammen auf 415 ℳ lauteten. Der erste Buchhändler hatte 4 Pzt. Rabatt angesetzt, der zweite 5 Pzt. Wie groß war die Barzahlung für beide Rechnungen zusammen, wenn sie für die erste Rechnung 131 ℳ mehr betrug als für die zweite?

86. Zwei Kapitalien, die bezw. zu $4\frac{1}{2}$ und 5 Pzt. auf Zinsen stehen, betragen zusammen 15 000 ℳ. Wie groß sind dieselben, wenn das erste 57,50 ℳ Zinsen mehr bringt als das zweite?

87. Zwei Kapitalien, 3500 ℳ und 4600 ℳ, stehen auf Zinsen und bringen zusammen 376 ℳ. Zu wieviel Prozent steht jedes, wenn das erste $\frac{1}{4}$ Pzt. niedriger steht als das zweite?

88. Zu wieviel Prozent muß man ein Kapital ausleihen, wenn es sich mit den einfachen Zinsen in 24 Jahren verdoppeln soll?

89. Wieviel Jahre müß ein Kapital zu $4\frac{1}{2}$ Pzt. auf Zinsen stehen, damit es sich mit den einfachen Zinsen verdoppelt?

90. Zwei Kapitalien, welche bezw. zu 4 und $4\frac{1}{2}$ Pzt. auf Zinsen stehen, sind zu gleicher Zeit ausgeliehen. Wie groß sind dieselben, wenn das erste noch 10 000 ℳ mehr beträgt als das zweite und wenn sie sich zusammen mit den einfachen Zinsen in 24 Jahren verdoppeln?

91. Jemand hat 25 000 ℳ auf Zinsen zu 4 Pzt. und 24 000 ℳ zu $4\frac{1}{2}$ Pzt. In wieviel Jahren werden beide Kapitalien mit den einfachen Zinsen zu derselben Summe anwachsen?

92. Jemand hat zwei Kapitalien, die zusammen 20 000 ℳ betragen, auf Zinsen, das erste zu $4\frac{1}{2}$ Pzt., das zweite zu 5 Pzt. In 10 Jahren werden dieselben mit den einfachen Zinsen zu 29 310 ℳ angewachsen sein. Wie groß sind die Kapitalien?

93. Könnte ich, sagte jemand, mein Kapital zu 5 Pzt. statt zu

Digitized by Google

$4\frac{3}{4}$ Pzt. unterbringen, so würde ich jährlich ebensoviel über 1989 *M* Zinsen einnehmen, als ich jetzt darunter habe. Wie groß war sein Kapital?

---

94. Zwei Freunde gehen einander entgegen. Der eine legt stündlich $5\frac{1}{2}$, der andere $4\frac{1}{2}$ *km* zurück. Nach wieviel Stunden treffen sie zusammen, wenn sie zugleich ausgehen und ihre anfängliche Entfernung 30 *km* beträgt?

95. A bricht zu Rad von P, B zu Fuß von Q auf, beide zu derselben Zeit und in derselben Richtung PQ. Wann wird A den B einholen, wenn A stündlich 9, B stündlich 4 *km* zurücklegt und die Entfernung PQ $12\frac{1}{2}$ *km* beträgt?

96. A und B reisen von demselben Orte ab, B $2\frac{1}{2}$ Stunden früher als A. Wie lange braucht A, um B einzuholen, wenn A, der sich eines Rades bedient, stündlich 12 *km*, B stündlich 4 *km* zurücklegt?

97. Aus einem Orte wird morgens 6 Uhr ein Reiter abgeschickt, der in jeder Stunde $1\frac{1}{2}$ Meilen zurücklegt. Ihm wird um $6\frac{1}{2}$ Uhr von demselben Orte aus ein anderer Reiter nachgeschickt, der in jeder Stunde $1\frac{3}{4}$ Meilen zurücklegt. Um wieviel Uhr wird der zweite den ersten einholen, und wieviel Meilen hat dann jeder zurückgelegt?

98. Zwei Freunde wandern einander entgegen. Der erste geht von A aus und legt stündlich 4 *km* zurück. Der zweite geht von B aus und legt stündlich $3\frac{1}{2}$ *km* zurück. Wo treffen sie zusammen, wenn die Entfernung AB 21 *km* beträgt?

99. Von A geht morgens 7 Uhr ein Bote ab in der Richtung AB und legt in je 3 Stunden 11 *km* zurück. Von B geht um 8 Uhr ein anderer Bote ab nach A, der in je 2 Stunden 11 *km* zurücklegt. Wann und wo begegnen sich die Boten, wenn die Entfernung AB 22 *km* beträgt?

100. Von A geht morgens 6 Uhr ein Bote in der Richtung AB ab und legt in der Stunde 4 *km* zurück. Von B geht um 7 Uhr ein anderer Bote in derselben Richtung ab und legt in der Stunde 3,5 *km* zurück. Wann und wo werden sie sich treffen, wenn die Entfernung AB 9 *km* beträgt?

101. Um 12 Uhr geht ein Bote aus A ab, der in jeder Stunde $4\frac{1}{2}$ *km* zurücklegt. Ihm wird um $2\frac{1}{2}$ Uhr ein Radfahrer nachgeschickt, der den ersten um 4 Uhr eingeholt haben soll. Wie groß muß die Geschwindigkeit des Radfahrers sein?

102. Zwei Körper, die anfänglich 7000 *m* voneinander entfernt sind, bewegen sich einander entgegen. Der erste macht in der Sekunde 9 *m*, der zweite 7 *m*. Nach wieviel Sekunden werden sie zum erstenmal 1000 *m* voneinander entfernt sein, nach wieviel

Digitized by Google

Sekunden zum zweitenmal, und nach wieviel Sekunden werden sie sich treffen?

103. Zwei Arbeiter A und B zogen einen Graben von 83 *m* Länge. A machte täglich 4 *m*, B $3\frac{1}{2}$ *m*. A fing am Montag früh an, B am Mittwoch. Wann werden sie mit dem Graben fertig sein, wenn sie gemeinschaftlich weiter arbeiten?

---

104. Eine Hausfrau kaufte Eier. Es kosteten 13 Eier ebenso viel über 70 *Pf.*, als 7 darunter. Wie hoch kam das Dutzend?

105. Betrüge die Höhe der Kölner Domtürme um den vierten Teil mehr als sie beträgt und kämen dann noch 9 *m* dazu, so würde sie den Betrag von 180 *m* um ebensoviel übersteigen, als sie jetzt dahinter zurückbleibt. Wie hoch sind die Türme?

106. Ein Vater ist 40 Jahre alt, sein jüngster Sohn 1 Jahr, mithin der Vater 40 mal so alt als der Sohn. Nach wieviel Jahren wird der Vater nur noch doppelt so alt als sein Sohn sein?

107. Ein Vater ist jetzt 45 Jahre alt, sein ältester Sohn 15 Jahre, der Vater also dreimal so alt als sein Sohn. Vor wieviel Jahren war der Vater 11mal so alt als sein Sohn?

108. Ein Knabe wurde nach seinem und seines Vaters Alter gefragt. Er antwortete: Vor 8 Jahren war mein Vater 8 mal so alt als ich; nach 16 Jahren wird er nur noch doppelt so alt sein. Wie alt waren Vater und Sohn?

109. Das Alter von A verhält sich zu dem von B wie 5 : 3. Nach 6 Jahren wird das Verhältnis wie 7 : 5 sein. Wie alt sind beide Personen?

110. Das Alter von C verhält sich zu dem von D wie 5 : 4. Vor 9 Jahren war C doppelt so alt als D. Wie alt sind beide Personen?

111. Vor 5 Jahren verhielt sich das Alter von E zu dem von F wie 3 : 1. Nach 4 Jahren wird das Verhältnis wie 3 : 2 sein. Wie alt sind beide Personen jetzt?

112. Die Seiten eines Rechtecks verhalten sich wie 3 : 2. Verlängert man jede Seite um 7 *m*, so wächst der Inhalt um 504 *qm*. Wie groß ist der Inhalt?

113. Dividiert man die größere Seite eines Rechtecks durch die kleinere, so erhält man 2, Rest 3. Vergrößert man jede Seite um 3 *m*, so wächst der Inhalt um 171 *qm*. Wie groß ist das Rechteck?

114. Ob man eine Zahl mit 3 multipliziert, zum Produkt 5 addiert und die Summe halbiert, oder ob man die Zahl mit 5 multipliziert, zum Produkt 4 addiert und die Summe durch 3 dividiert, ist für das Resultat gleichbedeutend. Wie heißt die Zahl?

Digitized by Google

115. Ein Bruch, dessen Wert $\frac{1}{6}$ ist, erhält den Wert $\frac{1}{6}$, wenn man Zähler und Nenner um je 1 vermindert. Wie heißt er?

116. Ein Bruch hat den Wert $\frac{3}{7}$. Vermehrt man den Zähler um 7 und vermindert man den Nenner um ebensoviel, so erhält er den Wert $\frac{2}{3}$. Wie heißt er?

117. Der Nenner eines Bruches ist um 4 größer als sein Zähler. Vermehrt man Zähler und Nenner um je 3, so nimmt er den Wert $\frac{2}{3}$ an. Wie heißt der Bruch?

118. Um welche Zahl muß man den Zähler des Bruches $\frac{7}{13}$ vergrößern und den Nenner verkleinern, wenn er sich in seinen reziproken Wert verwandeln soll?

119. Welche Zahl muß man zu a addieren und von b subtrahieren, damit der Bruch $\frac{a}{b}$ den Wert $\frac{b}{a}$ erhält?

---

120. Zerlege die Zahl 100 in drei Teile, die sich wie 2 : 3 : 5 verhalten.

121. Zerlege die Zahl 200 in vier Teile, die sich wie 4 : 5 : 7 : 9 verhalten.

122. Es sollen 1376 ℳ unter A, B und C so verteilt werden, daß B so oft 5 ℳ und C so oft 7 ℳ erhält, als A 4 ℳ. Wieviel erhält jeder?

123. Es sollen 1300 ℳ unter vier Personen A, B, C und D so verteilt werden, daß ihre Anteile sich verhalten, wie $1\frac{3}{5} : 1\frac{2}{5} : 1\frac{1}{4} : 1\frac{1}{6}$.

124. Es sollen 1000 ℳ unter drei Personen A, B und C so verteilt werden, daß A 50 ℳ mehr als B, C 40 ℳ weniger als B erhält.

125. Es soll 500 so in drei Teile geteilt werden, daß sich die ersten beiden Teile wie 2 : 3 verhalten, der dritte aber um 10 größer ist als der erste.

126. In einer Gesellschaft befinden sich 5 Männer mehr als Frauen und ebensoviel Kinder als Männer und Frauen zusammen. Aus wieviel Personen von jeder Art bestand die Gesellschaft, wenn die ganze Anzahl 66 war?

127. In einer Gesellschaft, die aus 50 Personen bestand, befanden sich ebensoviel Männer als Frauen und Kinder zusammen. Als 5 Männer mit ihren Frauen nebst 8 Kindern fortgingen, blieben noch dreimal soviel Frauen als Kinder. Wieviel Personen von jeder Art waren ursprünglich vorhanden?

128. Es sollen 760 ℳ so unter vier Personen verteilt werden, daß jede folgende 10 ℳ mehr erhält als die vorhergehende.

Digitized by Google

129. Es sollen 1225 ℳ so unter vier Personen verteilt werden, daß jede folgende um $\frac{1}{3}$ mehr erhält als die vorhergehende.

130. Es sollen 5555 ℳ unter A, B und C verteilt werden. B erhält um $\frac{1}{3}$ mehr als A weniger 100 ℳ. C erhält um den 4. Teil und 50 ℳ weniger als B. Wieviel erhält jeder?

131. Unter A, B und C wurde eine Summe verteilt. A erhielt den 3. Teil und 1200 ℳ, B den 4. Teil und 1300 ℳ, C den 5. Teil und 1400 ℳ. Wie groß war die zu verteilende Summe, und wieviel erhielt jeder?

132. Von einer zu verteilenden Summe erhielt A den 4. Teil und 100 ℳ, B den 3. Teil weniger 100 ℳ, C $\frac{3}{7}$ von dem was A und B zusammen erhielten und noch 200 ℳ. Wie groß war die zu verteilende Summe, und wieviel erhielt jeder?

133. Es sollen 5000 ℳ unter vier Personen A, B, C und D verteilt werden. B erhält um $\frac{1}{4}$ mehr als A, weniger 100 ℳ; C erhält um $\frac{1}{6}$ mehr als B, weniger 150 ℳ; D um $\frac{1}{8}$ mehr als C, weniger 200 ℳ. Wieviel erhielt jeder?

---

134. Jemand mischt zwei Arten Wein, die Flasche zu 1,20 ℳ und die Flasche zu 2,70 ℳ. Er will 150 Flaschen herstellen, die Flasche zu 2 ℳ. Wieviel Flaschen muß er von jeder Art nehmen?

135. Jemand hat 3000 *l* Spiritus von 70 Pzt.*) Wieviel Wasser hat er zuzusetzen, damit der Spiritus nur noch 60 Pzt. hält?

136. Jemand hat 600 *l* Spiritus von 60 Pzt. Wieviel Spiritus von 95 Pzt. muß er hinzusetzen, um Spiritus von 80 Pzt. zu erhalten?

137. Jemand braucht 1000 *l* Spiritus zu 80 Pzt. Er hat Spiritus zu 77 Pzt. und zu 87 Pzt. Wieviel muß er von jeder Art nehmen?

138. Jemand hat 700 *l* Spiritus von 75 Pzt. Wieviel Wasser muß er demselben entziehen, damit der Gehalt des Spiritus auf 84 Pzt. steigt?

139. Ein Goldschmied will aus 9lötigem und 13lötigem Silber 12lötiges Silber herstellen. Wieviel muß er von jeder Art nehmen, wenn er 100 *g* nötig hat?

140. Wieviel Kupfer muß ein Goldschmied zu 200 *g* 14lötigen Silbers hinzusetzen, um 12lötiges zu erhalten?

141. Jemand hat 100 *g* 18karätiges Gold. Wieviel Kupfer muß er ausscheiden, um 20karätiges Gold zu erhalten?

---

*) d. h. in 100 *l* der Flüssigkeit sind 70 *l* von reinem oder wasserfreiem Spiritus und 30 *l* Wasser enthalten.

Digitized by Google

142. Jemand will aus 900haltigem und 650haltigem Silber 500 *g* 800haltiges herstellen. Wieviel Gramm muß er von jeder Art nehmen?

143. Jemand will aus reinem, d. h. 1000haltigem Golde durch Mischung mit 750haltigem 100 *g* 900haltiges herstellen. Wieviel muß er von jeder Art nehmen?

144. Wieviel Gramm Kupfer muß man zu $93\frac{1}{3}$ *g* reinen Goldes hinzusetzen, um 850haltiges zu erhalten?

145. Jemand hat 700haltiges und 950haltiges Silber. Wieviel muß er von jeder Art nehmen, um 500 *g* 900haltiges Silber herzustellen, wenn beim Schmelzen von der Gesamtmasse 1 Pzt. verloren geht?

146. Jemand hat 2000 *l* 4prozentiger Salzsole. Wieviel Wasser muß man verdampfen, um 10prozentige Sole zu erhalten?

147. Von 80prozentigem Spiritus kostet das Liter 50 *Pf.* Wieviel Wasser muß man zu einer Masse von 100 *l* gießen, wenn das Liter nur 40 *Pf.* kosten soll, und wieviel Pzt. hält dann der Spiritus?

147_1. Auf 36 *g* Eisenfeilspäne von 11 Grad Wärme werden 16 *g* Wasser von 16 Grad gegossen. Wie stellt sich die Ausgleichstemperatur, wenn die spezifische Wärme des Eisens zu $\frac{1}{9}$ angenommen wird?

147_2. Welche Temperatur haben 40 *g* Terpentinspiritus von der spezifischen Wärme 0,45, die zu 22 *g* Wasser von 20 Grad hinzugesetzt, eine Mischung von der Temperatur 29 Grad ergeben?

147_3. Wieviel *g* Terpentinspiritus von 25 Grad (bei der spezifischen Wärme $\frac{4}{9}$) muß man auf 45 *g* Eisenfeilspäne von 16 Grad gießen, wenn die Mischung eine Temperatur von 20 Grad aufweisen soll?

147_4. In 90 *g* Wasser von 26 Grad C. wird der aus siedendem Wasser entweichende Dampf geleitet. Dadurch gerät jenes Wasser ins Sieden, während seine Menge sich zugleich um 12,5 *g* vermehrt. Welcher Wert ergibt sich hieraus für die Siedewärme des Wasserdampfes?

147_5. In ein Gefäß, das 3 *kg* Wasser von 6,4 Grad enthält, wird unmittelbar aus einem Hochofen eine Platinkugel von 125 *g* Gewicht geworfen, dadurch steigt die Temperatur des Wassers auf 8 Grad. Welche ungefähre Höhe ergibt sich hieraus für die Temperatur des Hochofens, wenn man die spezifische Wärme des Platins zu 0,032 annimmt und voraussetzt, daß der Prozeß schnell genug vor sich geht, um wesentliche Wärmeverluste an die Umgebung auszuschließen?

Digitized by Google

Zweite Stufe.

148. A gab von seinem Gelde $\frac{1}{7}$ und noch 266 ℳ an B, da hatte B dreimal soviel als A. Wieviel hatte jeder ursprünglich, wenn sie zusammen 1000 ℳ hatten?

149. Gibt A an B 7 ℳ, so haben beide gleichviel. Gibt aber B an A 5 ℳ, so hat A um 1 ℳ mehr als doppelt soviel als B. Wieviel Mark hat jeder?

150. A gab zu einem Geschäfte $\frac{1}{5}$, B $\frac{1}{6}$ seines Geldes her, A 400 ℳ weniger als B. Wieviel hatte jeder ursprünglich, wenn sie zusammen 30000 ℳ hatten?

151. Zu einem Geschäfte gab A $\frac{1}{4}$, B $\frac{1}{5}$ seines Geldes her, beide gleichviel. Wieviel hatte jeder ursprünglich, wenn A 5000 ℳ mehr als B hatte?

152. Zu einem Geschäfte gab A $\frac{1}{5}$, B $\frac{1}{6}$ seines Geldes her. Daher behielt A noch 300 ℳ mehr übrig als B. Wieviel hatte jeder ursprünglich, wenn sie zusammen 31000 ℳ hatten?

153. Von zwei Spielern, welche zusammen 100 ℳ bei sich hatten, verspielte A $\frac{1}{6}$ seines Geldes an B. Daher sah sich B schließlich im Besitz von 16 ℳ mehr als doppelt soviel, als A noch hatte. Wieviel hatte jeder vor dem Spiel?

154. Zu Anfang eines Spiels hatte A 10 ℳ mehr als B. Als aber A soviel an B verspielt hatte, als der 10. Teil der Barschaft seines Gegners betrug, hatte sich das Verhältnis umgekehrt; denn B hatte 10 ℳ mehr als A. Wieviel hatte jeder vor dem Spiel?

155. Multipliziert man eine gewisse Zahl mit 5, subtrahiert vom Produkte 10, multipliziert die erhaltene Differenz mit 17, schneidet vom Produkt, welches eine vierzifferige Zahl ist, die erste Ziffer links ab, welche 1 ist, so erhält man das Siebenfache der ursprünglichen Zahl. Wie heißt die Zahl?

156. Multipliziert man eine gedachte Zahl mit 15, zieht vom Produkt 29 ab, multipliziert die Differenz mit 7 und streicht die letzte Ziffer rechts, welche 2 ist, ab, so erhält man das Neunfache der Zahl, vermehrt um 5. Wie heißt die Zahl?

157. Von welcher zweizifferigen Zahl, deren Quersumme 11 ist, muß man 63 abziehen, um eine zweizifferige Zahl mit denselben Ziffern in entgegengesetzter Folge zu erhalten?

158. Welche zweizifferige Zahl hat die Quersumme 10 und gibt durch die erste Ziffer dividiert 12, Rest 1?

159. Dividiert man eine zweizifferige Zahl durch ihre zweite Ziffer, so erhält man 6, Rest 5. Wie heißt die Zahl, wenn ihre zweite Ziffer um 3 größer ist, als die erste?

160. Eine zweizifferige Zahl hat zur Quersumme 10. Dividiert

Digitized by Google

man dieselbe durch die Differenz ihrer Ziffern, die zweite subtrahiert von der ersten, so erhält man 13, Rest 4. Wie heißt die Zahl?

161. Eine Zahl, welche mit drei Ziffern geschrieben wird, von denen jede folgende um 2 kleiner ist als die vorhergehende, gibt durch die Quersumme dividiert 50, Rest 3. Wie heißt die Zahl?

162. Zieht man von einer dreizifferigen Zahl 594 ab, so erscheinen die Ziffern in umgekehrter Reihenfolge. Wie heißt die Zahl, wenn die erste Ziffer um 1 größer ist als die zweite, und um 1 kleiner als die zweite und dritte zusammen?

163. Um welche Zahl muß man jede der vier Zahlen 10, 13, 20, 28 verkleinern, damit sie in der angegebenen Reihenfolge eine Proportion bilden?

164. Um welche Zahl muß man jede der vier Zahlen 38, 50, 90, 118 vergrößern, damit sie in der angegebenen Reihenfolge eine Proportion bilden?

165. Um welche Zahl muß man jede der drei Zahlen 7, 15, 39 verkleinern, damit sie in der angegebenen Reihenfolge eine stetige Proportion bilden?

166. Eine sechszifferige Zahl hat links eine 4. Schneidet man diese ab und setzt sie rechts wieder an, so ist die entstandene Zahl um den 3. Teil kleiner als die ursprüngliche. Wie heißt die Zahl?

167. Eine sechszifferige Zahl hat links eine 7. Schneidet man diese ab und setzt sie rechts wieder an, so ist die entstandene Zahl gleich dem 5. Teil der ursprünglichen Zahl. Wie heißt diese Zahl?

168. Teile die Zahl 88 so in zwei Teile, daß die Differenz ihrer Quadrate 880 wird.

169. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 12, die Differenz ihrer Quadrate 600. Wie heißen die Zahlen?

170. Jemand wollte aus einer Zahl die Quadratwurzel ziehen. Beim ersten Versuch war das Quadrat der angenommenen Wurzel um 1 zu klein. Beim zweiten Versuch, als er die Wurzel um 1 größer nahm, war das Quadrat der Wurzel um 40 zu groß. Wie hieß die Zahl?

171. Jemand wollte eine Zahl von Bäumen in Form eines Rechtecks gleichmäßig auspflanzen, die Seiten des Rechtecks verhielten sich wie 3 : 2. Beim ersten Versuch hatte er 15 Bäume zu wenig. Als er in die lange Seite 3 Bäume, in die kurze Seite 2 Bäume weniger nahm, blieben ihm 240 Bäume übrig. Wieviel Bäume hatte er?

172. Mehrere Personen hatten eine Summe Geldes zu bezahlen. Zahlte jede Person 75 *Pf.*, so fehlten noch 2 *M* an der Summe. Zahlte jede 85 *Pf.*, so brachte das 40 *Pf.* zu viel. Wieviel Personen waren vorhanden?

Digitized by Google

173. Eine Anzahl von Personen hatte in einem Gasthause eine Zeche zu bezahlen. Zahlte jede 4,35 *M*, so fehlten noch 20 *Pf.* an der ganzen Summe. Zahlte jede 4,40 *M*, so waren es 20 *Pf.* zu viel. Wie groß war die zu zahlende Summe?

174. Ein Weg soll zu beiden Seiten gleichmäßig und regelmäßig mit Bäumen bepflanzt werden. Setzt man alle 35 *m* 2 Bäume, so hat man 10 Bäume zu wenig. Man reicht gerade aus, wenn man immer 3 Bäume auf je 55 *m* setzt. Wie lang war der Weg?

175. Jemand will Weizen kaufen. A bietet ihm 70 *hl* an, B 90. Kauft er den ersten, so reicht er mit seinem Gelde aus, er behält sogar noch 50 *M* in der Tasche. Kauft er den zweiten, so reicht er nicht aus, er muß noch 5 *M* schuldig bleiben. Wieviel Geld hatte er bei sich, wenn A für 1 *hl* 50 *Pf.* mehr forderte als B?

---

176. Als ich einmal von meinem Gelde die Hälfte, dann von dem Rest noch den dritten Teil ausgab, behielt ich 10 *M* übrig. Wieviel hatte ich anfangs?

177. Eine Frau verkaufte von ihren nach der Stadt gebrachten Eiern zuerst den 5. Teil, dann von dem Rest den 4. Teil, danach von dem jetzigen Reste den 3. Teil, endlich von dem Reste noch die Hälfte und noch 6 Eier. Da war der Korb leer. Wieviel Eier hatte sie anfangs?

178. Eine Frau verkaufte von ihren Apfelsinen zuerst die Hälfte und eine, dann vom Rest wieder die Hälfte und eine und von dem Reste wiederum die Hälfte und eine. Da hatte sie noch 6 übrig. Wieviel hatte sie anfangs?

179. Ein Schlächter schlachtete von seinen Schafen an einem Tage den 3. Teil und 1 Schaf, am zweiten Tage von dem Rest den 3. Teil und 1 Schaf, und ebenso an dem dritten und vierten Tage, jedesmal von dem vorhandenen Reste den 3. Teil und 1 Schaf. Da hatte er noch 45 Schafe übrig. Wieviel hatte er anfangs?

180. Von ihren Zitronen verkaufte eine Frau das erste Mal die Hälfte weniger 3, das zweite Mal von dem Reste die Hälfte weniger 3, und ebenso das dritte und vierte Mal, jedesmal von dem vorhandenen Reste die Hälfte weniger 3. Da hatte sie noch 8 übrig. Wieviel hatte sie anfangs?

181. Ein Vater verteilte eine Menge Nüsse an seine Kinder. Das erste Kind erhielt 5 und den 5. Teil des Restes, das zweite Kind 10 und den 5. Teil des Restes, das dritte Kind 15 und den 5. Teil des Restes usw., jedes folgende Kind 5 mehr als das vorhergehende und den 5. Teil des Restes. Wieviel Nüsse waren ursprünglich vorhanden, und wieviel Kinder hatte er, wenn alle gleichviel erhielten?

Digitized by Google

182. Jemand vermehrt sein Vermögen drei Jahre hindurch regelmäßig jedes Jahr um 20 Pzt. Am Ende jedes Jahres nahm er jedoch zur Bestreitung seiner Haushaltung 4500 ℳ fort. Daher hatte sein Vermögen zu Anfang des 4. Jahres um 2002 ℳ abgenommen. Wieviel hatte er anfangs gehabt?

---

183. A hatte an B drei Zahlungen zu leisten: 800 ℳ nach 6 Monaten, 1000 ℳ nach einem Jahre, 1500 ℳ nach 2 Jahren. A wollte die Zahlungen auf einmal machen. Wann mußte das geschehen, wenn auf keiner Seite ein Zinsenverlust eintreten soll?*)

184. A hatte an B drei Zahlungen zu leisten: 600 ℳ gleich, 1000 ℳ nach 6 Monaten, 1200 ℳ nach 9 Monaten. A will die ganze Summe auf einmal zahlen. Wann muß dies geschehen, wenn auf keiner Seite ein Zinsenverlust stattfinden soll?

185. Jemand soll innerhalb zweier Jahre in vier gleichen Terminen eine Schuld von 1600 ℳ abtragen, jedesmal 400 ℳ. Die erste Zahlung soll nach 6 Monaten erfolgen. Wann kann er die ganze Summe entrichten, wenn die Zinsen sich ausgleichen sollen?

186. A hat an B nach 4 Monaten 500, nach 6 Monaten 1000, nach 9 Monaten 600, nach 12 Monaten den Rest zu zahlen. Er trägt die ganze Summe nach 8 Monaten ab. Dabei findet auf keiner Seite ein Zinsenverlust statt. Wie groß ist die zu zahlende Gesamtsumme?

187. A zahlt an B eine Summe drei Monate nach dem Fälligkeitstermin, die Verspätung hat er nach dem Satze von 4 Prozent Jahreszinsen zu vergüten. Zu gleicher Zeit zahlt er an C eine um 200 ℳ größere Summe acht Monate vor dem Fälligkeitstermin, wofür er einen Diskont von $4\frac{1}{2}$ Prozent auf das Jahr berechnet. Im ganzen beläuft sich die von ihm demgemäß an B und C geleistete Zahlung auf 2175,05 ℳ. Welche Höhe hatten die beiden eigentlich zu leistenden Zahlungen?

188. A bietet für ein Haus 20000 ℳ bar, B 20500, zahlbar nach 6 Monaten, C 21000 ℳ zahlbar nach einem Jahre. Wer bot am meisten, wenn die Zinsen zu $4\frac{1}{2}$ Pzt. gerechnet werden, und um wieviel bot er mehr als die andern?

189. A hat bei B drei Kapitalien auf Zinsen: 1200 ℳ zu $4\frac{1}{2}$ Pzt., 1000 ℳ zu 4 Pzt. und 800 ℳ zu $4\frac{3}{4}$ Pzt. A wünscht die ganze Summe zu gleichem Prozentsatz auszuleihen. Wieviel Prozent muß er rechnen, wenn auf keiner Seite ein Zinsenverlust stattfinden soll?

---

*) Es sind hier, wie in allen folgenden Aufgaben ähnlicher Art, nur einfache Zinsen, nicht Zinseszinsen in Anschlag zu bringen.

Digitized by Google

189_1. Am linken Arm eines zweiarmigen Hebels hängt in 7 *cm* Entfernung von der Drehungsachse ein Gewicht von 24 *g*, am rechten in 8 *cm* Entfernung von der Achse ein Gewicht von 15 *g*. Wo ist ein Gewicht von 12 *g* anzuhängen, wenn damit der Hebel ins Gleichgewicht gebracht werden soll?

189_2. Am rechten Arm eines zweiarmigen Hebels hängt in 6 *cm* Entfernung von der Drehungsachse ein Gewicht von 10 *g* und in 15 *cm* Entfernung von der Achse ein Gewicht von 8 *g*, am linken in 13 *cm* Abstand von der Achse eins von 20 *g*. Welches Gewicht ist an dem um 5 *cm* von der Achse abstehenden Punkte des linken Armes anzubringen, wenn das Gleichgewicht hergestellt werden soll, und in welcher Weise ist diese Anbringung auszuführen?

189_3. An einem Arm eines zweiarmigen Hebels hängen 2 Gewichte von 8 *g* und 10 *g*. Der Aufhängungspunkt des ersteren steht um 5 *cm* weiter von der Drehungsachse des Hebels ab, als der des letzteren. Wie weit sind beide Punkte von der Drehungsachse entfernt, wenn sie durch ein am andern Hebelarme in 7 *cm* Entfernung von der Drehungsachse aufgehängtes Gewicht von 16 *g* im Gleichgewicht gehalten werden?

189_4. An dem einen Arm eines zweiarmigen Hebels hängen in 7 und 9 *cm* Entfernung von der Drehungsachse zwei Gewichte von zusammen 26 *g*. Wie groß ist jedes derselben, wenn sie durch ein am andern Hebelarm in 10 *cm* Entfernung von der Drehungsachse aufgehängtes Gewicht von 20 *g* im Gleichgewicht gehalten werden?

189_5. Welche Temperaturangaben zeigen die Thermometer von Reaumur und von Celsius, wenn das Fahrenheitsche Thermometer $+ 59^0$ zeigt?

189_6. Welche Temperatur zeigt ein Fahrenheitsches Thermometer, wenn die Summe der Angaben eines Reaumurschen und eines Celsiusschen Thermometers — 36^0 beträgt?

189_7. Für welche Temperatur stimmen die Angaben der Thermometer von Fahrenheit und von Celsius in der Gradzahl völlig überein?

189_8. Für welche Temperatur ist die Celsiussche Gradzahl das Fünffache der Fahrenheitschen Angabe?

---

190. Drei Zahlen, deren Summe 1000 beträgt, haben folgende Beziehungen zueinander. Dividiert man die erste in die zweite, so erhält man 2, Rest 5. Vermehrt man die dritte um 1, so ist sie dreimal so groß als die erste. Wie heißen die Zahlen?

191. Man soll 900 in drei Teile zerlegen, daß die Division

Digitized by Google

des zweiten Teils durch den ersten 2 gibt, Rest 1; während die Division des dritten durch den zweiten ebenfalls 2, Rest 1 liefert.

192. Es gibt drei Zahlen, deren Summe 430 beträgt und die folgende Beziehungen zueinander haben. Wäre die zweite um 7 größer, die dritte um 5 kleiner, so würden sie sich wie 8 : 9 : 10 verhalten. Wie heißen die Zahlen?

193. Jemand hat drei Fässer. Füllt er das zweite leere aus dem ersten vollen, so bleibt im ersten noch $\frac{1}{4}$ zurück. Füllt er das zweite volle in das dritte leere, so bleibt im zweiten noch $\frac{1}{3}$ zurück. Wollte er aber die beiden letzten vollen in das erste leere gießen, so würden noch 15 *l* zurückbleiben. Wieviel Liter hielt jedes Faß?

194. Die Einwohnerzahlen von Weimar, Eisenach und Jena am Schlusse des 19. Jahrhunderts würden sich, wenn Weimar 2000 E. mehr, Eisenach und Jena je 1000 E. weniger gehabt hätten, wie 6 : 5 : 4 verhalten haben. Hätte Eisenach 2000 E. mehr gehabt als in Wirklichkeit, so würde die Bewohnerzahl sich zu der von Jena wie 4 : 3 verhalten haben. Wieviel Einwohner hatte jede dieser drei Städte?

195. Nach Paris sind in Frankreich Lyon, Marseille und Bordeaux die größten Städte. Hätte gegen das Ende des 19. Jahrhunderts Lyon 20 000 E. mehr, Bordeaux 10 000 E. weniger gehabt als in Wirklichkeit, so würden sich die Bewohnerzahlen von Lyon, Marseille und Bordeaux wie 10 : 9 : 5 verhalten haben. Die Einwohnerzahl von Marseille und Lyon zusammen war dreimal so groß als die um 50 000 vermehrte Einwohnerzahl von Bordeaux. Wie stellte sich die Bevölkerungszahl für jede der drei Städte?

196. Aachen und Cassel hatten am Ende des 19. Jahrhunderts zusammen 45 000 E. weniger als Stettin und Würzburg zusammen. Die Einwohnerzahlen verhielten sich bei S. und C. wie 2 : 1, bei A. und W. wie 9 : 5, bei C. und W. wie 7 : 5. Wieviel Einwohner hatte jede Stadt?

197. Die Einwohnerzahlen der vier Städte Straßburg, Essen, Augsburg und Potsdam würden, wenn die drei letzten je 1000 E. mehr gehabt hätten, am Ende des 19. Jahrhunderts folgende Verhältnisse aufgewiesen haben: S. : E. = 5 : 4, E. : A. = 4 : 3, E. : P. = 2 : 1. Wieviel Einwohner hatte jede dieser vier Städte, wenn alle vier zusammen 417 000 E. zählten?

198. Am Ende des 19. Jahrhunderts hatten Stettin und Mannheim zusammen soviel Einwohner wie Altona und Charlottenburg zusammen. Die Bevölkerung von Stettin verhielt sich zu der von Mannheim wie 3 : 2; hätten Altona 11 000 E. und Mannheim 20 000 E. weniger, so würden ihre Bevölkerungszahlen sich wie 5 : 4 verhalten, die um 6000 vermehrte Einwohnerzahl von Charlottenburg stand zu der um 10 000 verminderten Einwohnerzahl von

Digitized by Google

Mannheim im Verhältnis 3 : 2. Wieviel Einwohner zählte jede Stadt?

199. Nach Berlin waren am Ende des neunzehnten Jahrhunderts die vier größten Städte in Deutschland Hamburg, München, Leipzig und Breslau. Hätte Hamburg damals 45 000 E., München 1000 E. mehr gezählt, so hätten sich die Einwohnerzahlen von Hamburg und München wie 3 : 2 verhalten. Hätte Leipzig 5000 E. und Breslau 22 000 E. weniger gehabt, so würden ihre Bevölkerungszahlen sich wie 9 : 8 verhalten haben. München zählte damals 44 000 E. mehr als Leipzig, die Bevölkerung aller vier Städte zusammen belief sich auf 2 081 000 Köpfe. Wie verteilte sich diese auf die einzelnen Städte?

200. Nach den fünf genannten Städten waren zu derselben Zeit Dresden, Köln, Frankfurt a. M., Nürnberg und Hannover die größten Städte in Deutschland. Alle fünf zusammen zählten 1 550 000 E., Hannover 26 000 E. weniger als Nürnberg. Hätte Dresden 5000 E. mehr, Köln 4000 E. mehr, Frankfurt 12 000 E. mehr, Nürnberg 11 000 E. weniger, so hätten zwischen den Einwohnerzahlen dieser Städte die folgenden Verhältnisse bestanden: D. : F. = 4 : 3, K. : F. = 5 : 4, K. : N. = 3 : 2. Wie stark war die Einwohnerzahl einer jeden dieser Städte?

---

201. Eine Arbeit soll durch drei Arbeiter ausgeführt werden. A würde sie allein in 10 Tagen, B in 12, C in 15 Tagen fertig schaffen. Wieviel Tage gebrauchen sie, wenn sie alle gemeinschaftlich arbeiten?

202. Ein Wasserbehälter kann durch vier Röhren gefüllt werden, durch die erste allein in 15, durch die zweite allein in 10, durch die dritte allein in $7\frac{1}{2}$, durch die vierte allein in 5 Minuten. In wieviel Minuten wird er voll werden, wenn alle vier Röhren zugleich geöffnet sind?

203. Ein Wasserbehälter hat zwei Zuflußröhren und eine Abflußröhre. Durch die erste allein kann er in 40 Minuten, durch die zweite in 45 Minuten gefüllt, durch die dritte in 30 Minuten geleert werden. In wieviel Minuten wird er voll werden, wenn alle drei Röhren zugleich in Tätigkeit sind?

204. A, B und C sollen eine Arbeit ausführen. A bringt dieselbe allein in 12, B allein in 15, C allein in 20 Tagen fertig. Wieviel Tage müssen sie zur Ausführung der Arbeit gebrauchen, wenn sie gemeinschaftlich arbeiten, B aber während der Zeit $1\frac{1}{2}$ Tage, C drei Tage nicht gearbeitet hat?

205. A, B, C und D sollen gemeinschaftlich einen Graben ziehen. A würde denselben allein in 15, B in 20, C in 24, D in 30 Tagen fertig bringen. Bevor sie jedoch zusammen an die Arbeit

Digitized by Google

gehen, haben A und B schon 1 Tag gearbeitet, und C setzt 4 Tage, D 3 Tage aus. In wieviel Tagen wird der Graben fertig sein?

206. Ein Kaufmann kaufte ein Stück Zeug von 40 *m*, das Meter zu 5 *M*. Er verkaufte dann einen Teil wieder, das Meter zu $6\frac{1}{2}$ *M*. Den Rest mußte er zu $4\frac{1}{2}$ *M* das Meter ablassen. Wie groß war der Rest, wenn er an dem ganzen Stück 20 Pzt. verdient?

• 207. Ein Knabe kaufte Äpfel und gab für je 7 Stück 5 *Pf.* Hätte er die 14 Äpfel noch erhalten, um welche er als Zugabe bat, so wäre ihm das Dutzend 2 *Pf.* billiger geworden. Wieviel Äpfel kaufte er?

---

208. Vor einer zentralen Sonnenfinsternis stand morgens 9 Uhr 27 Min. das Zentrum des Mondes 1^0 13′ hinter dem Zentrum der Sonne. Die Sonne hatte einen scheinbaren Durchmesser von 32′ 1″, der Mond von 31′ 3″. Die Sonne machte in jeder Stunde 2′ 35″, der Mond 33′. 1) Wann standen die Mittelpunkte von Sonne und Mond übereinander (Zeit der zentralen Finsternis)? 2) Wann war der Anfang der Finsternis? 3) Wann war das Ende der Finsternis?

209. Aus einem Orte A geht um 6 Uhr morgens ein Wanderer nach B ab. Um dieselbe Zeit reitet ein Reiter von B ab nach A. Sie treffen einander 10 Minuten nach 7 Uhr in M, eine Meile von A. Wie weit ist es von A nach B, wenn die Geschwindigkeit des Wanderers zu der des Reiters sich wie 2 : 5 verhält?

210. Aus A geht mittags 12 Uhr ein Fußgänger ab nach B. Um dieselbe Zeit reitet ein Reiter von B ab nach A. Der Reiter trifft den Fußgänger um 2 Uhr 15 Minuten in M und gelangt um 3 Uhr in A an. Wie weit ist B von A entfernt, wenn AM = $1\frac{1}{2}$ Meilen ist, und wann wird der Fußgänger in B eintreffen?

211. Aus A geht ein Bote ab nach B. An demselben Tage geht von B ein anderer Bote ab nach A, dessen Geschwindigkeit sich zu der des ersten wie 8 : 5 verhält. Als sie einander um 12 Uhr mittags in M treffen, hat der erste Bote $1\frac{1}{2}$ Meilen mehr gemacht als der zweite. Wie weit ist B von A entfernt, und wann waren die Boten ausgegangen, wenn beide um 5 Uhr nachmittags angelangen?

212. Um 6 Uhr morgens geht ein Schnellzug von Berlin ab nach Magdeburg und macht in jeder Stunde 8 Meilen. Um 7 Uhr geht ein Güterzug von Magdeburg ab nach Berlin und macht in jeder Stunde 4 Meilen. Wo werden sich dieselben treffen, wenn die Entfernung Berlin-Magdeburg 20 Meilen beträgt?

213. Um 6 Uhr morgens geht ein Güterzug von Berlin ab nach Magdeburg und macht in der Stunde 19 *km*. Um 10 Uhr

Digitized by Google

geht ein Kurierzug von Magdeburg ab nach Berlin und macht in jeder Stunde 71 *km*. Wann treffen sie einander, wenn Magdeburg von Berlin 142 *km* entfernt ist?

214. Von Berlin geht um 9 Uhr morgens ein Güterzug ab nach Frankfurt a. O. und macht in jeder Stunde 21 *km*. Um 9 Uhr 42 Minuten geht ein Kurierzug von Berlin ab, ebenfalls nach Frankfurt a. O., holt den Güterzug um 10 Uhr ein und kommt 8 Minuten vor 11 Uhr in Frankfurt an. Wie weit ist Frankfurt von Berlin?

215. Um 9 Uhr morgens geht ein Güterzug von Berlin ab nach Frankfurt a. O., der in der Stunde 24 *km* macht. Um 10 Uhr trifft er mit einem Kurierzug zusammen, der von Frankfurt nach Berlin geht. In Berlin hält dieser Zug $45\frac{1}{2}$ Minuten an, geht dann wieder zurück nach Frankfurt und trifft 10 Minuten vor dem Güterzug in Frankfurt ein. Wie weit ist Frankfurt von Berlin entfernt, wenn der Kurierzug in der Stunde 72 *km* zurücklegt?

216. Ein Rheindampfer, der um 8 Uhr morgens von Koblenz abfährt und um 1 Uhr nachmittags in Köln eintrifft, wird um $11\frac{3}{4}$ Uhr mittags von einem 25 *km* in der Stunde zurücklegenden Schnelldampfer überholt, der Koblenz drei Viertelstunden später verlassen hatte. Welche ungefähre Länge ergibt sich hieraus für die Rheinstrecke Koblenz-Köln und welche Ankunftszeit in Köln für den Schnelldampfer?

216_1. Ein stromauffahrender Rheindampfer, der stündlich 12 *km* zurücklegt, verläßt um 9 Uhr morgens Koblenz, gleichzeitig geht ein stromabfahrender Schnelldampfer von Bingen ab, der jenem Dampfer um 10 Uhr 40 Minuten vormittags begegnet und um $11\frac{1}{2}$ Uhr in Koblenz eintrifft. Wie lang ist die Rheinstrecke Bingen-Koblenz und wann erfolgt die Ankunft des ersten Dampfers in Bingen?

217. Auf der Peripherie eines Kreises bewegen sich zwei Punkte hintereinander her. Das erste Mal treffen sie sich nach 8 Sekunden, das zweite Mal nach 43 Sekunden, vom Anfang der Bewegung an gerechnet. Wie groß ist die Peripherie des Kreises und wie groß war ihre anfängliche Entfernung, wenn der erste Punkt 7 *m*, der zweite 5 *m* in der Sekunde zurücklegt?

218. Wie werden die Resultate der vorigen Aufgabe sein, wenn die Punkte, anstatt in derselben Richtung, sich in entgegengesetzter Richtung bewegen?

219. Die beiden Zeiger einer Uhr stehen um 12 Uhr übereinander. Wann und wie oft stehen sie im Verlauf von 12 Stunden übereinander?

219_1. Wie oft und wann würden die beiden Uhrzeiger übereinander stehen, wenn der eine sich in entgegengesetzter Richtung bewegte, wie der andere?

Digitized by Google

219_2. Bei einer Uhr mit vierundzwanzigstündigem Zifferblatt möge der große Zeiger ebenfalls in einer Stunde das ganze Zifferblatt durchlaufen. Wie oft stehen dann beide Zeiger übereinander?

219_3. Wie oft stehen bei der eben beschriebenen Einrichtung beide Zeiger übereinander, wenn sie sich in entgegengesetzter Richtung drehen?

219_4. Wenn der kleine Zeiger einer gewöhnlichen Uhr auf 8 steht, so steht der große auf 12. Wann und wo wird der letztere den ersteren einholen?

219_5. (219.) Die Zeiger einer Uhr stehen zwischen 1 Uhr und 2 Uhr einmal übereinander, einmal einander gegenüber und machen zweimal einen rechten Winkel miteinander. Wann geschieht das?

220. Zwei Punkte bewegen sich auf der Peripherie eines Kreises hintereinander her. Der erste durchläuft die Peripherie in 15, der zweite in 20 Sekunden. Nach wieviel Sekunden werden sie jedesmal wieder zusammentreffen?

221. Nach wieviel Sekunden werden sich die Punkte nach den Bedingungen der vorigen Aufgabe jedesmal treffen, wenn sie sich in entgegengesetzter Richtung bewegen?

222. Zwei Punkte bewegen sich auf der Peripherie eines Kreises. Der erste macht in der Sekunde 3 *m* mehr als der zweite. Bewegen sie sich hintereinander her, so treffen sie sich jedesmal nach 18 Sekunden; bewegen sie sich in entgegengesetzter Richtung, so treffen sie sich jedesmal nach 6 Sekunden. Wieviel Meter legt jeder in der Sekunde zurück und wie groß ist die Peripherie des Kreises?

223. Der scheinbare Umlauf des Mondes um die Erde währt 27 Tage 7 Stunden 43 Minuten 5 Sekunden, der scheinbare Umlauf der Sonne um die Erde 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten 49 Sekunden. Wie lang ist ein synodischer Monat, d. h. die Zeit zwischen zwei Neumonden oder zwischen zwei gleichen Mondphasen?

223_1. Die Zeit eines Umlaufs der Venus um die Sonne beträgt mehr als $\frac{3}{5}$ und weniger als $\frac{5}{8}$ eines Erdenjahres. Welcher Wert ergibt sich je nach der Verwendung des einen oder des anderen dieser beiden Verhältniswerte für die Zeit zwischen zwei aufeinanderfolgenden oberen Konjunktionen der Venus mit der Sonne?

223_2. Welche Länge findet sich in jedem dieser Fälle für die Morgenstern- und die Abendstern-Periode der Venus?

223_3. In 58 Erdenjahren umkreist der Planet Jupiter die Sonne (ungefähr) 5 mal. Welche Zeit vergeht zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten, zu denen der Jupiter für die Erdbewohner in Opposition zur Sonne steht?

223_4. Auf 63 Marsjahre kommen ungefähr 10 Jupiterjahre.

Digitized by Google

Wieviel Marsjahre müssen zwischen zwei aufeinanderfolgenden Zeitpunkten vergehen, an denen der Jupiter für die etwaigen Marsbewohner mit der Sonne in Opposition steht?

---

224. Ein Stück Blei von 20 *kg* soll mit einem Stück Korkholz verbunden werden, daß die Verbindung gerade im Wasser schwimmt. Wieviel Korkholz muß man nehmen, wenn das spezifische Gewicht des Bleis 11,35, das des Korkholzes 0,24 ist?

225. Ein Stück Eisen von 149 *kg* und ein Stück Tannenholz von 34 *kg* werden miteinander verbunden. Wie groß ist das spezifische Gewicht dieser Verbindung, wenn das des Eisens 7,21, das des Tannenholzes 0,48 beträgt?

226. Eine Legierung von Gold und Kupfer, welche 21 Pfd. wiegt, hat das spezifische Gewicht $12\frac{1}{4}$. Wieviel enthält die Legierung von jedem Metall, wenn das spezifische Gewicht des Goldes $19\frac{1}{4}$, das des Kupfers $8\frac{3}{4}$ beträgt?

227. Ein goldener Schmuck, der in der Luft 275 *g* wog, zeigte im Wasser ein Gewicht von 259 *g*. Wievielhaltig war das Gold des Schmuckes, wenn vorausgesetzt wird, daß dieser nur aus Gold und Kupfer bestand, und Gold und Kupfer die in der voranstehenden Aufgabe angegebenen spezifischen Gewichte haben?

228. Wie schwer muß ein Brett von Tannenholz sein, wenn es, ganz unter Wasser getaucht, noch eine Tragkraft von 52 *kg* haben soll, bei einem spezifischen Gewicht des Tannenholzes von 0,48?

229. Alkohol von 80 Pzt. hat das spezifische Gewicht von 0,8645. Wie groß wird danach das spezifische Gewicht von Branntwein sein, welcher 35 Pzt. Alkohol enthält, vorausgesetzt, daß die Dichtigkeit der Bestandteile bei den verschiedenen Mischungen sich nicht ändert?

230. Die härteste Goldlegierung besteht aus 7 Teilen Gold und 1 Teil Kupfer. Wie groß ist das spezifische Gewicht einer solchen Legierung, wenn das spezifische Gewicht des reinen Goldes 19,26, das des Kupfers 8,79 ist?

231. Chinesisches Silber (Neusilber oder Argentan) besteht aus 26,4 Teilen Kupfer, 36,8 Teilen Zink und 36,8 Teilen Nickel. Wie groß ist das spezifische Gewicht desselben, wenn das spezifische Gewicht von Kupfer 8,79, von Zink 7,19, von Nickel 8,48 ist?

232. Ein Knabe will sich das Schwimmen durch ein Brett von Tannenholz erleichtern, auf das er die Brust legt. Er will den Kopf allein über Wasser haben und dann mit dem Brett ohne Anstrengung schwimmen. Wie schwer muß das Brett sein, wenn sein Kopf 8 Pfd. wiegt, sein ganzer Körper 96 Pfd., das spezifische Gewicht des eingetauchten Teiles seines Körpers 1,04, das des Tannenholzes 0,48 ist?

Digitized by Google

233. Ein allseitig geschlossener Kasten von äußerlich 132 *mm* Länge, 70 *mm* Breite und 64 *mm* Höhe, der überall eine Wandstärke von 2 *mm* aufweist, taucht im Wasser bis zum Rande ein. Welches spezifische Gewicht hat der Stoff, aus dem er gefertigt ist?

234. Ein oben offener Kasten von äußerlich 192 *mm* Länge, 98 *mm* Breite und 50 *mm* Höhe, dessen Wände und Boden überall 1 *mm* stark sind, taucht im Wasser gerade zur Hälfte ein. Welches spezifische Gewicht besitzt der Stoff, aus dem er gefertigt ist?

235. Ein zylindrischer Becher, der bei 1 *cm* Wand- und Bodenstärke äußerlich einen Grundkreisradius von 8 *cm* und eine Höhe von 65 *cm* aufweist, taucht im Wasser 56 *cm* tief ein. Welches spezifische Gewicht hat der Stoff, aus dem er gefertigt ist?

236. Wie tief taucht ein allseitig geschlossener Kasten aus 1 *mm* starkem Zinkblech, der äußerlich 152 *mm* lang, 42 *mm* breit und 40 *mm* hoch ist, in Wasser ein, wenn das spezifische Gewicht des Zinks zu 7 angenommen wird?

237. Ein zylindrischer Becher von 1 *mm* Wandstärke und 5 *mm* Bodenstärke hat äußerlich eine Höhe von 205 *mm* und einen Grundkreisradius von 25 *mm*, er taucht im Wasser 51,7 *mm* tief ein. Wie groß ist das spezifische Gewicht des Stoffes, aus dem er gefertigt ist?

238. Wie tief taucht dieser Becher ein, wenn er selbst bis zu 125 *mm* Höhe mit Wasser gefüllt ist?

239. Ein zylindrisches Gefäß von äußerlich 324, innerlich 320 *mm* Höhe, das einen äußeren Grundkreisradius von 20 und einen inneren von 18 *mm* Länge hat, besteht aus Crownglas vom spezifischen Gewicht 2,5. Bis zu welcher Höhe muß es mit Wasser gefüllt werden, wenn es im Wasser bis zum Rande einsinken soll?

240. Ein Luftballon von 1300 *cbm* Rauminhalt ist mit Leuchtgas gefüllt, der Stoff seiner Hülle wiegt 140 *kg*, die gesamte außerdem zu tragende Last beträgt 590 *kg*. Um wieviel übertrifft der Auftrieb der Luft die gesamte zu tragende Last, wenn das Gewicht von 1 *l* atmosphärischer Luft im Meeresniveau zu 1,3 *g*, das von 1 *l* Leuchtgas zu 0,6 *g* angenommen wird?

241. Berechne die Höhe, bis zu der der Ballon sich erhebt, indem du als deren Meterzahl den Wert $16\,000\,\frac{D-\delta}{D+\delta}$ annimmst, bei dem D und δ die Luftdichtigkeiten am Ausgangsort und in der vom Ballon erreichten Höhe bedeuten.

242. Um wieviel bleibt das Gewicht eines mit Wasserstoffgas gefüllten Ballons von 800 *cbm* Rauminhalt, bei dem der Stoff 100 *kg* wiegt und außerdem 788 *kg* zu tragen sind, unter dem Gewicht der verdrängten Luftmasse, wenn das Gewicht von 1 *cbm* Wasserstoffgas zu 90 *g* angenommen wird?

Digitized by Google

242_1. Berechne unter der in 241. gemachten Annahme die Steighöhe dieses Ballons.

243. Ein Gefäß, das 1200 *ccm* faßt, wurde im lufterfüllten Zustand und nach teilweiser Auspumpung der Luft gewogen. Das Barometer stand auf 750 *mm*, das Manometer an der zur Luftverdünnung benutzten Luftpumpe zeigte nach dem Auspumpen einen Stand von 125 *mm*, beide Wägungen ergaben einen Gewichtsunterschied von 1,277 *g*. Welches Gewichtsverhältnis zwischen Luft und Wasser findet sich hieraus?

244. Der Rezipient einer Luftpumpe hat 350 *ccm* Rauminhalt, die Luftdichtigkeit ist nach 4 Kolbenzügen auf 0,2401 des ursprünglichen Wertes gesunken. Welchen Rauminhalt hat der Stiefel ohne Kolben? Vom schädlichen Raum wird hierbei abgesehen.

245. Nach 3 Kolbenzügen verhält sich die Dichtigkeit der Luft in einer Luftpumpe, die einen Stiefel von 120 *ccm* Rauminhalt (ohne den Platz für den Kolben) besitzt, zu dem ursprünglichen Wert wie 421 875 : 1 000 000. Wie groß ist der Rezipient?

---

246. (233.)*) Aus einem Fasse mit 500 *l* von 80prozentigem Spiritus füllt man 5 *l* aus und ersetzt das Fehlende durch Wasser. Nachdem gehörig gemischt ist, füllt man abermals 5 *l* der Flüssigkeit aus und ersetzt das Fehlende durch Wasser. Wie oft muß die Manipulation wiederholt werden, damit das Faß nur noch 300 *l* reinen Spiritus enthält?

247. (234.) Aus einem Fasse mit 400 *l* von 75prozentigem Spiritus läßt man ähnlich, wie in der vorigen Aufgabe, jedesmal 10 *l* der Flüssigkeit abfließen und ersetzt das Fehlende durch Wasser. Wie oft muß dies Verfahren geschehen, damit die vorhandene Flüssigkeit noch 35 Pzt. Spiritus enthält?

248. (235.) Aus einem Fasse mit 1000 *l* von 90prozentigem Spiritus läßt man ähnlich, wie in den vorigen Aufgaben, jedesmal 20 *l* der Flüssigkeit ab und ersetzt das Fehlende durch Wasser. Dies Verfahren wird 30mal wiederholt. Wieviel Prozent hielt der Spiritus, der schließlich im Fasse war?

249. (236.) Ein Faß enthält 333 *l* von 84prozentigem Spiritus. Man läßt jedesmal eine bestimmte Anzahl von Litern ab und ersetzt das Fehlende durch Wasser. Nach 40maliger Wiederholung dieser Operation waren im Fasse noch 100 *l* von reinem Spiritus. Wieviel Liter wurden jedesmal abgelassen?

---

*) Bei den folgenden Aufgaben sind die Logarithmen zu benutzen.

Digitized by Google

XXI. Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

A. Theorie.

1. Sollen mehrere Unbekannte gesucht werden, so müssen soviel Gleichungen vorhanden sein als Unbekannte, wenn anders die Unbekannten sich vollständig sollen bestimmen lassen. Die Gleichungen müssen voneinander unabhängig sein, d. h. es darf sich keine aus den anderen ableiten lassen; denn eine Gleichung, die man aus den anderen ableiten kann, würde nichts Neues sagen, mithin überflüssig sein. Auch dürfen die Gleichungen selbstverständlich einander nicht widersprechen.

2. Mehrere Gleichungen, durch welche mehrere Unbekannte bestimmt werden sollen, bilden zusammen ein Gleichungssystem. Ihre Zusammengehörigkeit wird durch Klammern oder senkrechte Striche bezeichnet.

Die Lösung eines solchen Gleichungssystems erfolgt dadurch, daß man sie auf die Auflösung einer Gleichung mit einer Unbekannten zurückführt.

3. Hat man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten, so muß man eine Unbekannte eliminieren (herausschaffen). Die sich ergebende Gleichung enthält nur eine Unbekannte; diese läßt sich daher nach dem Früheren bestimmen.

4. Für die Elimination einer Unbekannten hat man verschiedene Methoden (Verfahrungsarten), die Substitutionsmethode (Einsetzungsmethode), die Gleichsetzungsmethode und die Additionsmethode.

5. Bei Anwendung der Substitutionsmethode löst man eine Gleichung nach der einen (eben der zu eliminierenden) Unbekannten auf, worauf man den für sie gefundenen, die andere Unbekannte enthaltenden Größenausdruck in der anderen Gleichung einsetzt (substituiert) und die so entstehende Gleichung nach der einen noch in ihr vorkommenden Unbekannten auflöst. Hat man z. B. die beiden Gleichungen:

$$\left[\begin{array}{l} 5x + 3y = 21 \\ 7x - 8y = 5 \end{array}\right],$$

so folgt aus der ersten Gleichung

$$y = \frac{21 - 5x}{3}.$$

Durch Einsetzung dieses Wertes für y geht die zweite Gleichung über in

$$7x - 8 \cdot \frac{21 - 5x}{3} = 5$$

$$21x - 168 + 40x = 15$$

$$x = \frac{183}{61} = 3$$

$$y = \frac{21 - 5x}{3} = \frac{21 - 15}{3} = 2.$$

Digitized by Google

Die Substitutionsmethode ist die natürlichste, doch macht sich ihre Anwendung in der Praxis meist ungeschickt, weil sie in der Regel auf Brüche führt, besonders umständlich wird ihre Anwendung, wenn mehr als zwei Gleichungen gegeben sind. Sie eignet sich am besten für Aufgaben, bei denen eine Gleichung vom ersten, eine andere von höherem Grade gegeben ist, also für Aufgaben, wie sie bei Auflösung quadratischer Gleichungen mit mehreren Unbekannten vorkommen.

6. Die Gleichsetzungsmethode ist der Theorie nach noch einfacher als die vorige Methode, in der Praxis aber noch umständlicher, besonders bei Gleichungen mit mehr als zwei Unbekannten. Es gibt nur sehr wenige Aufgaben, bei welchen diese Methode am einfachsten zum Ziele führt Bei ihr hat man beide Gleichungen nach derselben Unbekannten aufzulösen und die sich ergebenden Werte einander gleichzusetzen. In der demgemäß gebildeten Gleichung kommt nur noch die andere Unbekannte vor. So hat man bei der bereits in Nr. 5. behandelten Aufgabe entweder:

$$x = \frac{21 - 3y}{5} \text{ und } x = \frac{5 + 8y}{7}, \text{ folglich}$$

$$\frac{21 - 3y}{5} = \frac{5 + 8y}{7} \text{ usw.}$$

Oder

$$y = \frac{21 - 5x}{3} \text{ und } y = \frac{7x - 5}{8}, \text{ folglich}$$

$$\frac{21 - 5x}{3} = \frac{7x - 5}{8} \text{ usw.}$$

Sind mehr als zwei Gleichungen, z. B. drei Gleichungen gegeben, so muß man aus jeder Gleichung dieselbe Unbekannte suchen und durch Gleichsetzung der gefundenen Werte zwei neue Gleichungen bilden, die dann nur zwei Unbekannte enthalten.

7. Am einfachsten und schnellsten zum Ziele führt die Additionsmethode: Bei ihr wird die eine Unbekannte durch Addition (oder Subtraktion) der Gleichungen eliminiert. Das setzt voraus, daß die zu eliminierende Unbekannte in beiden Gleichungen dieselben Koeffizienten besitzt. Ist dies nicht der Fall, so muß man diesen Zustand herbeiführen, indem man die Gleichungen vor der Addition erst mit geeigneten Faktoren multipliziert. Haben dann die Glieder, die die zu eliminierende Unbekannte enthalten, in beiden Gleichungen entgegengesetzte Vorzeichen, so addiert man die Gleichungen; haben diese Glieder gleiche Vorzeichen, so subtrahiert man die eine Gleichung von der anderen. Für die Anwendung dieses Verfahrens ist es meistens nötig, die Gleichungen erst auf die einfachste Form, die Normalform $ax + by = c$ zu bringen. Die aus der Addition (oder Subtraktion) sich ergebende neue Gleichung enthält dann nur eine, die nicht eliminierte Unbekannte, und ist nach dieser aufzulösen. Die Faktoren, mit denen man die einzelnen Gleichungen multipliziert, kann man zweckmäßigerweise neben die Gleichungen schreiben, die Multiplikationen ebenso wie die Addition oder Subtraktion der beiden Gleichungen häufig im Kopfe ausführen

Digitized by Google

Dabei wird man darauf sehen, daß die übrig bleibende Unbekannte möglichst einen positiven Koeffizienten erhält. Für die bereits in 5. und 6. behandelte Aufgabe gestaltet sich demnach die Rechnung, wie nachstehend angegeben. Die erste Reihe der rechts stehenden Faktoren dient zur Elimination von y, die zweite ($+7$ und -5) zur Elimination von x. Das Zeichen — vor dem Faktor 5 deutet an, daß dabei die zweite Gleichung nach der Multiplikation mit 5 von der ersten abzuziehen ist.

$$\begin{array}{rl} \left[\begin{array}{l} 5x+3y=21 \\ 7x-8y=\ \ 5 \end{array}\right] & \begin{array}{l|l} 8 & +7 \\ 3 & -5 \end{array} \\ \hline 61x = 183, \text{ d. h. } x=3 & \\ 61y = 122, \text{ d. h. } y=2. & \end{array}$$

8. Hat man die eine Unbekannte gefunden, so findet man die andere durch Substitution oder ebenfalls nach der Additionsmethode unter Benutzung des Wertes der ersten Unbekannten. In der obigen Gleichung hat man, nachdem $x=3$ gefunden ist, $5\cdot 3+3y=21$, $3y=6$, $y=2$. Oder man hat $x=3$, $5x=15$; dies von der ersten Gleichung subtrahiert gibt $3y=6$, $y=2$. — Man eliminiert stets die Unbekannte, welche, abgesehen von dem etwa gemeinschaftlichen Faktor, die kleinsten Koeffizienten hat.

9. Hat man die sehr oft vorkommenden Gleichungen

$$\left[\begin{array}{l} x+y=a \\ x-y=b \end{array}\right],$$

so folgt aus der Addition und Subtraktion der Gleichungen und durch Division mit 2 sofort

$$x=\frac{a+b}{2}, \quad y=\frac{a-b}{2}.$$

10. Beachtung verdient ferner der Fall, in dem die Koeffizienten von x und y in der zweiten Gleichung den Koeffizienten von y und x in der ersten Gleichung bezw. gleich sind. Dann ergeben sich aus der Addition und Subtraktion der Gleichungen die Werte für $x+y$ und $x-y$. So folgt aus

$$\left[\begin{array}{l} 19x+13y=83 \\ 13x+19y=77 \end{array}\right]$$

auf dem angegebenen Wege $32\,(x+y)=160$, $6\,(x-y)=6$, d. h. $x+y=5$, $x-y=1$ usw.

11. Wie sich hier aus der Addition und Subtraktion der Gleichungen die Summe und die Differenz der Unbekannten ergaben, so läßt sich aus der Kombination der Gleichungen oft entweder die Summe oder die Differenz der Unbekannten finden. Dadurch wird eine Auflösung, die sonst Mühe macht, wesentlich vereinfacht. So hat man aus

$$\left[\begin{array}{l} 93x+71y=350 \\ 90x+74y=344 \end{array}\right]$$

Digitized by Google

durch Subtraktion $3(x-y)=6$, d. h. $x-y=2$, $71x-71y=142$, $164x=492$, $x=3$ usw.

12. Um die Additionsmethode anzuwenden, muß man die Gleichungen stets auf die Form $ax+by=c$, bei der a, b und c ganze Zahlen sind, bringen, wenn sie diese Form nicht schon haben. In der Gleichung müssen daher alle Brüche, alle Klammern und alle Irrationalitäten fortgeschaft werden, falls sie vorkommen. Die Gleichung $ax+by=c$ heißt die **Normalform** einer Gleichung des ersten Grades mit zwei Unbekannten.

13. Sind drei Gleichungen mit drei Unbekannten gegeben, und es gibt unter ihnen eine, welche nur zwei Unbekannte enthält, so hat man aus den beiden anderen Gleichungen die dritte Unbekannte zu eliminieren. So findet man zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten und kann sie nach einer der angegebenen Methoden auflösen. Kommen jedoch in jeder der drei Gleichungen alle drei Unbekannten vor, so muß man zweimal zwei Gleichungen kombinieren und aus den zwei Paaren jedesmal dieselbe Unbekannte eliminieren. **Man wird zweckmäßig diejenige Unbekannte eliminieren, welche die kleinsten Koeffizienten hat.** Alle drei Gleichungen sind auch hier, bevor man an die eigentliche Auflösung geht, auf die Normalform $ax+by+cz=d$ zu bringen, wo a, b, c, d ganze Zahlen sind. Die betreffenden Faktoren sind auch hier neben die Gleichungen zu setzen und die Multiplikation und die Addition (oder Subtraktion) aus dem Kopfe zu machen. Zur Erläuterung des Verfahrens dient das folgende Beispiel:

$$\begin{array}{l|l}
\left[\begin{array}{l} 6x-3y+2z=11 \\ 5x+7y-3z=19 \\ 7x-5y+4z=15 \end{array}\right] & \begin{array}{r|l} 3 & +2 \\ 2 & \\ & -1 \end{array} \\
\hline
28x+5y \qquad\quad =71 & 1 \\
5x-y \qquad\quad =7 & 5 \\
\hline
53x \qquad\qquad\quad =106, & \text{d. h. } x=2 \\
 & \phantom{\text{d. h. }} y=3 \\
 & \phantom{\text{d. h. }} z=4.
\end{array}$$

Die zweite Unbekannte ist gefunden mit Hilfe der Gleichung $5x-y=7$, die dritte Unbekannte mit Hilfe einer der gegebenen Gleichungen.

14. Hat man allgemein n Gleichungen mit n Unbekannten, so bildet man sich aus diesen ein System von $(n-1)$ Gleichungen mit $(n-1)$ Unbekannten, aus diesem eines von $(n-2)$ Gleichungen mit $(n-2)$ Unbekannten usf., bis man zu einer Gleichung mit einer Unbekannten gelangt. Diese löst man auf, die Werte der übrigen Unbekannten findet man durch schrittweise Substitution.

15. Hat man für drei Unbekannte nur zwei Gleichungen, in denen die bekannten Glieder rechts den Wert Null haben, so läßt sich aus ihnen nur das Verhältnis der Unbekannten bestimmen. So folgt aus den beiden Gleichungen

Digitized by Google

$$\begin{array}{l} \left[\begin{array}{l} a_1x + b_1y + c_1z = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2z = 0 \end{array}\right] \cdot \begin{array}{l} + b_2 \\ - b_1 \end{array} \Big| \begin{array}{l} - a_2 \\ + a_1 \end{array} \\ \hline \left[\begin{array}{l} (a_1b_2 - a_2b_1)x + (b_2c_1 - b_1c_2)z = 0 \\ (a_1b_2 - a_2b_1)y + (a_1c_2 - a_2c_1)z = 0 \end{array}\right], \text{ d. h.} \end{array}$$

$$x : y : z = c_1b_2 - b_1c_2 : a_1c_2 - a_2c_1 : a_1b_2 - a_2b_1.$$

Stellt also t eine Größe von beliebigem Wert vor, so muß

$$x = (c_1b_2 - b_1c_2)t; \quad y = (a_1c_2 - a_2c_1)t; \quad z = (a_1b_2 - a_2b_1)t$$

sein.

16. Hier kann man die Werte für x, y, z leicht auseinander ableiten, indem man in den beiden Größengruppen $a_1b_1c_1$ und $a_2b_2c_2$ immer um einen Schritt weitergeht, also für a den Wert und gleichzeitig für b den Buchstaben c, für c wieder a setzt.

Man nennt dies die zyklische Vertauschung dieser Größen, der Name rührt daher, daß man sie sich auf einem Kreise (Zyklus) angeordnet denken kann, wobei sich die angegebene Vertauschung von selbst findet.

Diese zyklische Vertauschung ist häufig schon von vornherein bei den gegebenen Gleichungen möglich; dies gilt z. B. von dem Gleichungssystem

$$\left|\begin{array}{l} x + 2y + 5z = a \\ y + 2z + 5x = b \\ z + 2x + 5y = c \end{array}\right|,$$

bei dem jede Gleichung in die folgende, die letzte in die erste übergeht, wenn man in den Größengruppen abc und xyz gleichzeitig um einen Schritt weitergeht, also b statt a, c statt b, a statt c, y statt x, z statt y, x statt z setzt. Hat man hier den Wert einer Unbekannten, z. B. x gefunden, so finden sich aus ihm die Werte von y und z ohne weiteres durch zyklische Vertauschung.

B. Aufgaben.

1. $\left|\begin{array}{l} x + y = 327\,[764] \\ x - y = 273\,[346] \end{array}\right|$

2. $\left|\begin{array}{l} x + y = a[3a + b] \\ x - y = b[a + 3b] \end{array}\right|$

3. $\left|\begin{array}{l} x + y = 8(a - b) \\ x - y = 2(a + b) \end{array}\right|$

4. $\left|\begin{array}{l} x + y = 5(a + b) \\ x - y = a - b \end{array}\right|$

5. $\left|\begin{array}{l} x + y = a^2 - b^2 \\ x - y = (a - b)^2 \end{array}\right|$

6. $\left|\begin{array}{l} x + y = 2(a^2 + b^2) \\ x - y = 2ab \end{array}\right|$

7. $\left|\begin{array}{l} x + y = 2(a^2 + b^2) \\ x - y = 4ab \end{array}\right|$

8. $\left|\begin{array}{l} x + y = 2a(a^2 + 3b^2) \\ x - y = 2b(3a^2 + b^2) \end{array}\right|$

9. $\left|\begin{array}{l} x + 3y = 20 \\ x - 5y = 12 \end{array}\right|$

10. $\left|\begin{array}{l} 5x + y = 40 \\ 3x + y = 26 \end{array}\right|$

Digitized by Google

11. $\left|\begin{array}{l} 3x - 2y = 9 \\ 3x + 7y = 36 \end{array}\right|$

12. $\left|\begin{array}{l} 7x + y = 32 \\ 5x - y = 16 \end{array}\right|$

13. $\left|\begin{array}{l} 8x + 5y = 63 \\ 7x - 5y = 27 \end{array}\right|$

14. $\left|\begin{array}{l} 3x + 7y = 60 \\ x + 9y = 40 \end{array}\right|$

15. $\left|\begin{array}{l} 9x - 2y = 31 \\ 7x + 6y = 77 \end{array}\right|$

16. $\left|\begin{array}{l} 12x - y = 149 \\ 3x + 5y = 74 \end{array}\right|$

17. $\left|\begin{array}{l} 21x - 11y = 52 \\ 7x + 5y = 26 \end{array}\right|$

18. $\left|\begin{array}{l} 15x - 14y = 50 \\ 5x - 2y = 30 \end{array}\right|$

19. $\left|\begin{array}{l} 3x - 2y = 11 \\ 2x + 3y = 16 \end{array}\right|$

20. $\left|\begin{array}{l} 5x - 7y = 2 \\ 7x - 9y = 10 \end{array}\right|$

21. $\left|\begin{array}{l} 8x - 3y = 100 \\ 7x + 4y = 167 \end{array}\right|$

22. $\left|\begin{array}{l} 2x + 13y = 64 \\ 3x - 11y = 35 \end{array}\right|$

23. $\left|\begin{array}{l} 12x - 7y = 28 \\ 8x + 5y = 96 \end{array}\right|$

24. $\left|\begin{array}{l} 10x - 9y = 12 \\ 25x - 12y = 51 \end{array}\right|$

25. $\left|\begin{array}{l} 28x + 39y = 95 \\ 21x - 26y = 16 \end{array}\right|$

26. $\left|\begin{array}{l} 17x - 15y = 1 \\ 13x - 10y = 14 \end{array}\right|$

27. $\left|\begin{array}{l} 5x + 8y = 47 \\ 4x - 3y = 0 \end{array}\right|$

28. $\left|\begin{array}{l} 7x - 8y = 0 \\ 8x - 9y = 2 \end{array}\right|$

29. $\left|\begin{array}{l} x = 3y \\ 8x - 7y = 85 \end{array}\right|$

30. $\left|\begin{array}{l} 9x - 4y = 99 \\ x = \frac{5}{3}y \end{array}\right|$

31. $\left|\begin{array}{l} 15x - 16y = 24 \\ 3x = 4y \end{array}\right|$

32. $\left|\begin{array}{l} 5x = 7y \\ 11x - 14y = 21 \end{array}\right|$

33. $\left|\begin{array}{l} 7x - 9y + 6 = 0 \\ 11x - 12y - 12 = 0 \end{array}\right|$

34. $\left|\begin{array}{l} 9x + 13y - 75 = 0 \\ 12x - 41y + 75 = 0 \end{array}\right|$

35. $\left|\begin{array}{l} 7x - 5y = 15 \\ 7y - 5x = 3 \end{array}\right|$

36. $\left|\begin{array}{l} 8x - 3y = 18 \\ 8y - 2x = 7 \end{array}\right|$

37. $\left|\begin{array}{l} 2x - 3y = 3a + 7b \\ 3x - 2y = 7a + 3b \end{array}\right|$

38. $\left|\begin{array}{l} 5x + 3y = 9a - b \\ 3x + 5y = 9b - a \end{array}\right|$

39. $\left|\begin{array}{l} 2x + 3y = 5a - b \\ 3x + 2y = 5a + b \end{array}\right|$

40. $\left|\begin{array}{l} 3x - y = 2(a + b)^2 \\ 3y - x = 2(a - b)^2 \end{array}\right|$

41. $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \\ x - y = (a - b)^2 \end{array}\right|$

42. $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \\ x - y = a^2 - b^2 \end{array}\right|$

43. $\left|\begin{array}{l} (a - b)x + (a + b)y = 2a \\ (a - b)x - (a + b)y = 2b \end{array}\right|$

Digitized by Google

44. $\left|\begin{array}{l}(a+b)x+(a-b)y=2(a^2+b^2)\\(a+b)x-(a-b)y=4ab\end{array}\right|$

45. $\left|\begin{array}{l}(a+b)x+(a-b)y=2a^3\\(a+b)x-(a-b)y=2b^3\end{array}\right|$

46. $\left|\begin{array}{l}x=3y-2\\x=5y-12\end{array}\right|$

47. $\left|\begin{array}{l}y=3x-17\\y=2x-10\end{array}\right|$

48. $\left|\begin{array}{l}x=2y-3\\y=2x-15\end{array}\right|$

49. $\left|\begin{array}{l}x=3y-7\\y=3x-19\end{array}\right|$

50. $\left|\begin{array}{l}2x=3y+1\\3x=7y-6\end{array}\right|$

51. $\left|\begin{array}{l}5y=2x+1\\8y=5x-11\end{array}\right|$

52. $\left|\begin{array}{l}5x=8y-11\\6y=7x-21\end{array}\right|$

53. $\left|\begin{array}{l}7x-3=5y\\7y-3=8x\end{array}\right|$

54. $\left|\begin{array}{l}x=6-y\\y=3x-4\end{array}\right|$

55. $\left|\begin{array}{l}x=91-5y\\y=5x-91\end{array}\right|$

56. $\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}y=7\\2x+3y=43\end{array}\right|$

57. $\left|\begin{array}{l}\frac{1}{3}x-\frac{1}{2}y-2\\2x+3y=60\end{array}\right|$

58 $\left|\begin{array}{l}1\frac{1}{2}x=7y-38\\1\frac{1}{2}y=7x-72\end{array}\right|$

59. $\left|\begin{array}{l}3\frac{1}{3}x=8y\\2\frac{1}{2}x=3(y+5)\end{array}\right|$

60. $\left|\begin{array}{l}2\frac{1}{2}x-3\frac{1}{3}y=10\\7\frac{1}{3}x-5\frac{1}{2}y=55\end{array}\right|$

61. $\left|\begin{array}{l}\frac{1}{3}x=\frac{1}{2}y-2\\\frac{1}{7}x=\frac{1}{3}y-3\end{array}\right|$

62. $\left|\begin{array}{l}\frac{1}{6}x=\frac{1}{3}y-1\\\frac{1}{5}y=\frac{1}{4}x-2\end{array}\right|$

63. $\left|\begin{array}{l}5\frac{1}{4}x-9\frac{1}{3}y=21\\5\frac{3}{5}x-4\frac{2}{3}y=70\end{array}\right|$

64. $\left|\begin{array}{l}5x=7y-0{,}1\\7x=9y+1{,}7\end{array}\right|$

65. $\left|\begin{array}{l}7x-3y=4\\7y-3x=0{,}4\end{array}\right|$

66. $\left|\begin{array}{l}1{,}2x+3{,}5y=0{,}827\\2{,}8x-1{,}5y=0{,}673\end{array}\right|$

67. $\left|\begin{array}{l}3{,}2x-2{,}4y=0{,}544\\2{,}4x-2{,}1y=0{,}312\end{array}\right|$

68. $\left|\begin{array}{l}4x-1{,}9y=1\\8x-3{,}9y=1\end{array}\right|$

69. $\left|\begin{array}{l}8{,}2x-5y=1\\3y-4{,}6x=1\end{array}\right|$

70. $\left|\begin{array}{l}ax+by=a^2+2ab-b^2\\ay-bx=a^2-2ab-b^2\end{array}\right|$

71. $\left|\begin{array}{l}ax-by=a^2+b^2\\ay+bx=a^2+b^2\end{array}\right|$

72. $\left|\begin{array}{l}bx+ay=a+b\\b^2x-a^2y=0\end{array}\right|$

73. $\left|\begin{array}{l}bx+ay=2a\\b(x-1)-a(y-1)=a+b\end{array}\right|$

74. $\left|\begin{array}{l}ax+by=c\\mx-ny=0\end{array}\right|$

75. $\left|\begin{array}{l}ax+by=0\\a_1x+b_1y=0\end{array}\right|$

Digitized by Google

76. $\left|\begin{array}{l} \frac{x+y}{x-y} = \frac{a+b}{a-b} \\ 3x-2y = 3a-2b \end{array}\right|$

77. $\left|\begin{array}{l} \frac{x+y}{x-y} = \frac{5(a+b)}{a-b} \\ 3x-2y = 5a \end{array}\right|$

78. $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{2} \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y} = \frac{1}{6} \end{array}\right|$

79. $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = 7 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y} = 5 \end{array}\right|$

80. $\left|\begin{array}{l} \frac{3}{x}+\frac{5}{y} = 2 \\ \frac{9}{x}-\frac{10}{y} = 1 \end{array}\right|$

81. $\left|\begin{array}{l} \frac{5}{x}-\frac{3}{y} = \frac{1}{20} \\ \frac{4}{x}+\frac{5}{y} = \frac{8}{15} \end{array}\right|$

82. $\left|\begin{array}{l} 7x-\frac{3}{y} = 16 \\ 3x-\frac{2}{y} = 4 \end{array}\right|$

83. $\left|\begin{array}{l} \frac{4}{x}-3y = 8 \\ \frac{5}{x}-6y = 1 \end{array}\right|$

84. $\left|\begin{array}{l} \frac{8,4}{x}-\frac{4,5}{y} = 3 \\ \frac{4,9}{x}-\frac{2,5}{y} = 2 \end{array}\right|$

85. $\left|\begin{array}{l} \frac{4x}{0,7}-\frac{4,5}{y} = 17 \\ \frac{2x}{0,5}-\frac{7,5}{y} = 9 \end{array}\right|$

86. $\left|\begin{array}{l} 5(x-2)-3(y-1) = 0 \\ 2(x-2)+7(y-1) = 0 \end{array}\right|$

87. $\left|\begin{array}{l} 7(x-3)-5(y-1) = 6(x-y) \\ 7(x-2)+3(y+2) = 5(x+y) \end{array}\right|$

88. $\left|\begin{array}{l} 5(2x-3y)-3(3x-2y)+22 = 0 \\ 3(5x-2y)-5(2x-5y)-82 = 0 \end{array}\right|$

89. $\left|\begin{array}{l} (2x-3y):(3x-4y) = 3:5 \\ (x-2):(y+2) = 1:3 \end{array}\right|$

90. $\left|\begin{array}{l} (x+2):(y-1) = 3:1 \\ (3x+4):(y+1) = 4:1 \end{array}\right|$

91. $(x+y):(x+1):(9-y) = 3:2:1$

92. $(3x-7):(y+7):(x-y) = 5:3:1$

93. $(x+1):(5y-3):(x+y+4) = 3:4:5$

94. $\left|\begin{array}{l} (2x+3y-2):(5x-2y+9) = 2:3 \\ (x+4y-1):(5x+4y-7) = 2:4 \end{array}\right|$

95. $\left|\begin{array}{l} (5x-3y+8):(7x-4y+3) = 4:5 \\ (6x-5y+32):(8x-3y-5) = 5:6 \end{array}\right|$

96. $\left|\begin{array}{l} (x-6)(y-3) = (x-4)(y-4) \\ (x-10)(y-1) = (x-9)(y-3) \end{array}\right|$

Digitized by Google

97. $\left|\begin{array}{l}(2x-7)\ (3y-16)=2(3x-13)(y-5)\\(3x-17)(4y-17)=(4x-29)(3y-8)\end{array}\right|$

98. $\left|\begin{array}{l}\frac{x}{y}=\frac{5}{6}\\\frac{6x+1}{4y+5}=\frac{13}{11}\end{array}\right|$

99. $\left|\begin{array}{l}\frac{x+y}{x-y}=\frac{7}{3}\\\frac{x+1}{y+1}=\frac{12}{5}\end{array}\right|$

100. $\left|\begin{array}{l}\frac{3}{3y-x}=\frac{7}{3x-y}\\\frac{9}{4x-3}=\frac{5}{4y-3}\end{array}\right|$

101. $\left|\begin{array}{l}\frac{1}{2x-3y}=\frac{9}{3x-2y}\\\frac{1}{2x-9}=\frac{9}{4y-3}\end{array}\right|$

102. $\left|\begin{array}{l}\frac{3x+2}{5}=\frac{5y+4}{6}\\\frac{5y-2x}{4}=\frac{5x-2y}{11}\end{array}\right|$

103. $\left|\begin{array}{l}\frac{3x-1}{5}=\frac{5y+1}{4}\\\frac{7x-9y}{22}=\frac{8y-3x}{3}\end{array}\right|$

104. $\left|\begin{array}{l}\frac{2x-1}{2y+1}=1\\x+y=15\end{array}\right|$

105. $\left|\begin{array}{l}\frac{3x-7}{3y+4}=\frac{4}{5}\\x-y=2\end{array}\right|$

106. $\left|\begin{array}{l}\frac{3x-2y}{3x-y}=\frac{5}{8}\\x+y=20\end{array}\right|$

107. $\left|\begin{array}{l}\frac{3x-4y}{3y-2x}=2\\3x+10y=100\end{array}\right|$

108. $\left|\begin{array}{l}\frac{3x+4}{3y+5}=2\\\frac{4x+3}{3y+2}=3\end{array}\right|$

109. $\left|\begin{array}{l}\frac{5x-7y}{y-5}=3\\\frac{3x+2y}{x-8}=11\end{array}\right|$

110. $\left|\begin{array}{l}\frac{2x+3y-5}{3x-5y+7}=3\\\frac{4x-5y+5}{5x-7y+4}=2\end{array}\right|$

111. $\left|\begin{array}{l}\frac{5x-7y-1}{7x-5y+8}=0\\\frac{3x-4y+3}{4x-5y+2}=1\end{array}\right|$

112. $\left|\begin{array}{l}\frac{3}{4}(x-1)+\frac{5}{3}(y-2)=34\\\frac{5}{3}(x+2)-\frac{3}{5}(y+3)=13\end{array}\right|$

113. $\left|\begin{array}{l}\frac{2}{3}(x+1)-\frac{3}{4}(y+1)=1\\\frac{3}{4}(x+5)-\frac{5}{6}(y+5)=1\end{array}\right|$

114. $\left|\begin{array}{l}\frac{x-7}{3}+\frac{y-5}{2}=7\\\frac{x-7}{2}+\frac{y-5}{3}=8\end{array}\right|$

115. $\left|\begin{array}{l}\frac{2x+7y}{4}-\frac{x+7}{6}=4\\\frac{2x+7y}{6}-\frac{x+7}{3}=0\end{array}\right|$

116. $\left|\begin{array}{l}\frac{2x+1}{5}-\frac{3y+2}{7}=2y-x\\\frac{3x-1}{4}+\frac{7y+2}{6}=2x-y\end{array}\right|$

Digitized by Google

117. $\left|\begin{array}{l} \frac{3x-4}{2}+\frac{4y-1}{5}=x+y \\ \frac{5x-9}{7}-\frac{y-2}{2}=x-y \end{array}\right|$

118. $\left|\begin{array}{l} \frac{5x-3}{2}-\frac{5y+6}{3}=x-1 \\ \frac{5x-4}{3}-\frac{3y+1}{2}=y-1 \end{array}\right|$

119. $\left|\begin{array}{l} \frac{3x-4}{5}+\frac{4y-5}{3}=3(x-y) \\ \frac{5x+2}{3}-\frac{7y-3}{4}=2(x-y) \end{array}\right|$

120. $\left|\begin{array}{l} \frac{3x+7y+1}{5}-\frac{2x-3y+8}{3}=2 \\ \frac{5x-7y+10}{3}-\frac{3x+2y+6}{5}=2 \end{array}\right|$

121. $\left|\begin{array}{l} \frac{5x+7y+2}{3}-\frac{3x+4y+7}{4}=x \\ \frac{7x+3y+4}{4}-\frac{6x+5y+7}{5}=y \end{array}\right|$

122. $\left|\begin{array}{l} \frac{4x-3y+19}{4}-\frac{x-2y+9}{6}=x \\ \frac{5x-4y+21}{6}-\frac{3x-2y-2}{9}=y \end{array}\right|$

123. $\left|\begin{array}{l} 2x+3y=xy \\ 10x-9y=xy \end{array}\right|$ *)

124. $\left|\begin{array}{l} 10x-3y=2xy \\ 7y-6x=4xy \end{array}\right|$

125. $\left|\begin{array}{l} (x-2)(y-4)=8(3x-4y+1) \\ (x-7)(y+1)=13y-6x-7 \end{array}\right|$

126. $\left|\begin{array}{l} (x+5)(y-3)=3(4x-3y-5) \\ (x+2)(y-1)=2(2x+y-1) \end{array}\right|$

127. $\left|\begin{array}{l} (3x-4)(4y-3)=6(2x-1)(y-2) \\ (2x-3)(3y-5)=(8x-15)(1\frac{2}{3}y-1) \end{array}\right|$

128. $\left|\begin{array}{l} \frac{3}{x-4}+\frac{4}{y-1}=3 \\ \frac{9}{x-4}-\frac{2}{y-1}=2 \end{array}\right|$

129. $\left|\begin{array}{l} \frac{3}{2x-3y}+\frac{5}{y-2}=8 \\ \frac{7}{2x-3y}+\frac{3}{y-2}=10 \end{array}\right|$

*) Man dividiere die Gleichungen durch xy und suche $\frac{1}{x}$ und $\frac{1}{y}$. Oder man suche unbekümmert um das Produkt xy in gewöhnlicher Weise x und y, dadurch kommt man auf $16x = 4xy$, d. h. $y = 4$ usw. Genau genommen sind die Gleichungen quadratisch; denn auch $x = 0$ und $y = 0$ genügen. Die Gleichung $16x = 4xy$ gibt genauer 1) $x = 0$, 2) $y = 4$. Eliminiert man eine Unbekannte, so erhält man für die andere eine quadratische Gleichung.

Digitized by Google

130. $\left|\begin{array}{l} \frac{3x-2}{x-4} - \frac{y+8}{y-2} = 2 \\ \frac{x+1}{x-3} + \frac{y-7}{y+1} = 2 \end{array}\right|$

131. $\left|\begin{array}{l} \frac{2x+1}{x-4} - \frac{y+2}{y-1} = 1 \\ \frac{3x-1}{x-3} - \frac{2y+8}{y+1} = 1 \end{array}\right|$

132. $\left|\begin{array}{l} x + y = 9 \\ x^2 - y^2 = 45 \end{array}\right|$

133. $\left|\begin{array}{l} x - y = 4 \\ x^2 - y^2 = 56 \end{array}\right|$

134. $\left|\begin{array}{l} x + y = a \\ x^2 - y^2 = ab \end{array}\right|$

135. $\left|\begin{array}{l} x^2 - y^2 = 2ab + b^2 \\ x - y = b \end{array}\right|$

136. $\left|\begin{array}{l} 3x - 2y = 1 \\ 3x^2 + xy - 2y^2 = 7 \end{array}\right|$

137. $\left|\begin{array}{l} 4x - 5y = 5 \\ 12x^2 + xy - 20y^2 = 135 \end{array}\right|$

138. $\left|\begin{array}{l} ax + by = 2a \\ \frac{x}{b} - \frac{y}{a} = \frac{2}{a} \end{array}\right|$

139. $\left|\begin{array}{l} ax + by = a^2 + b^2 \\ \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} = 2 \end{array}\right|$

140. $\left|\begin{array}{l} (a+b)\,x - (a-b)\,y = 4ab \\ (a-b)\,x - (a+b)\,y = 0 \end{array}\right|$

141. $\left|\begin{array}{l} (a+b)\,x + (a-b)\,y = 2\,(a^2+b^2) \\ (a-b)\,x + (a+b)\,y = 2\,(a^2-b^2) \end{array}\right|$

142. $\left|\begin{array}{l} (a^2-b^2)\,(x+y) = 2\,(a^2+b^2) \\ (a-b)\,x + (a+b)\,y = 2a \end{array}\right|$

143. $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{a+b} + \frac{y}{a-b} = 2a \\ \frac{x}{a-b} - \frac{y}{a+b} = 2b \end{array}\right|$

144. $\left|\begin{array}{l} \frac{ax}{a+b} + \frac{by}{a-b} = a^2 + b^2 \\ \frac{x}{a-b} + \frac{y}{a+b} = 2a \end{array}\right|$

145. $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{a+b} + \frac{a-b}{y} = 2 \\ \frac{x}{a-b} - \frac{a+b}{y} = 0 \end{array}\right|$

146. $\left|\begin{array}{l} \frac{a}{x} - (a-b)\,y = a \\ \frac{ab}{y} - (a^2-b^2)\,x = 0 \end{array}\right|$

147. $\left|\begin{array}{l} \frac{ax}{a^2-b^2} - \frac{b}{y} = 1 \\ \frac{a}{y} - \frac{bx}{a^2-b^2} = 1 \end{array}\right|$

148. $\left|\begin{array}{l} \frac{x+1}{y+1} = \frac{a+1}{b+1} \\ \frac{x+m}{y+n} = \frac{a+m}{b+n} \end{array}\right|$

149. $\left|\begin{array}{l} \frac{bx-ay}{a+b} = \frac{x-a}{b} + \frac{y-b}{a} \\ \frac{x-b}{a-b} - \frac{y+a}{a+b} = 0 \end{array}\right|$

150. $\left|\begin{array}{l} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 2a \\ \sqrt{x} - \sqrt{y} = 2b \end{array}\right|$

151. $\left|\begin{array}{l} \sqrt{x+y} + \sqrt{x} = 2a \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x} = 2b \end{array}\right|$

152. $\left|\begin{array}{l} \sqrt{x+y} + \sqrt{x-y} = a \\ \sqrt{x+y} - \sqrt{x-y} = b \end{array}\right|$

153. $\left|\begin{array}{l} \sqrt{x-7} + \sqrt{y-1} = 5 \\ \sqrt{x-7} - \sqrt{y-1} = 1 \end{array}\right|$

Digitized by Google

154. $\left|\begin{array}{l} 3\sqrt{x}-4\sqrt{y}=9 \\ \sqrt{x}-\sqrt{y}=4 \end{array}\right|$

155. $\left|\begin{array}{l} 7\sqrt{x}-5\sqrt{y}=11 \\ 6\sqrt{x}+11\sqrt{y}=40 \end{array}\right|$

156. $\left|\begin{array}{l} \sqrt{x}+\sqrt{y}=2a \\ a\sqrt{x}+b\sqrt{y}=a^2+b^2 \end{array}\right|$

157. $\left|\begin{array}{l} \sqrt{x}+\sqrt{y}=a+b \\ a\sqrt{x}-b\sqrt{y}=2(a^2-b^2) \end{array}\right|$

158. $\left|\begin{array}{l} \frac{6}{\sqrt{x}}-\frac{5}{\sqrt{y}}=1 \\ \frac{3}{\sqrt{x}}+\frac{10}{\sqrt{y}}=3 \end{array}\right|$

159. $\left|\begin{array}{l} \frac{5}{\sqrt{x}}+\frac{9}{\sqrt{y}}=5\frac{1}{2} \\ \frac{4}{\sqrt{x}}-\frac{3}{\sqrt{y}}=1 \end{array}\right|$

160. $\left|\begin{array}{l} 3\sqrt{x+5}-7\sqrt{y-8}=5 \\ 2\sqrt{x+5}-5\sqrt{y-8}=3 \end{array}\right|$

161. $\left|\begin{array}{l} 3\sqrt{x+2}-5\sqrt{x-y}=4 \\ 2\sqrt{x+2}-3\sqrt{x-y}=3 \end{array}\right|$

162. $\left|\begin{array}{l} \frac{5}{\sqrt{x-y}}-\frac{6}{\sqrt{x+y}}=3 \\ \frac{2}{\sqrt{x-y}}-\frac{3}{\sqrt{x+y}}=1 \end{array}\right|$

163. $\left|\begin{array}{l} 3\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+2\sqrt{x-y}=10 \\ 2\sqrt{\frac{x+y}{x-y}}+3\sqrt{x-y}=10 \end{array}\right|$

164. $\left|\begin{array}{l} \sqrt{x+2}+\sqrt{y-1}=5 \\ x-y=2 \end{array}\right|$

165. $\left|\begin{array}{l} \sqrt{x-4}+\sqrt{y-9}=4 \\ x+y=21 \end{array}\right|$

166. $\left|\begin{array}{l} \sqrt{4x+3y}-\sqrt{y+6}=2 \\ 2x+y=11 \end{array}\right|$

167. $\left|\begin{array}{l} \sqrt{5x+1}-\sqrt{3x+y}=1 \\ 2x-y=10 \end{array}\right|$

168. $\left|\begin{array}{l} \sqrt{a-x}+\sqrt{b-y}=2 \\ x-y=a-b \end{array}\right|$

169. $\left|\begin{array}{l} \sqrt{5a-x}-\sqrt{x-y}=\sqrt{a} \\ 2x-y=2a \end{array}\right|$

170. $\left|\begin{array}{l} \sqrt{7+x}-\sqrt{y-2}=\sqrt{y+1} \\ \sqrt{3-x}+\sqrt{y-2}=\sqrt{y+1} \end{array}\right|$

171. $\left|\begin{array}{l} 3\sqrt{5-x}+6\sqrt{y-4}=5\sqrt{y+1} \\ 5\sqrt{5-x}+2\sqrt{y-4}=3\sqrt{y+1} \end{array}\right|$

Eliminiere aus folgenden Paaren von Gleichungen die Unbekannte x, und suche die Gleichung für y.

172. $\left|\begin{array}{l} 2x^2+x-3=0 \\ x^2-x+1=y \end{array}\right|$

172_1. $\left|\begin{array}{l} 3x^2+x-2=0 \\ x^2+x+1=y \end{array}\right|$

173. Beweise: Hat man für x die beiden Gleichungen

$$\left|\begin{array}{l} a_1x^2+b_1x+c_1=0 \\ a_2x^2+b_2x+c_2=0 \end{array}\right|,$$

so muß, wenn beide sich nicht widersprechen sollen,

$$(a_1b_2-a_2b_1)(b_1c_2-b_2c_1)=(a_1c_2-a_2c_1)^2$$

sein.

Digitized by Google

174. $\left|\begin{array}{l} x+y=28 \\ x+z=30 \\ y+z=32 \end{array}\right| \left|\begin{array}{l} 64 \\ 54 \\ 44 \end{array}\right| \left|\begin{array}{l} 97 \\ 88 \\ 79 \end{array}\right|$

175. $\left|\begin{array}{l} y+z=2a \\ z+x=2b \\ x+y=2c \end{array}\right|$

176. $\left|\begin{array}{l} x+y=a+b \\ x+z=a+c \\ y+z=b+c \end{array}\right|$

177. $\left|\begin{array}{l} y+z=2a+b+c \\ x+z=2b+a+c \\ x+y=2c+a+b \end{array}\right|$

178. $\left|\begin{array}{l} x-y=2 \\ y-z=3 \\ x+z=9 \end{array}\right|$

179. $\left|\begin{array}{l} x+y=33 \\ y-z=10 \\ x-z=13 \end{array}\right|$

180. $\left|\begin{array}{l} x+y=9 \\ x-y=3 \\ x-z=4 \end{array}\right|$

181. $\left|\begin{array}{l} x+z=b \\ z-y=b-c \\ y-x=a-b \end{array}\right|$

182. $\left|\begin{array}{l} 3x+y=18 \\ 3y+z=10 \\ 3z+x=8 \end{array}\right|$

183. $\left|\begin{array}{l} x+2y=15 \\ y+2z=10 \\ z+2x=17 \end{array}\right|$

184. $\left|\begin{array}{l} 3x-y=7 \\ 3y-z=5 \\ 3z-x=0 \end{array}\right|$

185. $\left|\begin{array}{l} 3x+5y=35 \\ 3y+5z=27 \\ 3z+5x=34 \end{array}\right|$

186. $\left|\begin{array}{l} 2x+3y=29 \\ 2y+3z=19 \\ 3z+2x=23 \end{array}\right|$

187. $\left|\begin{array}{l} 5x-y=33 \\ 2x+z=21 \\ 3y-z=16 \end{array}\right|$

188. $\left|\begin{array}{l} 4x-5y=1 \\ 5z-2x=2 \\ 5y-8z=3 \end{array}\right|$

189. $\left|\begin{array}{l} 4x-3y=13 \\ 3x-4z=13 \\ 5y-6z=13 \end{array}\right|$

190. $\left|\begin{array}{l} 2x=5z \\ 3y=4z \\ 2y=x+1 \end{array}\right|$

191. $\left|\begin{array}{l} 4x=3y \\ 4y=5z \\ 5x=4z+11 \end{array}\right|$

192. $\left|\begin{array}{l} x=3y-13 \\ y=8z-17 \\ z=4x-29 \end{array}\right|$

193. $\left|\begin{array}{l} y=4x-29 \\ z=3x-24 \\ x=2y-5 \end{array}\right|$

194. $\left|\begin{array}{l} 2x=y+6 \\ 3y=z+9 \\ 4z=x+7 \end{array}\right|$

195. $\left|\begin{array}{l} x=3y-25 \\ x=3z-22 \\ x=4y-3z \end{array}\right|$

196. $\left|\begin{array}{l} x+y+z=50 \\ y=3x-21 \\ z=4x-33 \end{array}\right|$

197. $\left|\begin{array}{l} x+y+z=44 \\ x=4z-31 \\ y=3z-21 \end{array}\right|$

Digitized by Google

198. $\left|\begin{array}{r} y+z=x+9 \\ x=2y-11 \\ y=2z-13 \end{array}\right|$

199. $\left|\begin{array}{r} x+y=z+10 \\ y=2x-13 \\ z=2y-11 \end{array}\right|$

200. $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=5 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=6 \\ \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=7 \end{array}\right|$

201. $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=b \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=c \end{array}\right|$

202. $\left|\begin{array}{l} \frac{3}{x}-\frac{4}{y}=1 \\ \frac{5}{x}-\frac{9}{z}=2 \\ \frac{8}{y}-\frac{3}{z}=3 \end{array}\right|$

203. $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x}=\frac{2}{y}-\frac{1}{6} \\ \frac{1}{y}=\frac{1}{z}+\frac{1}{12} \\ \frac{1}{z}=\frac{1}{x}-\frac{1}{4} \end{array}\right|$

204. $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{3}x+\frac{1}{4}y=6 \\ \frac{1}{2}y+\frac{1}{3}z=6 \\ \frac{1}{4}x+\frac{1}{2}z=6 \end{array}\right|$

205. $\left|\begin{array}{l} \frac{2}{3}x+\frac{3}{4}y=19 \\ \frac{2}{3}y+\frac{4}{5}z=24 \\ \frac{4}{5}x+\frac{3}{4}z=27 \end{array}\right|$

206. $\left|\begin{array}{l} 1\frac{1}{3}x+1\frac{1}{2}y=14 \\ 1\frac{1}{2}x+1\frac{1}{3}z=13 \\ 2\frac{3}{4}y-3\frac{2}{3}z=0 \end{array}\right|$

207. $\left|\begin{array}{l} 1\frac{2}{3}x-1\frac{3}{4}y=1 \\ 1\frac{1}{3}x-1\frac{5}{6}z=1 \\ 1\frac{1}{4}y-1\frac{2}{3}z=0 \end{array}\right|$

208. $\left|\begin{array}{l} x=1\frac{1}{3}y-9 \\ y=1\frac{1}{4}z-7 \\ z=1\frac{1}{5}x+2 \end{array}\right|$

209. $\left|\begin{array}{l} x=2\frac{1}{2}x-15 \\ x=2\frac{1}{3}y-18 \\ x=2\frac{1}{4}z-26 \end{array}\right|$

210. $\left|\begin{array}{l} 7{,}6x+2{,}6y=61 \\ 5{,}7x+6{,}1z=46 \\ 3{,}9y+2{,}3z=14 \end{array}\right|$

211. $\left|\begin{array}{l} 3{,}9x-4{,}3y=5 \\ 2{,}6x-6{,}8z=3 \\ 2{,}9y-5{,}1z=5 \end{array}\right|$

212. $\left|\begin{array}{l} x+y-z=8 \\ x+z-y=6 \\ y+z-x=4 \end{array}\right|$

213. $\left|\begin{array}{l} y+z-x=2a \\ x+z-y=2b \\ x+y-z=2c \end{array}\right|$

214. $\left|\begin{array}{l} x+y+z=100 \\ x:y:z=6:3:1 \end{array}\right|$

215. $\left|\begin{array}{l} x+y+z=1 \\ x:y:z=a:b:c \end{array}\right|$

216. $\left|\begin{array}{l} x+y+z=29 \\ x:z=3:4 \\ y:z=2:3 \end{array}\right|$

217. $\left|\begin{array}{l} 9x+8y+5z=300 \\ x:y=2:3 \\ y:z=5:6 \end{array}\right|$

218. $\left|\begin{array}{l} 3x+y+z=29 \\ 3y+x+z=25 \\ 3z+x+y=21 \end{array}\right|$

219. $\left|\begin{array}{l} x+y+2z=31 \\ x+z+2y=32 \\ y+z+2x=33 \end{array}\right|$

Digitized by Google

220. $\left|\begin{array}{l} x+2y+3z=22 \\ y+2z+3x=25 \\ z+2x+3y=25 \end{array}\right|$

221. $\left|\begin{array}{l} 2x-y+3z=14 \\ 2y-z+3x=24 \\ 2z-x+3y=10 \end{array}\right|$

222. $\left|\begin{array}{l} 3x-2y+z=22 \\ 4x-3y+z=24 \\ 5x-5y+z=17 \end{array}\right|$

223. $\left|\begin{array}{l} 5x-3y-2z=20 \\ 7x-4y-6z=20 \\ 2x+3y-8z=20 \end{array}\right|$

224. $\left|\begin{array}{l} x+y+z=14 \\ 6x-3y-7z=0 \\ 4x-9y+7z=0 \end{array}\right|$

225. $\left|\begin{array}{l} x+y+z=24 \\ 2x+5y=6z \\ 5x+8y=11z \end{array}\right|$

226. $\left|\begin{array}{l} x+y+z=19 \\ x+2y+4z=27 \\ x+3y+9z=37 \end{array}\right|$

227. $\left|\begin{array}{l} x+2y+3z=24 \\ x+3y+5z=31 \\ x+4y+9z=42 \end{array}\right|$

228. $\left|\begin{array}{l} (x+y):(x+z):(y+z)=3:4:5 \\ 7x+5y+11z=100 \end{array}\right|$

229. $\left|\begin{array}{l} (y+z):(x+z):(y+x)=3:4:6 \\ 4x+3y+7z=100 \end{array}\right|$

230. $\left|\begin{array}{l} (2x-y):(3x-z):(2y-z)=1:2:3 \\ 21x+24y+31z=400 \end{array}\right|$

231. $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}+\frac{2}{z}=16 \\ \frac{1}{y}+\frac{2}{z}+\frac{2}{x}=15 \\ \frac{1}{z}+\frac{2}{x}+\frac{2}{y}=14 \end{array}\right|$

232. $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=a+\frac{1}{x} \\ \frac{1}{z}+\frac{1}{x}=b+\frac{1}{y} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=c+\frac{1}{z} \end{array}\right|$

233. $\left|\begin{array}{l} (x-1)(4y+3)=(4x-8)(y+2) \\ (x-2)(3z+1)=(3x-8)(z+1) \\ (y+1)(2z+3)=(2y+1)(z+2) \end{array}\right|$

234. $\left|\begin{array}{l} (2x-9)(3y-7)=(3x-11)(2y-6) \\ (3x-1)(4z-1)=(4x+2)(3z-2) \\ (4y-5)(5z-4)=(5y-9)(4z-1) \end{array}\right|$

235. $\left|\begin{array}{l} \frac{y+4z}{x-1}=4 \\ \frac{z+3x}{y-1}=6 \\ \frac{4x-y}{z-1}=8 \end{array}\right|$

236. $\left|\begin{array}{l} \frac{x+1}{y-z}=5 \\ \frac{y+5}{x-z}=4 \\ \frac{z+1}{x-y}=3 \end{array}\right|$

Digitized by Google

237. $\left|\begin{array}{l} \frac{x+4}{y+2} = \frac{3x-1}{3y-7} \\ \frac{y-4}{z-6} = \frac{3y-2}{3z-8} \\ \frac{z+6}{x-1} = \frac{3z+5}{3x-5} \end{array}\right|$

238. $\left|\begin{array}{l} \frac{x+5}{2x-3} = \frac{y+4}{2y-5} \\ \frac{y+5}{2y-5} = \frac{z+4}{2z-7} \\ \frac{x+7}{2x-1} = \frac{z+8}{2x-4} \end{array}\right|$

239. $\left|\begin{array}{l} x + 0{,}3y + 0{,}4z = 28 \\ y + 0{,}3z + 0{,}4x = 33 \\ z + 0{,}3x + 0{,}4y = 41 \end{array}\right|$

240. $\left|\begin{array}{l} 0{,}3x + 0{,}5y + 0{,}4z = 8 \\ 0{,}5x + 0{,}6y - 0{,}3z = 3 \\ 0{,}2x + 0{,}3y + 0{,}7z = 9 \end{array}\right|$

241. $\left|\begin{array}{l} x + y = \frac{1}{2}z + 18 \\ x + z = \frac{4}{5}y + 12 \\ y + z = \frac{3}{4}x + 9 \end{array}\right|$

242. $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{3}x = y - z + 11 \\ \frac{1}{4}y = x - z + 5 \\ \frac{1}{5}z = x - y - 1 \end{array}\right|$

243. $\left|\begin{array}{l} x = \frac{1}{2}y + \frac{1}{3}z + 2 \\ y = \frac{1}{4}x + \frac{2}{3}z - 2 \\ z = \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}y + 3 \end{array}\right|$

244. $\left|\begin{array}{l} \frac{1}{3}x + \frac{1}{4}y = z - 11 \\ \frac{1}{2}x + \frac{1}{5}z = y + 1 \\ \frac{1}{3}y + \frac{1}{4}z = x - 9 \end{array}\right|$

245. $\left|\begin{array}{l} 1\frac{1}{3}x + 1\frac{1}{2}y - 2\frac{1}{4}z = 20 \\ 2\frac{1}{5}x - 2\frac{1}{3}y + 1\frac{1}{2}z = 17 \\ 1\frac{2}{3}x + 1\frac{3}{4}y - 4\frac{1}{2}z = 10 \end{array}\right|$

246. $\left|\begin{array}{l} 1\frac{1}{2}x - 2\frac{1}{6}y + 1\frac{1}{3}z = 7 \\ 1\frac{2}{3}x + 1\frac{4}{5}y - 1\frac{2}{5}z = 7 \\ 2\frac{1}{3}x - 3\frac{1}{5}y + 1\frac{2}{3}z = 7 \end{array}\right|$

247. $\left|\begin{array}{l} 2x + 3y = 12xy \\ 5x + 2z = 24xz \\ 3y + 2z = 18yz \end{array}\right|$

248. $\left|\begin{array}{l} 3x - 4y = 3xy \\ 5x - 6z = 17xz \\ 3y - 2z = 11yz \end{array}\right|$

249. $\left|\begin{array}{l} \frac{x+2}{8y+3} = \frac{3x-2}{16y-3} \\ \frac{3x+3}{5z-1} = \frac{7x-3}{7z+1} \\ \frac{6y+2}{17z-4} = \frac{3y-1}{5z+2} \end{array}\right|$

250. $\left|\begin{array}{l} \frac{2x+1}{10x-1} = \frac{y-2}{y+2} \\ \frac{x+2}{4x-1} = \frac{z+2}{2z-1} \\ \frac{y+3}{2y-3} = \frac{2z+1}{2z-1} \end{array}\right|$

251. $\left|\begin{array}{l} \frac{x+3}{x-4} - \frac{7}{y-2} = 1 \\ \frac{y-3}{y+1} + \frac{4}{z-3} = 1 \\ \frac{z+11}{z-4} - \frac{9}{x-4} = 1 \end{array}\right|$

252. $\left|\begin{array}{l} \frac{3x-1}{2x+7} - \frac{y-7}{2y-5} = 1 \\ \frac{3y-4}{y-2} - \frac{z+3}{z+1} = 2 \\ \frac{2z+3}{z+3} + \frac{x+2}{x-1} = 3 \end{array}\right|$

Digitized by Google

253. $\left|\begin{array}{r} x+y+z=1 \\ ax-by-cz=0 \\ cx-by-az=0 \end{array}\right|$ 254. $\left|\begin{array}{r} x-y+z=a+b \\ ax+by-cz=0 \\ bx+ay-cz=0 \end{array}\right|$

255. $\left|\begin{array}{r} ax+by+cz=0 \\ a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \end{array}\right|$ 256. $\left|\begin{array}{l} ax+by=cz \\ bx+cy=az \\ cx+ay=bz \end{array}\right|$

257. $\left|\begin{array}{r} x+y+z=m \\ ax+by+cz=0 \\ a_1x+b_1y+c_1z=0 \end{array}\right|$ 258. $\left|\begin{array}{r} x+y+z=m \\ az+bx+cy=0 \\ ay+bz+cx=0 \end{array}\right|$

259. $\left|\begin{array}{l} ax+a_1y+a_2z=d \\ bx+b_1y+b_2z=0 \\ cx+c_1y+c_2z=0 \end{array}\right|$ 260. $\left|\begin{array}{l} ax+by+cz=c \\ a_1x+b_1y+c_1z=c_1 \\ a_2x+b_2y+c_2z=c_2 \end{array}\right|$

---

261. Welche Bedingung muß zwischen den Koeffizienten der Gleichungen

$$\left|\begin{array}{l} a_1x+b_1y=0 \\ a_2x+b_2y=0 \end{array}\right|$$

stattfinden, wenn die Unbekannten nicht beide den Wert Null erhalten sollen?

262. Stelle die Bedingungsgleichung dafür auf, daß die in den drei Gleichungen

$$\left|\begin{array}{l} a_1x+b_1y+c_1z=0 \\ a_2x+b_2y+c_2z=0 \\ a_3x+b_3y+c_3z=0 \end{array}\right|$$

auftretenden drei Unbekannten x y z nicht sämtlich den Wert Null besitzen.

XXII. Anwendung der Gleichungen des ersten Grades mit mehreren Unbekannten.

A. Theorie.

Ist es zur Auflösung einer eingekleideten Aufgabe erforderlich oder zweckmäßig, mehrere Größen als Unbekannte einzuführen, so muß man sich zuerst klar machen, welche Größen man am passendsten als Unbekannte ansieht, da es nicht immer am einfachsten zum Ziele führt, die verlangten Größen direkt zu suchen. Hat man die Unbekannten gewählt, so bezeichnet man sie in der Regel mit den letzten Buchstaben des Alphabets: x, y, z usw., je nach der Anzahl der Unbekannten. Dabei hat man auch hier wohl zu unterscheiden, ob die zu bestimmende Unbekannte eine reine Zahl oder eine benannte Größe

Digitized by Google

ist (s. Abschnitt XX.). Zweitens hat man für diese zu bestimmenden Größen aus der Aufgabe soviele Bedingungen aufzusuchen, als Unbekannte da sind. Gibt die Aufgabe nicht soviele Bedingungen, so ist sie unbestimmt. Jede Bedingung in Worten ist aber in mathematischen Zeichen nichts als eine Gleichung. Die Entwicklung eines solchen Ansatzes beruht im übrigen auf denselben Prinzipien, wie bei den Anwendungen der Gleichungen mit einer Unbekannten.

In den folgenden Aufgaben sollen zunächst soviele Unbekannte eingeführt und daher soviele Gleichungen aufgestellt werden, als Größen gesucht werden. Alle diese Aufgaben lassen sich jedoch auch leicht durch Einführung einer einzigen Unbekannten lösen; denn hat man mit Hilfe der bekannten Größen nur eine einzige, nicht gegebene Größe ermittelt, so ergeben sich alle gesuchten Größen sehr leicht. Ob es bei solchen Aufgaben vorteilhaft ist, nur eine Unbekannte oder mehrere Unbekannte einzuführen, läßt sich nicht im allgemeinen angeben. Meistens ist es jedoch zweckmäßig, möglichst wenige Unbekannte einzuführen. Es ist interessant und förderlich, beide Wege einzuschlagen und miteinander zu vergleichen. — Schließlich kann es bei jeder Aufgabe versucht werden, sie ohne Algebra zu lösen.

B. Aufgaben.

1. Die Summe zweier Zahlen beträgt 1000, ihre Differenz 222. Wie heißen dieselben?

2. Die Summe zweier Zahlen beträgt 555. Dividiert man die zweite in die erste, so erhält man 2, Rest 9. Wie heißen dieselben?

3. Die Differenz zweier Zahlen ist 37. Dividiert man die erste durch die zweite, so erhält man 3, Rest 1. Wie heißen dieselben?

4. Die Summe zweier Zahlen ist 500. Teilt man die erste durch 7, die zweite durch 3, so ist die Summe der Quotienten gleich 100. Wie heißen dieselben?

5. Die Differenz zweier Zahlen ist 101. Multipliziert man die erste mit 3, die zweite mit 5, so wird die Differenz gleich 1. Wie heißen dieselben?

6. Es sollen zwei Zahlen von folgender Beschaffenheit gesucht werden. Dividiert man die zweite durch die erste, so erhält man 3, Rest 2. Hängt man der ersten eine 3 an und dividiert sie dann durch die zweite, so erhält man ebenfalls 3, Rest 2. Wie heißen die Zahlen?

7. A sagt zu B: Gib mir 7 ℳ, so habe ich doppelt soviel als du. Du solltest mir lieber etwas abgeben, antwortete B, denn du hast mehr als ich. Gibst du mir 5 ℳ, so haben wir beide gleichviel. Wieviel hatte jeder?

Digitized by Google

8. Ich habe zwei Geldbörsen. Lege ich in die erste 5 ℳ, so enthält sie eine Mark mehr als dreimal soviel als die zweite. Lege ich aber 5 ℳ in die zweite, so enthält sie 2 ℳ weniger als halb soviel als die erste. Wieviel Mark enthielt jede Börse?

9. Ich habe zwei Geldbörsen von ungleichem Werte. In der ersten stecken 13 ℳ, in der zweiten 8 ℳ. Jetzt ist die erste mit ihrem Inhalt doppelt soviel wert, als die zweite mit ihrem Inhalt. Vertauscht man den Inhalt der einen mit dem der anderen, so besitzen die gefüllten Börsen den gleichen Wert. Welchen Wert hat jede Börse an sich?

10. Man soll 1001 in zwei Teile teilen, die sich wie $2\frac{1}{2} : 3\frac{1}{8}$ verhalten.

11. Zwei Zahlen verhalten sich wie $1\frac{2}{3} : 3\frac{3}{4}$. Dividiert man die zweite durch die erste, so erhält man 2, Rest 7. Wie heißen die Zahlen?

12. Vermehrt man die erste von zwei Zahlen um 2, so verhält sich die Summe zur zweiten wie 4 : 5. Vermehrt man die zweite um 2, so verhält sich diese Summe zur ersten Zahl wie 3 : 2. Wie heißen die Zahlen?

13. Vermehrt man jede von zwei Zahlen um 1, so verhalten sich die vergrößerten Zahlen wie 3 : 4. Vermindert man jede um 5, so verhalten sich die verminderten Zahlen wie 2 : 3. Wie heißen die Zahlen?

14. Vermehrt man die erste von zwei Zahlen um das Dreifache der zweiten, so erhält man 39. Vermehrt man die zweite um das Dreifache der ersten, so erhält man 93. Wie heißen die Zahlen?

15. Zwei Zahlen haben folgende Eigentümlichkeiten. Das Siebenfache der ersten und das Vierfache der zweiten geben zusammen 97. Das Vierfache der ersten und das Siebenfache der zweiten geben zusammen 79. Wie heißen die Zahlen?

16. Zwei Zahlen haben folgende Eigentümlichkeiten. Das Fünffache der ersten und das Dreifache der zweiten geben zusammen 102. Der 5. Teil der ersten und der 3. Teil der zweiten geben zusammen 6. Wie heißen die Zahlen?

17. Zwei Zahlen haben folgende Eigentümlichkeiten. Vermehrt man die erste um 50 und dividiert die Summe durch die zweite, so erhält man 5, Rest 4. Vermehrt man die zweite um 50 und dividiert diese Summe durch die erste, so erhält man 3, Rest 6. Wie heißen die Zahlen?

18. Ein Bruch hat den Wert $\frac{2}{5}$. Er nimmt den Wert $\frac{3}{4}$ an, wenn man Zähler und Nenner um 6 vermehrt. Wie heißt derselbe?

19. Ein Bruch nimmt den Wert $\frac{2}{3}$ an, wenn man Zähler und Nenner um 1 vermindert. Er erhält den Wert $\frac{3}{4}$, wenn man Zähler und Nenner um 5 vermehrt. Wie heißt derselbe?

Digitized by Google

20. Zerlege die Zahl 101 so in zwei Teile, daß die Differenz der Quadrate ebenfalls 101 ist.

21. Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist 21. Wie heißen die Zahlen, wenn die erste um 3 größer ist als die zweite?

22. Die Summe zweier Zahlen ist gleich der Differenz ihrer Quadrate. Vermehrt man jede um 1, so ist die Differenz der Quadrate gleich 11. Wie heißen die Zahlen?

23. Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist 120. Vermindert man jede um 5, so wird die Differenz der Quadrate gleich 60. Wie heißen die Zahlen?

24. Vergrößert man jede von zwei gedachten Zahlen um 1, so wird das Produkt um 21 größer. Wie heißen die beiden Zahlen, wenn die Differenz ihrer Quadrate gleich 120 ist?

25. Vergrößert man die erste von zwei gedachten Zahlen um 2, die zweite um 1, so wird das Produkt derselben um 23 größer. Vergrößert man die erste um 1, die zweite um 2, so wird das Produkt derselben um 29 größer. Wie heißen die Zahlen?

26. Vermehrt man die erste von zwei gedachten Zahlen um 4, so wird die Summe ihrer Quadrate um 80 größer. Vermindert man die zweite um 2, so wird die Summe der Quadrate um 20 kleiner. Wie heißen die Zahlen?

27. Vermehrt man die erste von zwei gedachten Zahlen um 3 und vermindert die zweite um 1, so wird die Summe ihrer Quadrate um 64 größer. Vermehrt man die zweite Zahl um 3 und vermindert die erste um 1, so wird die Summe der Quadrate um 14 größer. Wie heißen die Zahlen?

28. Vermehrt man jede von zwei gedachten Zahlen um 1, so wird die Summe ihrer Quadrate um 74 größer, die Differenz ihrer Quadrate um 4. Wie heißen die Zahlen?

29. Vermehrt man jede von zwei gedachten Zahlen um 3, so wird die Differenz ihrer Quadrate um 144 größer, ihr Produkt um 219. Wie heißen die Zahlen?

29_1. 29_2. Die Summe zweier Seiten eines Dreiecks beträgt 42 (54) *cm*, die Projektionen dieser Seiten auf die dritte Seite sind 20 (21) und 8 (15) *cm* lang. Wie groß sind die Dreiecksseiten?

29_3. 29_4. Der Unterschied zweier Dreiecksseiten beträgt 9 (7) *m*, die Projektionen dieser beiden Seiten auf die dritte sind 30 (15) und 9 (6) *m* groß. Wie lang sind jene Seiten?

29_5. Zwei Seiten eines Dreiecks haben Längen von 15 und 13 *cm*. Wie groß sind ihre Projektionen auf die dritte Seite, wenn diese selbst 14 *cm* lang ist? Wie groß ist die zu der letzteren Seite gehörende Höhe?

29_6. Zwei Dreiecksseiten haben Längen von 50 und 41 *cm*. Ihre Projektionen auf die dritte Seite unterscheiden sich um 21 *cm*.

Digitized by Google

Wie lang sind diese? Wie groß ist die zur dritten Seite gehörende Höhe?

30. Ein Vater ist jetzt 27 Jahre älter als sein Sohn. Vor 10 Jahren war der Vater zehnmal so alt als der Sohn. Wie alt ist jetzt jeder?

31. Ein Vater war vor 4 Jahren fünfmal so alt als sein Sohn; nach 17 Jahren wird er nur noch doppelt so alt sein als dieser. Wie alt waren Vater und Sohn?

32. Ein Landmann verkaufte 150 *hl* Weizen und 275 *hl* Roggen. Die Einnahme dafür betrug 6525 *M*. Hätte er 275 *hl* Weizen und 150 *hl* Roggen verkauft, so würde seine Einnahme 6650 *M* betragen haben. Wie hoch war der Preis jeder Kornart?

33. Ein Landmann hatte einen kleinen Vorrat an Weizen und Roggen. Der Scheffel Weizen kostete damals $7\frac{1}{2}$ *M*, der Scheffel Roggen 7 *M*. Danach war der Wert des Vorrats 646 *M*. Hätte der Roggen den Preis des Weizens und der Weizen den Preis des Roggens gehabt, so hätte der Vorrat einen Wert von 659 *M* gehabt. Wieviel hatte er von jeder Kornart vorrätig?

34. Jemand hat zwei Arten Gold. Legiert er 35 Gramm der ersten und 45 Gramm der zweiten Art, so erhält er 860haltiges Gold. Legiert er umgekehrt 45 Gramm der ersten und 35 Gramm der zweiten Art, so erhält er 880haltiges Gold. Wievielhaltig war jede Art?

35. Jemand mischt 85prozentigen Spiritus mit 45prozentigem und erhält 60prozentigen. Hätte er von der ersten Art 5 *l* weniger, von der zweiten Art 5 *l* mehr gehabt, so würde die Mischung Spiritus von 58 Pzt. ergeben haben. Wieviel Liter nahm er von jeder Art?

36. Jemand will Gold und Kupfer legieren. Er braucht 250 Gramm 900haltigen Goldes. Wieviel Metall von jeder Art muß er nehmen, wenn beim Schmelzprozeß vom Golde 1, vom Kupfer 2 Pzt. verloren gehen?

37. Jemand hat 900haltiges und 700haltiges Gold. Er will eine 750haltige Goldlegierung herstellen, welche 200 Gramm wiegt. Wie viel muß er von jeder Art nehmen, wenn beim Schmelzen vom Golde $\frac{1}{2}$ Pzt., vom Kupfer 1 Pzt. verloren geht?

38. Die spezifische Wärme des Eisens kann zu $\frac{1}{9}$, die des Terpentinspiritus zu $\frac{4}{9}$ angenommen werden. Gießt man auf 44 *g* Eisenfeilspäne von einer gewissen Temperatur 14 *g* Terpentinspiritus, so ergibt sich eine Ausgleichstemperatur von 39 Grad. Bringt man 32 *g* Eisenspäne mit 17 *g* Terpentinspiritus von denselben Temperaturen zusammen, so stellt sich die Ausgleichstemperatur auf 42 Grad. Welche Temperatur hatte hierbei das Eisen und der Terpentinspiritus?

Digitized by Google

38$_1$. Auf eine gewisse Quantität Holzkohle von der spezifischen Wärme 0,24 und der Temperatur 20° wird Terpentinspiritus von der spezifischen Wärme 0,45 und 30° Temperatur gegossen, die Ausgleichstemperatur stellt sich auf 26 Grad. Beide Stoffe hatten zusammen ein Gewicht von 90 *g*. Wie verteilte sich dies auf beide?

39. A hat von 24 000 ℳ innerhalb der Zeit vom 1. Januar 1899 bis Ende August 1900 denselben Zinsgenuß, wie B von einem Kapital von 14 000 ℳ während eines Zeitraums von $2\frac{1}{2}$ Jahren. Hätte jeder sein Geld zu dem Zinsfuß des anderen ausgeliehen, so würde B in denselben Zeiträumen 375 ℳ weniger eingenommen haben, als A. Zu welchem Satz hatte jeder sein Kapital ausgeliehen?

40. Jemand hatte ein Kapital zu $4\frac{1}{2}$ Prozent, ein zweites zu 4 Prozent ausgeliehen. Das erste brachte ihm in 3 Jahren ebensoviel Zinsen ein, wie das zweite in $2\frac{1}{4}$ Jahren. Hätte er das erste Kapital um $\frac{1}{2}$ Prozent höher, das zweite um $\frac{1}{2}$ Prozent niedriger ausgeliehen, so würde seine jährliche Zinseinnahme sich um 125 ℳ verringert haben. Wie groß waren die Kapitalien?

40$_1$. Jemand hat einen Teil seines Vermögens in $4\frac{1}{2}$prozentigen, den Rest in 4prozentigen Hypotheken angelegt. Die letzteren werden ihm gekündigt, doch eröffnet sich ihm zugleich die Möglichkeit, sein ganzes Vermögen in $4\frac{1}{4}$prozentigen Hypotheken anzulegen. Dadurch vermehrt sich seine jährliche Zinseinnahme, die bisher 6700 ℳ betrug, um 100 ℳ. Wie groß waren die beiden Teile seines Vermögens?

41. Zwei Kapitalien, 4350 ℳ und 9750 ℳ, sind zu verschiedenen Prozentsätzen ausgeliehen und bringen jährlich zusammen 691,50 ℳ Zinsen. Stände das erste Kapital zum Prozentsatz des zweiten und das zweite zum Prozentsatz des ersten, so brächten sie zusammen 718,50 ℳ Zinsen. Zu wieviel Prozent standen die Kapitalien?

42. Von zwei Kapitalien, welche zusammen 657 ℳ Zinsen brachten, stand das erste zu $4\frac{1}{2}$, das zweite zu 5 Pzt. Hätte das erste zu 5, das zweite zu $4\frac{1}{2}$ Pzt. gestanden, so hätten sie zusammen 673 ℳ Zinsen gebracht. Wie groß waren die Kapitalien?

43. Auf der Peripherie eines Kreises befinden sich zwei Punkte A und B, die sich in entgegengesetzter Richtung bewegen. Erfolgt die Bewegung auf dem kleineren Bogen, der zwischen ihnen liegt, so treffen sie sich nach 3 Sekunden; erfolgt sie auf dem größeren Bogen, so treffen sie sich nach $3\frac{3}{5}$ Sekunden. Der größere Bogen ist 12 *m* länger als der kleinere. Wie groß ist die anfängliche kürzere Bogenentfernung und wie groß ist die Peripherie des Kreises, wenn die Punkte die ganze Peripherie bezw. in 15 und 12 Sekunden durchlaufen?

44. Zwei Punkte bewegen sich auf der Peripherie eines Kreises,

Digitized by Google

die 600 *m* lang ist. Sie befinden sich im Anfang der Bewegung an derselben Stelle. Durchlaufen sie die Bahn in entgegengesetzter Richtung, so treffen sie jedesmal nach 10 Sekunden zusammen. Durchlaufen sie die Bahn in derselben Richtung, so treffen sie jedesmal nach 60 Sekunden zusammen. Wieviel Meter legte jeder Punkt in der Sekunde zurück?

45. Auf der Peripherie eines Kreises, welche 300 *m* lang ist, bewegen sich zwei Punkte A und B. Ihre anfängliche Entfernung beträgt 100 *m*. Sie bewegen sich gegeneinander und treffen sich nach 5 Sekunden. Würden sie beide sich dauernd in derselben Richtung bewegen, so würden sie sich jedesmal nach 50 Sekunden treffen. Wieviel Meter legte jeder in der Sekunde zurück?

45_1. Die Rheinstrecke Bingen — Koblenz hat eine Länge von 60 *km*. Ein stromabfahrender Dampfer, der Bingen um 10 Uhr morgens verlassen hatte, begegnet um 11 Uhr einem stromauffahrenden Dampfer, der von Koblenz um 8 Uhr 20 Minuten abgefahren war und um $11\frac{1}{2}$ Uhr einem zweiten ebenfalls stromauffahrenden Dampfer, der Koblenz um 9 Uhr verlassen hatte. Von den beiden stromauffahrenden Dampfern legte der zweite stündlich 3 *km* weniger zurück als der erste. Wie groß war die Geschwindigkeit eines jeden der drei Dampfer?

45_2. Ein Fußgänger, der früh um 6 Uhr von B aufbricht, um nach A zu gehen, begegnet um 7 Uhr einem Radfahrer, der um 6 Uhr von A in der Richtung nach B aufgebrochen war und $7\frac{1}{2}$ Minuten später einem zweiten Radfahrer, der, ebenfalls von A nach B fahrend, A erst um $6\frac{1}{2}$ Uhr verlassen hatte, aber anderthalbmal so schnell fährt als der erste Radfahrer. Wieviel *km* legten der Fußgänger und jeder der beiden Radfahrer in der Stunde zurück, wenn die Strecke AB eine Länge von 18 *km* besitzt? Wann kam jede der drei Personen an ihrem Ziele an?

46. Ein Wasserbehälter kann durch zwei Röhren gefüllt werden. Ist die erste 6 Minuten, die zweite 3 Minuten offen, so bleibt noch $\frac{1}{6}$ des Behälters leer. Ist aber die erste 3 Minuten und die zweite 6 Minuten offen, so bleibt nur noch $\frac{1}{12}$ des Behälters leer. Wie lange muß jede Röhre allein offen sein, damit der Behälter gerade voll wird, und wie lange müssen sie zusammen offen sein?

47. Zwei Arbeiter A und B sollen eine Arbeit ausführen. Arbeitet A 12 Tage, B 8 Tage, so bringen sie die Arbeit gerade fertig. Sie bringen dieselbe auch fertig, wenn A 9 Tage und B 12 Tage arbeitet. In wieviel Tagen würde jeder die Arbeit allein zustande bringen, und in wieviel Tagen beide zusammen?

48. Welche beiden zweiziffrigen Zahlen haben folgende Eigentümlichkeiten? Setzt man die zweite rechts an die erste und dividiert

Digitized by Google

die so entstandene vierzifferige Zahl durch die Summe der beiden Zahlen, so erhält man 47, Rest 27. Setzt man die erste rechts an die zweite und dividiert die so entstandene Zahl durch die Summe der beiden Zahlen, so erhält man 53, Rest 9.

49. Wenn man eine zweizifferige Zahl durch die zweite Ziffer rechts dividiert, so erhält man 9, Rest 6. Stellt man die Ziffern um und dividiert diese Zahl durch ihre zweite Ziffer, so erhält man 12, Rest 3. Wie heißt die Zahl?

50. Welche dreizifferige Zahl hat folgende Eigentümlichkeiten? Dividiert man sie durch die Ziffer rechts, so erhält man 69. Schneidet man die dritte Ziffer rechts ab, setzt sie vorn wieder an und teilt diese Zahl durch ihre erste Ziffer, so erhält man 106, Rest 4.

51. Eine sechszifferige Zahl hat folgende Eigentümlichkeiten. Teilt man sie in zwei dreizifferige Zahlen, so ist die erste um 99 kleiner als die zweite. Dividiert man durch die Summe dieser beiden Zahlen die ursprüngliche Zahl, so erhält man 446, Rest 90. Wie heißt die Zahl?

52. Eine sechszifferige Zahl hat folgende Eigentümlichkeiten. Teilt man sie in zwei Teile, den ersten Teil zu zwei Ziffern, den zweiten zu vier Ziffern, und dividiert den zweiten Teil durch den ersten, so erhält man 425, Rest 6. Dividiert man die ganze ursprüngliche Zahl durch den zweiten Teil, so erhält man 24, Rest 2787. Wie heißt die Zahl?

53. Folgende Brüche sollen in Partialbrüche zerlegt werden:

$$1)\ \frac{2}{x^2-1}\ ^*),\quad 2)\ \frac{2x}{1-x^2},\quad 3)\ \frac{1}{x(x-1)},\quad 4)\ \frac{4+x}{2x-x^2}.$$

54. Desgleichen folgende Brüche:

$$1)\ \frac{3}{3x-2x^2},\quad 2)\ \frac{5x}{(2-x)(3+x)},\quad 3)\ \frac{1+x}{1-4x+3x^2},\quad 4)\ \frac{3-x}{15-19x+6x^2}.$$

55. Bronze besteht aus Zinn und Kupfer. Um seine Zusammensetzung zu untersuchen, wog man ein Stück. Das Gewicht desselben betrug an sich 99 g, im Wasser 87,5265 g. Wieviel Zinn und wieviel Kupfer enthielt das Stück, wenn das spezifische Gewicht von Zinn 7,29, von Kupfer 8,79 ist?

56. Reines Gold hat das spezifische Gewicht 19,26, Kupfer 8,79.

---

*) Man zerlege den Nenner in Faktoren, hier $x+1$ und $x-1$, und setze $\frac{2}{x^2-1} = \frac{A}{x+1} + \frac{B}{x-1}$. Durch Multiplikation dieser Gleichung mit x^2-1 erhält man $2 = A(x-1) + B(x+1) = (A+B)x + B - A$. Hieraus folgert man, da links x überhaupt nicht vorkommt, daß $A+B=0$, $B-A=2$ sein muß, woraus sich die Werte für A und B ergeben. Entsprechend ist bei den übrigen Aufgaben zu verfahren.

Digitized by Google

Wievielhaltig muß legiertes Gold sein, dessen spezifisches Gewicht 18 ist, vorausgesetzt, daß das Gold nur mit Kupfer legiert ist?

57. Ein Mann schwamm, indem er seine Brust auf ein tannenes Brett gelegt und den Kopf, den 10. Teil seines Körpers, außerhalb des Wassers hatte, ohne Anstrengung im Wasser. Der in das Wasser eingetauchte Teil seines Körpers hatte das spezifische Gewicht 1,05, das Tannenholz 0,5 und Mann und Brett wogen zusammen 168 Pfd. Wieviel wog der Mann und wieviel das Brett?

57_1. Ein fichtenes Brett mit eisernen Beschlägen wiegt 3200 *g*. Beim Eintauchen bleiben 100 *g* Holz und 100 *g* Eisen außer Wasser. Wie verteilt sich das Gesamtgewicht auf das Holz und das Eisen, wenn die spezifischen Gewichte dieser beiden Stoffe zu 0,5 und 7,5 angenommen werden?

57_2. Ein buchenes Brett mit kupfernen Beschlägen taucht derart im Wasser ein, daß im ganzen 490 *g* außerhalb des Wassers bleiben. Wenn das Holz des Brettes 2100 *g*, die Beschläge 1200 *g* wiegen, während die spezifischen Gewichte beider Stoffe zu 0,6 und 8,9 angenommen werden, wie verteilt sich das Gewicht des herausragenden Teils auf Holz und Kupfer?

58. Ein Lehrer gab seinem Schüler ein Divisionsexempel auf. Dieser erhielt 57, Rest 52. Er machte die Probe, indem er den Divisor mit dem Quotienten multiplizierte und den Rest addierte. Er erhielt 17 380. Das stimmte nicht. Der Lehrer fand alsbald den Fehler. Der Schüler hatte bei der Multiplikation in dem Divisor an der zweiten Stelle rechts eine Sechs als eine Null gelesen. Wie hießen Divisor und Dividend?

59. Ein Lehrer gab zwei Schülern zwei Zahlen zu multiplizieren. Dann ließ er die Probe machen, das Produkt durch den kleinen Faktor dividieren. Das stimmte bei keinem. Der erste erhielt 575, Rest 227; der zweite 572, Rest 308. Jeder hatte nämlich beim Multiplizieren 1 zu addieren vergessen, aber jeder an einer anderen Stelle. So erhielt der erste im Produkt 100, der zweite 1000 zu wenig. Wie hießen die zu multiplizierenden Zahlen?

---

60. Wie lang sind die Seiten eines Dreiecks, wenn die Summen derselben zu je zwei bezw. 97, 83 und 78 *m* betragen?

61. An einem Graben arbeiten drei Arbeiter. A und B würden denselben in 12 Tagen fertig machen, A und C in 10 Tagen. Er würde auch fertig werden, wenn B 8 Tage und C 9 Tage arbeitete. In wieviel Tagen würde jeder Arbeiter den Graben allein fertig bringen, und in wieviel Tagen werden sie fertig, wenn sie alle drei zusammen arbeiten?

Digitized by Google

62. Ein Wasserbehälter kann durch drei Röhren gefüllt werden. Durch die erste und zweite wird derselbe in 36 Minuten voll, durch die zweite und dritte in 24 Minuten. Ebenso würde er voll werden, wenn die erste 36 und die dritte 24 Minuten offen wären. In welcher Zeit wird der Behälter durch jede Röhre allein voll werden, und in welcher Zeit durch alle Röhren zugleich?

63. Drei Zahlen haben folgende Eigentümlichkeiten. Dividiert man die Summe der drei Zahlen durch die erste, so erhält man 2, Rest 2. Dividiert man sie durch die zweite, so erhält man 3, Rest 4. Dividiert man sie durch die dritte, so geht die Division auf, der Quotient ist 4. Wie heißen die Zahlen?

64. Drei einzifferige Zahlen haben folgende Eigentümlichkeiten. Setzt man die erste links vor die zweite und dividiert die so entstandene Zahl durch die dritte, so erhält man 19, Rest 2. Setzt man die zweite vor die dritte und dividiert diese Zahl durch die erste, so erhält man 8, Rest 3. Setzt man die dritte vor die erste und dividiert diese Zahl durch die zweite, so erhält man ebenfalls 8, Rest 3. Wie heißen die Zahlen?

65. Drei Zahlen, von denen die beiden ersten zweizifferig sind, die dritte einzifferig ist, haben folgende Eigentümlichkeiten. Setzt man die dritte rechts an die zweite und dividiert diese Zahl durch die erste Zahl, so erhält man 8, Rest 3. Setzt man die erste rechts an die dritte und dividiert durch die zweite, so erhält man 70, Rest 7. Setzt man die zweite rechts an die erste und dividiert durch die dritte, so erhält man 190, Rest 3. Wie heißen die Zahlen?

66. Drei einzifferige Zahlen haben folgende Eigentümlichkeiten. Setzt man die drei Zahlen der Reihe nach zu einer Zahl zusammen und dividiert diese Zahl durch die Summe der ersten und zweiten, so erhält man 66, Rest 3; durch die Summe der ersten und dritten, gibt 88, Rest 3; durch die Summe der zweiten und dritten, gibt 132, Rest 3. Wie heißen die Zahlen?

67. Ein Landmann hatte auf drei Kornböden Korn liegen. Auf dem ersten waren 60 *hl* Weizen, 180 *hl* Roggen und 120 *hl* Hafer. Auf dem zweiten waren 80 *hl* W., 120 *hl* R. und 240 *hl* H. Auf dem dritten waren 90 *hl* W., 150 *hl* R. und 180 *hl* H. Das Getreide auf den drei Böden hatte einen Wert von bez. 6190 ℳ, 5300 ℳ, 5190 ℳ. Wie hoch war der Preis einer jeden Getreideart?

68. Ein Landmann hatte auf seinem Kornboden Weizen, Roggen und Hafer liegen. Er schätzte den Wert des gesamten Getreides auf 2430 ℳ, wobei er den Scheffel Weizen zu 7,50, Roggen zu 7,25, Hafer zu 7 ℳ rechnete. Wären die Mengen des Weizens und des Roggens miteinander vertauscht, so betrüge der Wert des Getreides 2450 ℳ. Wäre die Menge des Hafers mit der des Weizens ver-

Digitized by Google

tauscht, so betrüge der Wert des Getreides sogar 2500 *M*. Wieviel Scheffel hatte er von jeder Getreideart?

69. Abgesehen von der Goldplattierung besteht das sogenannte Talmigold aus Kupfer, Zink und Zinn, wozu noch 0,3 Pzt. Eisen kommen. Es hat dabei ein spezifisches Gewicht von 8,5. Wieviel Prozent Kupfer, Zink und Zinn enthält die Legierung, wenn sie noch 1 Pzt. mehr als siebenmal soviel Kupfer als Zink enthält und die spezifischen Gewichte von Kupfer, Zink, Zinn und Eisen bezw. zu 8,8, 7,2, 7,3, 7,2 angenommen werden?

70. Man stellt das sogenannte Neusilber (Berliner Neusilber, Argentan) vorzugsweise in drei Arten her. Die erste (beste) Art besteht aus 52 Pzt. Kupfer, 26 Pzt. Zink und 22 Pzt. Nickel; die zweite Art aus 59 Pzt. Kupfer, 30 Pzt. Zink und 11 Pzt. Nickel; die dritte Art aus 63 Pzt. Kupfer, 31 Pzt. Zink und 6 Pzt. Nickel. Wieviel Neusilber müßte man von jeder Art nehmen, um eine Legierung von 60 Pzt. Kupfer, 30 Pzt. Zink und 10 Pzt. Nickel herzustellen, welche 900 Gramm wiegt?

71. Es sollen drei Zahlen von folgender Beschaffenheit gesucht werden. Addiert man zu jeder die doppelte Summe der beiden andern, so erhält man der Reihe nach 220, 210 und 200.

72. Es sollen drei Zahlen von folgender Beschaffenheit gesucht werden. Addiert man zu jeder dreifachen Zahl die Summe der beiden andern, so erhält man der Reihe nach 170, 190 und 210.

73. Es sollen vier Zahlen von folgender Beschaffenheit gesucht werden. Addiert man zu jeder die dreifache Summe aller übrigen, so erhält man der Reihe nach 530, 550, 570 und 590.

74. Es sollen sechs Zahlen von folgender Beschaffenheit gesucht werden. Addiert man zu jeder dreifachen Zahl die doppelte Summe aller übrigen, so erhält man der Reihe nach 203, 205, 207, 209, 211, 213.

75. Jemand hat drei Kästchen mit Nüssen. Er legt zuerst aus dem ersten Kästchen in jedes der beiden andern soviel, als schon darin sind; er legt dann aus dem zweiten Kästchen in jedes der beiden andern soviel, als schon darin sind; er legt endlich aus dem dritten in jedes der beiden andern soviel, als schon darin sind. Nach diesen drei Manipulationen waren in allen drei Kästchen gleichviel Nüsse, in jedem 64. Wieviel waren anfangs in jedem Kästchen?

76. Drei Personen A, B und C spielen miteinander. Jeder setzt bei jedem Spiel den 4. Teil seines Geldes. Sie spielten dreimal und gewannen der Reihe nach. Da hatte jeder 54 *M*. Wieviel hatte jeder anfangs?

77. Vier Personen A, B, C und D spielen miteinander. Bei jedem Spiele setzt jeder den 5. Teil seines Geldes. Sie gewinnen

Digitized by Google

der Reihe nach. Nach dem 4. Spiel hat jeder 256 *M*. Wieviel hatte jeder anfangs?

78. Fünf Personen A, B, C, D und E spielen miteinander. Bei jedem Spiele setzt jeder den 3. Teil seines Geldes. Es verliert jedesmal nur ein Spieler. Dieser hat an jeden der andern Spieler den Einsatz desselben zu zahlen. Sie verlieren der Reihe nach. Da hatte jeder 10,24 *M*. Wieviel hatte jeder anfangs?

XXIII. Quadratische Gleichungen mit einer Unbekannten.

A. Theorie.

1. Eine quadratische Gleichung oder eine Gleichung vom zweiten Grade mit einer Unbekannten ist eine Gleichung, welche die Formel $ax^2 + bx = c$ hat oder auf diese Form gebracht werden kann. Die Gleichung wird also, nachdem sie von Irrationalitäten, Klammern und Nennern befreit ist, Glieder mit x^2, mit x und ohne x enthalten. Kommen nur Glieder mit x^2 und ohne x vor, hat also der Koeffizient der ersten Potenz von x den Wert Null, so heißt die Gleichung eine reine quadratische Gleichung. Die Normalform einer solchen Gleichung ist $ax^2 = b$. Die Normalform einer reinen Gleichung des n-ten Grades ist $ax^n = b$. Kommen in der Gleichung außer den Gliedern mit x^2 auch Glieder mit x vor, so heißt die Gleichung eine vollständige quadratische Gleichung.

2. Die Auflösung der reinen quadratischen Gleichungen ist nicht schwieriger als die Auflösung der Gleichungen ersten Grades. Macht die Auflösung Schwierigkeiten, so liegen diese nur darin, die Gleichung auf die Form $ax^2 = b$ zu bringen. Aus diesen Gleichungen folgt sofort $x = \sqrt{\frac{b}{a}}$, oder, wie man gewöhnlich schreibt*), $x = \pm\sqrt{\frac{b}{a}}$. Eine reine quadratische Gleichung liefert daher zwei Werte für x, welche der Gleichung genügen. Alle Werte einer Unbekannten, welche einer Gleichung genügen, heißen Wurzeln der Gleichung. Die Wurzeln einer Gleichung sind nicht zu verwechseln mit den Potenzwurzeln, der Quadratwurzel, der Kubikwurzel usw. — Eine reine quadratische Gleichung hat zwei Wurzeln, die dem absoluten Werte nach gleich sind, aber das entgegengesetzte Zeichen haben. — Gleichungen vom ersten Grade haben nur einen Wert für x, welcher der Gleichung genügt, d. h. nur eine Wurzel. Meistens redet man freilich von den Wurzeln einer Gleichung nur bei Gleichungen, welche über den ersten

*) Eigentlich ist es unzulässig, vor der Quadratwurzel das doppelte Zeichen besonders zu schreiben, da diese Wurzel selbst ihrem Begriffe nach sowohl einen positiven als einen negativen Wert haben kann. Die Schreibweise hat sich indessen eingebürgert.

Digitized by Google

Grad hinausgehen. — Auch die reine Gleichung des n-ten Grades läßt sich durch einfaches Radizieren auflösen. Aus $ax^n = b$ folgt

$$x = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

3. Dividiert man eine vollständige quadratische Gleichung durch den Faktor von x^2, falls ein solcher vorhanden ist, so muß dieselbe die Form annehmen

$$x^2 + px = q.$$

Diese Form der Gleichung heißt die erste Normalform einer vollständigen quadratischen Gleichung. Die Auflösung geschieht mit Hilfe der quadratischen Ergänzung. Unter quadratischer Ergänzung versteht man die Größe, welche die linke Seite einer auf die Normalform gebrachten quadratischen Gleichung zu einem vollständigen Quadrat macht. Sie ist hier gleich dem Quadrat des halben Koeffizienten von x, also gleich $\left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4}$. Die Addition dieser Größe auf beiden Seiten gibt

$$x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = \frac{p^2}{4} + q$$

$$x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{p^2}{4} + q}$$

$$x = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Man muß sich daran gewöhnen, diese Auflösung gleich aus der Normalform einer Gleichung hinzuschreiben.

4. Eine vollständige quadratische Gleichung hat daher ebenfalls, wie eine reine quadratische Gleichung, zwei Wurzeln. Diese bezeichnet man in der Regel mit x_1 und x_2. Danach ist

$$x_1 = -\frac{p}{2} + \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}, \quad x_2 = -\frac{p}{2} - \sqrt{\frac{p^2}{4} + q}.$$

Für die oben gelöste reine quadratische Gleichung hätte man zu schreiben

$$x_1 = +\sqrt{\frac{b}{a}}, \quad x_2 = -\sqrt{\frac{b}{a}}.$$

Daß eine quadratische Gleichung zwei Wurzeln liefert, folgt hier aus der Doppeldeutigkeit der Quadratwurzel. Überhaupt läßt sich zeigen, daß jede Gleichung soviel Wurzeln besitzt, als ihr Grad anzeigt, also eine Gleichung des ersten Grades eine Wurzel, eine Gleichung des zweiten Grades zwei Wurzeln, eine Gleichung des dritten Grades drei Wurzeln usw.

5. Für manche Zwecke ist die Form

$$x^2 + kx + l = 0$$

besonders zweckmäßig. Sie soll daher die zweite Normalform

Digitized by Google

heißen. Läßt sich das Aggregat $x^2 + kx + l$ in die beiden Faktoren $(x - u)$ und $(x - v)$ zerlegen, so hat man also

$$x^2 + kx + l = (x - u)(x - v) = 0.$$

Wenn aber das Produkt $(x - u)(x - v)$ den Wert Null haben soll, so ist dies gar nicht anders möglich, als dadurch, daß

$$\text{entweder } x - u = 0, \quad x_1 = u$$
$$\text{oder } x - v = 0, \quad x_2 = v$$

ist. Es müssen u und v die Wurzeln der Gleichung sein. Andererseits hat man

$$x^2 + ax + b = (x - u)(x - v) = x^2 - (u + v)x + uv.$$

Daher der Satz: In einer quadratischen Gleichung von der Form

$$x^2 + kx + l = 0$$

muß der Koeffizient des zweiten Gliedes mit entgegengesetztem Zeichen gleich der Summe der Wurzeln, das dritte Glied gleich dem Produkt der Wurzeln sein, d. h.

$$k = -(x_1 + x_2), \text{ also } x_1 + x_2 = -k$$
$$l = x_1 \cdot x_2.$$

Ist l positiv, so müssen beide Wurzeln gleiche Zeichen haben; welcher Art diese Zeichen sind, hängt von dem Werte von k ab. Ist k selbst negativ, so geben x_1 und x_2 eine positive Summe, müssen also selbst positiv sein, bei positivem Werte von k dagegen sind beide Wurzeln negativ. — Für einen negativen Wert von l haben beide Wurzeln verschiedene Zeichen; hat in diesem Falle k einen negativen Wert, so muß die größere Wurzel positiv, die kleinere negativ sein; ist k eine positive Größe, so muß die größere Wurzel negativ, die kleinere positiv sein.*)

6. Hat eine quadratische Gleichung rationale Wurzeln, so erkennt man die Wurzeln der Gleichung meistens sofort aus den Koeffizienten

*) Man kann diesen Sachverhalt benutzen, um zu einer geometrischen Darstellung der Wurzeln einer quadratischen Gleichung zu gelangen. Die Gleichung habe die Form $x^2 - sx + t^2 = 0$, so ist $x_1 + x_2 = s$, $x_1 \cdot x_2 = t^2$, es lassen sich dann Linien angeben, die sich wie s und t verhalten. Nun zeichnet man einen Kreis vom Radius $\frac{s}{2}$, in den man eine Sehne von der Länge $2t$ einträgt. Der auf dieser Sehne senkrecht stehende Durchmesser wird durch sie in zwei Stücke geteilt, die die Größen x_1 und x_2 darstellen. Ist $x_1 + x_2 = s$, dagegen $x_1 \cdot x_2 = -t^2$, so lege man an den eben gedachten Kreis eine Tangente von der Länge t, und ziehe von deren Endpunkt eine Sekante durch den Kreismittelpunkt. Die ganze Länge dieser Sehne stellt dann den Wert von x_1, ihr negativ genommener äußerer Abschnitt den Wert von x_2 dar. Für den Fall, daß s selbst negativ ist, erhalten die Wurzeln die entgegengesetzten Zeichen wie bei positivem s.

Digitized by Google

der Gleichung, ohne die Gleichung erst aufzulösen. Man zerlegt das dritte Glied in zwei Faktoren, deren Summe den Wert $-a$ hat. Dann sind diese Faktoren die Wurzeln der Gleichung. So hat man für die Gleichung $x^2 - 7x + 12 = 0$, weil $12 = 4 \cdot 3$ und $4 + 3 = 7$ ist, $x_1 = 4$, $x_2 = 3$. Ebenso hat man für

$x^2 - 8x + 7 = 0$ die Wurzeln $+7$ und $+1$
$x^2 + 8x + 7 = 0$ „ „ -7 und -1
$x^2 + 4x - 12 = 0$ „ „ -6 und $+2$
$x^2 - 4x - 12 = 0$ „ „ $+6$ und -2 usw.

7. Hat man x_1 und x_2 als die Wurzeln der quadratischen Gleichung $x^2 + kx + l = 0$ gefunden, so muß die linke Seite der Gleichung sich in die Faktoren $x - x_1$ und $x - x_2$ zerlegen lassen; es muß sein

$$x^2 + kx + l = (x - x_1)(x - x_2).$$

Um daher einen quadratischen Ausdruck $x^2 + ax + b$ in Faktoren zu zerlegen, hat man ihn nur gleich Null zu setzen und die Wurzeln der Gleichung zu suchen. So ist $x^2 + 3x - 10 = (x-2)(x+5)$, weil die Gleichung $x^2 + 3x - 10 = 0$ die Wurzeln $x_1 = 2$ und $x_2 = -5$ gibt. — Hat die quadratische Gleichung die Form

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

so tritt noch der Faktor a hinzu, man hat dann

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

So ist z. B.

$$6x^2 + 5x - 6 = 6\left(x - \tfrac{2}{3}\right)\left(x + \tfrac{3}{2}\right) = (3x - 2)(2x + 3),$$

weil die Gleichung $6x^2 + 5x - 6 = 0$ die Wurzeln $\frac{2}{3}$ und $-\frac{3}{2}$ liefert.

8. Die allgemeinste Form einer quadratischen Gleichung ist die Form

$$ax^2 + bx + c = 0,$$

welche die dritte Normalform heißen soll. Um sie auf die zweite Normalform zu bringen, muß man durch a dividieren und das bekannte Glied nach rechts bringen, dann erhält man

$$x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0.$$

Es ist also

$$\frac{b}{a} = k; \quad \frac{c}{a} = l$$

und mithin in diesem Falle

$$x_1 + x_2 = -\frac{b}{a} \qquad x_1 \cdot x_2 = \frac{c}{a}.$$

Für die Wurzeln selbst erhält man die Werte

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

Digitized by Google

Diese Werte folgen aus den in Nr. 4. angegebenen Werten, wenn man $p = \frac{b}{a}$, $q = -\frac{c}{a}$ setzt. Man kann sie aber auch direkt finden, wenn man beide Seiten der Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ mit $4a$ multipliziert und die linke Seite zum Quadrat ergänzt. Es ist dann $4a^2x^2 + 4abx + b^2 = b^2 - 4ac$, d. h. $(2ax + b)^2 = b^2 - 4ac$, woraus die beiden angegebenen Wurzelwerte sofort folgen.

9. Multipliziert man die Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ nur mit a, und bringt dann die linke Seite auf die Form eines vollständigen Quadrats, so erhält man

$$a^2x^2 + ax + \left(\frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac, \text{ d. h. } \left(ax + \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac$$

$$ax + \frac{b}{2} = \pm\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac} \qquad x = \frac{-\frac{b}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 - ac}}{a}.$$

Diese Lösungsformel wird man vorziehen, wenn der Koeffizient b gerade, $\left(\frac{b}{2}\right)$ also eine ganze Zahl ist. Im anderen Falle wird man die unter Nr. 8. angegebenen Formeln anwenden.

10. Die unter dem Quadratwurzelzeichen stehende Größe $b^2 - 4ac$ ist für die Natur der Gleichungswurzeln von entscheidender Bedeutung, sie heißt die Diskriminante der quadratischen Gleichung. Die Wurzeln einer quadratischen Gleichung $ax^2 + bx + c = 0$ sind reell und ungleich, reell und gleich, oder imaginär, je nachdem

$$b^2 - 4ac \gtreqless 0$$

ist. Ist ac negativ, so sind beide Wurzeln stets reell. Ist $b^2 - 4ac$ ein vollständiges Quadrat, so sind die Wurzeln rational, ist $b^2 - 4ac$ positiv, aber kein vollständiges Quadrat, so sind die Wurzeln irrational.

11. Hat die linke Seite einer auf Null gebrachten quadratischen Gleichung von vornherein die Form eines Produkts, so kann man die Wurzeln ohne weiteres angeben, man erhält sie, indem man entweder den einen oder den anderen Faktor dieses Produkts gleich Null setzt. Ist

$$(x - 4)(x + 1) = 0,$$

so muß entweder $x - 4 = 0$, also $x_1 = 4$
oder $x + 1 = 0$, also $x_2 = -1$

sein. Die Gleichung

$$(5x + 2)(x - 9) = 0$$

wird gelöst, indem man

entweder $5x + 2 = 0$ $\quad x_1 = -\frac{2}{5}$
oder $x - 9 = 0$ $\quad x_2 = 9$

setzt.

Digitized by Google

Hat man $ax^2 + bx = 0$, so kann man links den Faktor x herausziehen, dann ist

$$x(ax + b) = 0, \text{ also entweder } x = 0, \text{ d. h. } x_1 = 0$$
$$\text{oder } ax + b = 0, \text{ d. h. } x_2 = -\frac{b}{a}.$$

Fehlt in der Gleichung ein von x freies Glied überhaupt, so muß eine der Wurzeln den Wert Null haben, was auch daraus folgt, daß dann $c = 0$, also $x_1 \cdot x_2 = 0$ ist. — Auch wenn beide Seiten der Gleichung einen gemeinsamen Faktor haben, in welchem x vorkommt, folgt die Auflösung der Gleichung sofort durch **Zerlegung**. So kann man die Gleichung

$$(x - 1)(x + 3) = 5(x - 1)$$

in die beiden anderen zerlegen

$$1)\ x - 1 = 0, \text{ d. h. } x_1 = 1$$
$$2)\ x + 3 = 5, \text{ d. h. } x_2 = 2.$$

12. Erkennt man aus der Form einer quadratischen Gleichung eine Wurzel x_1, so hat man nur die Gleichung auf die Normalform $x^2 + ax + b = 0$ zu bringen, die andere Wurzel x_2 muß dann gleich $b : x_1$ sein. So wird der Gleichung $x^2 - 8x + 7 = 0$ genügt durch $x = 1$. Daher muß $x_2 = 7 : 1 = 7$ sein. Oder weil der Gleichung durch $x = 1$ genügt wird, muß $x - 1$ ein Faktor der linken Seite sein, folglich der andere $x - 7$. Man hat den zweiten Faktor nur so zu wählen, daß bei der Multiplikation der beiden Faktoren das erste und das dritte Glied stimmen; das zweite stimmt dann von selbst. Der Gleichung $3x^2 - 5x + 2 = 0$ wird genügt durch $x = 1$. Daher muß $x - 1$ ein Faktor der linken Seite sein, mithin der andere Faktor $3x - 2$. Die zweite Wurzel folgt aus $3x - 2 = 0$, ist also $x_2 = \frac{2}{3}$.

13. Leicht ist es nun auch eine Gleichung zu bilden mit den Wurzeln u und v. Man hat nur anzusetzen $(x - u)(x - v) = 0$ und die linke Seite dieser Gleichung auszumultiplizieren. Soll die Gleichung z. B. die Wurzeln 2 und 3 haben, so muß $(x - 2)(x - 3) = 0$, d. h. $x^2 - 5x + 6 = 0$ sein. Für die Wurzelwerte $\frac{2}{3}$ und $-\frac{4}{5}$ hat man

$$(x - \tfrac{2}{3})(x + \tfrac{4}{5}) = 0, \text{ woraus}$$
$$(3x - 2)(5x + 4) = 15x^2 + 2x - 8 = 0$$

folgt.

14. **Symmetrisch** oder **reziprok** heißt eine quadratische Gleichung, bei der der Koeffizient des quadratischen Gliedes gleich dem bekannten Gliede ist. Solche Gleichung hat die Form

$$ax^2 \pm bx + a = 0.$$

Da das Produkt der beiden Wurzeln $x_1 \cdot x_2$ hier den Wert $\frac{a}{a} = 1$ besitzt, muß jede Wurzel der reziproke Wert der anderen sein (vgl. Abschn. VII, Nr. 16. bis 20.)

Digitized by Google

Ist die Gleichung $ax^2 + bx - a = 0$ gegeben, so muß $x_1 \cdot x_2 = -1$ sein, also jede Wurzel der reziproke Wert der anderen Wurzel mit entgegengesetztem Zeichen.

15. Überhaupt heißt eine Gleichung symmetrisch oder reziprok, wenn jedes Glied denselben Koeffizienten hat, wie das Glied, dessen Grad den seinigen zum Grad der Gleichung ergänzt. Bei einer symmetrischen Gleichung vom n. Grade haben also das Glied des n. Grades und das bekannte Glied oder das Glied des 0. Grades, das Glied von $(n-1)$ und das vom ersten Grade gleiche Koeffizienten usf. Eine symmetrische Gleichung dritten Grades hat also die Form

$$ax^3 + bx^2 + bx + a = 0.$$

Schreibt man die Gleichung in der Form

$$a(x^3 + 1) + b(x^2 + x) = 0,$$

so kann man (vgl. Abschn. XI, Nr. 10.) den Faktor $(x+1)$ herausziehen

$$a(x+1)(x^2 - x + 1) + bx(x+1)$$
$$= (x+1)\{ax^2 - (a-b)x + a\} = 0.$$

Nun kann man den Faktor $(x+1)$ oder den Faktor $ax^2 - (a-b)x + a$ gleich Null setzen. Bei der ersten Möglichkeit findet sich die erste Wurzel $x_1 = -1$; die zweite Möglichkeit führt auf eine quadratische Gleichung, die noch 2 Wurzeln (x_2 und x_3) liefert.

Haben die oben genannten Glieder Koeffizienten von gleichem Zahlenwerte, aber entgegengesetzte Zeichen, so läßt sich die linke Seite (nach Abschn. XI, Nr. 9.) auf ähnliche Weise in den Faktor $(x-1)$ und einen quadratischen Faktor zerlegen. Solche („unecht symmetrische") Gleichung hat dann als erste Wurzel $x_1 = 1$. — Überhaupt lassen sich kubische Gleichungen mit alleiniger Hilfe der Theorie quadratischer Gleichungen immer dann lösen, wenn sie einen leicht erkennbaren Faktor haben. Dann ist die Gleichung durch Zerlegung zu lösen. So folgt aus

$$(a^2 - x^2)(b - x) = a(a - x)(b + x)$$

entweder 1) $a - x = 0$

oder 2) $(a + x)(b - x) = a(b + x)$

$$x^2 + (2a - b)x = 0$$

$\alpha)\ x = 0, \quad \beta)\ x + (2a - b) = 0$

$$x_1 = a, \quad x_2 = 0, \quad x_3 = b - 2a.$$

16. Die symmetrische Gleichung des vierten Grades

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

gibt bei Division mit x^2 nach Zusammenfassung der Glieder mit denselben Koeffizienten

$$a\left(x^2 + \frac{1}{x^2}\right) + b\left(x + \frac{1}{x}\right) + c = 0.$$

Digitized by Google

Setzt man nun $x + \frac{1}{x} = y$, so ist $y^2 = x^2 + 2 + \frac{1}{x^2}$, also $x^2 + \frac{1}{x^2} = y^2 - 2$. Die Einsetzung dieser Werte gibt die Gleichung

$$a(y^2 - 2) + by + c = 0,$$

welche für y zwei Werte y_1 und y_2 liefert. Setzt man

$$\text{erstens } x + \frac{1}{x} = y_1, \text{ also } x^2 - y_1 x + 1 = 0$$

$$\text{zweitens } x + \frac{1}{x} = y_2, \text{ also } x^2 - y_2 x + 1 = 0,$$

so finden sich zu jedem der beiden Werte von y zwei Werte, die zueinander reziprok sein müssen, da die oben aufgestellten Gleichungen symmetrisch sind.

Ähnlich verfährt man bei der Gleichung

$$ax^4 + bx^3 + cx^2 - bx + a = 0,$$

bei der man nur $x - \frac{1}{x} = y$ zu setzen hat. Für x erhält man dann ebenfalls im ganzen nur Werte, die paarweise zueinander reziprok sind, dabei aber das entgegengesetzte Zeichen erhalten.

17. Die echt symmetrische Gleichung des fünften Grades

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 + cx^2 + bx + a = 0$$

läßt sich in die Form

$$a(x^5 + 1) + bx(x^3 + 1) + cx^2(x + 1) = 0$$

bringen, welche erkennen läßt (vgl. Abschn. XI, Nr. 10.), daß links der Faktor $(x + 1)$ herausgezogen werden kann, der die Wurzel $x_1 = -1$ liefert.

Bei der unecht symmetrischen Gleichung

$$ax^5 + bx^4 + cx^3 - cx^2 - bx - a = 0,$$

die sich in die Form

$$a(x^5 - 1) + bx(x^3 - 1) + cx^2(x - 1) = 0$$

bringen läßt, ist es links (vgl. Abschn. XI, Nr. 9.) möglich, den Faktor $(x - 1)$ herauszuziehen, der die Wurzel $x_1 = 1$ liefert.

Die Nullsetzung des Klammerfaktors liefert in beiden Fällen eine symmetrische Gleichung des 4. Grades.

18. Fehlen in einer Gleichung vierten Grades die Glieder mit ungeraden Potenzen von x, hat man z. B. die Gleichung

$$x^4 - 13x^2 + 36 = 0,$$

so wird man $x^2 = u$, $x^4 = u^2$ setzen und zunächst die quadratische Gleichung

$$u^2 - 13u + 36 = 0$$

Digitized by Google

lösen, aus der $u_1 = 9$, $u_2 = 4$ folgt. Nun war $u = x^2$, $x = +\sqrt{u}$, woraus wegen der zwei Werte für u die vier Werte für x

$$x_1 = +3,\ x_2 = -3,\ x_3 = +2,\ x_4 = -2$$

folgen.

19. Ähnlich kann man bei der Gleichung

$$(x^2 + ex)^2 + k(x^2 + ex) + l = 0$$

verfahren. Man wird zunächst $x^2 + ex = u$ setzen und die Gleichung

$$u^2 + ku + l = 0$$

lösen, die die Wurzeln u_1 und u_2 hat. Dann müssen noch die beiden Gleichungen

$$x^2 + ex = u_1,\quad x^2 + ex = u_2$$

gelöst werden, von denen jede zwei der 4 Schlußwerte von x liefert.

Auf solche Form lassen sich manche Gleichungen leicht bringen, z. B. die Gleichung

$$x^4 - 16x^3 + 86x^2 - 176x + 105 = 0,$$

die man unter Zerlegung des dritten Gliedes auch in die Form

$$x^4 - 16x^3 + 64x^2 + 22x^2 - 176x + 105 = 0$$
$$(x^2 - 8x)^2 + 22(x^2 - 8x) + 105 = 0$$

bringen kann. Hier ist $u_1 = -15$, $u_2 = -7$, $e = -8$,

also entweder $x^2 - 8x = -15$, $x^2 - 8x + 15 = 0$

oder $x^2 - 8x = -7$, $x^2 - 8x + 7 = 0$,

woraus $x_1 = 5$, $x_2 = 3$, $x_3 = 7$, $x_4 = 1$ folgt.

In den beiden Gleichungen $x^2 + ex = u_1$ und $x^2 + ex = u_2$ ergeben die Wurzeln dieselbe Summe, nämlich $-e$, im vorliegenden Fall ist $5 + 3 = 7 + 1 = 8$. Hat man andererseits vier Zahlen von der Art, daß die Summe zweier derselben gleich der Summe der beiden anderen ist, so lassen sich die Zahlen als Wurzeln einer Gleichung des vierten Grades darstellen, die sich in der angegebenen Weise lösen läßt. So ist z. B. $5 + 2 = 4 + 3$. Man hat in diesem Falle:

$$(x-5)(x-2)(x-4)(x-3) = (x^2 - 7x + 10)(x^2 - 7x + 12)$$
$$x^4 - 14x^3 + 71x^2 - 154x + 120 = 0$$
$$(x^2 - 7x)_1 = -10;\quad (x^2 - 7x)_2 = -12$$
$$x_1 = 5;\quad x_2 = 2;\quad x_3 = 4;\quad x_4 = 3.$$

20. Das Verfahren, bei dem zunächst eine Hilfsgröße u bestimmt wird, tut auch in anderen Fällen gute Dienste. So wird man bei der Gleichung

$$\left(\frac{x+1}{x-2}\right)^2 - 7\left(\frac{x+1}{x-2}\right) + 12 = 0,$$

Digitized by Google

die auch in bezug auf x nur quadratisch ist, statt mit $(x-2)^2$ zu multiplizieren und die vorhandenen Produkte aufzulösen, lieber $\frac{x+1}{x-2}=u$ setzen, aus der Gleichung

$$u^2-7u+12=0$$

die Werte $u_1=4$, $u_2=3$ herleiten und nun aus den beiden Gleichungen

$$\frac{x+1}{x-2}=4;\quad \frac{x+1}{x-2}=3$$

folgern: $x_1=3$, $x_2=3{,}5$.

In der Gleichung $\sqrt[3]{x}-3\sqrt[6]{x}+2=0$ wird man $\sqrt[6]{x}=u$, $\sqrt[3]{x}=u^2$ setzen, worauf man $u_1=2$; $u_2=1$; $x_1=u_1^3=8$; $x_2=u_2^3=1$ findet.

Hierher gehören auch Gleichungen von der Form $ax^{2n}+bx^n+c=0$, ferner Aufgaben von der Form $\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^n+p\left(\frac{b+x}{a+x}\right)^n=q$, in denen man $\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^n=u$; $\left(\frac{b+x}{a+x}\right)^n=\frac{1}{u}$ setzen wird.

21. Gleichungen, in denen eine Quadratwurzel vorkommt, lassen sich häufig auf doppelte Weise auf quadratische Gleichungen zurückführen. So kann man in der Gleichung

$$x+7\sqrt{x}=18$$

entweder $\sqrt{x}=u$, also $x=u^2$ setzen und nach Nr. 20. verfahren, oder auch die Wurzel durch Quadratur fortschaffen, nachdem man sie isoliert hat

$$7\sqrt{x}=18-x \qquad 49x=324-36x+x^2$$
$$x^2-85x+324=0 \qquad x_1=81 \qquad x_2=4.$$

Beide Wege sind ebenfalls möglich bei Aufgaben von der Art

$$\sqrt{x-3}+7x=87,$$

wo man $\sqrt{x-3}=u$, $x-3=u^2$, also $x=u^2+3$ setzen kann.

Kommen mehrere Quadratwurzeln vor, so kann man nur den Weg der Vereinfachung durch Quadratur wählen, doch sind dann mehrere Quadraturen nacheinander erforderlich. So hat man bei der Gleichung

$$\sqrt{x+3}+\sqrt{2x-3}=6$$

nach der ersten Quadratur die Gleichung

$$x+3+2\sqrt{(x+3)(2x-3)}+2x-3=36$$
$$2\sqrt{(x+3)(2x-3)}=36-3x,$$

worauf nur noch eine Wurzel durch Quadratur zu beseitigen ist

Digitized by Google

$$4(x+3)(2x-3) = (36-3x)^2$$
$$8x^2 + 12x - 36 = 1296 - 216x + 9x^2$$
$$x^2 - 228x + 1332 = 0$$
$$x = 114 \pm \sqrt{114^2 - 1332} = 114 \pm 103$$
$$x_1 = 6 \quad x_2 = 222.$$

B. Aufgaben.

Erste Stufe.

1. $x^2 = a \qquad x^2 = m^2$
2. $x^2 = 16 \qquad x^2 = 25$
3. $x^2 = 289 \qquad x^2 = 2809$
4. $x^2 = 3{,}61 \qquad x^2 = 53{,}29$
5. $7x^2 = 0{,}9583$
6. $5x^2 = 0{,}011045$
7. $\frac{2}{5}x^2 = 1536$
8. $\frac{4}{5}x^2 = 1479{,}2$
9. $9x^2 - 36 = 5x^2$
10. $7x^2 - 8 = 9x^2 - 10$
11. $ax^2 + b = cx^2 + b$
12. $ax^2 - bx^2 = cx^2 - dx^2$
13. $ax^2 + b = bx^2 + a$
14. $a(x^2 + b) = b(x^2 + a)$
15. $(2x+5)(2x-5) = 11$
16. $(3x-4)(3x+4) = 65$
17. $\frac{13x-3}{13-3x} = \frac{7x+1}{7+x}$
18. $\frac{7x+5}{7+5x} = \frac{9x-8}{9-8x}$
19. $\frac{11x-25}{55-5x} = \frac{13x-5}{65-x}$
20. $\frac{11x+9}{3x+33} = \frac{15x+3}{x+45}$
21. $(7+x)^2 + (7-x)^2 = 130$
22. $(3x-5)^2 + (3x+5)^2 = 122$
23. $(2x-3)(3x-4) - (x-13)(x-4) = 40$
24. $(5x-7)(3x+8) - (x-10)(9-x) = 1634$
25. $(4+x)(3-x)(2-x) - (x+2)(x+3)(x-4) = 30$
26. $(5-x)(3-x)(1+x) + (5+x)(3+x)(1-x) = 16$
27. $8(2-x)^2 = 2(8-x)^2$
28. $27(3-x)^2 = 3(27-x)$
29. $\frac{x^2-5x+11}{x^2-7x+83} = \frac{5}{7}$
30. $\frac{x^2-3x-19}{x^2-8x+31} = \frac{3}{8}$

---

31. $x^2 - 2ax = b$
32. $x^2 + ax - b = 0$
33. $x^2 - 4x = 5$
34. $x^2 - 6x = 16$

34_1. $x^2 \pm 10x \pm 24 = 0$*)
34_2. $x^2 \pm 13x \pm 30 = 0$

*) Jede der Aufgaben 34_1. bis 34_{11}. umfaßt 4 Fälle je nach der Wahl der Vorzeichen; so umfaßt z. B. die Aufgabe 34_1. die vier Einzelaufgaben

$$x^2 + 10x + 24 = 0; \quad x^2 - 10x + 24 = 0; \quad x^2 + 10x - 24 = 0;$$
$$x^2 - 10x - 24 = 0.$$

Die Wurzeln aller dieser Gleichungen fallen in jedem der vier demnach möglichen Fälle ganzzahlig aus.

Digitized by Google

34_3. $x^2 \pm 15x \pm 54 = 0$
34_4. $x^2 \pm 17x \pm 60 = 0$
34_5. $x^2 \pm 25x \pm 84 = 0$
34_6. $x^2 \pm 20x \pm 96 = 0$
34_7. $x^2 \pm 26x \pm 120 = 0$
34_8. $x^2 \pm 29x \pm 210 = 0$
34_9. $x^2 \pm 34x \pm 240 = 0$
34_{10}. $x^2 \pm 39x \pm 270 = 0$
34_{11}. $x^2 \pm 50x \pm 336 = 0$
35. $x^2 - 2x = 1$*)
36. $x^2 - 4x = 1$
37. $x^2 - 14x + 33 = 0$
38. $x^2 - 10x = 39$
39. $x^2 - 2x + 2 = 0$
40. $x^2 - 4x + 5 = 0$
41. $x^2 - 16x + 63 = 0$
42. $x^2 - 2x = 80$
43. $x^2 - 20x + 99 = 0$
44. $x^2 + 77 = 18x$
45. $x^2 + 6x = 13$
46. $x^2 + 8x = 17$
47. $x^2 + 4x + 1 = 0$
48. $x^2 + 6x + 2 = 0$
49. $x^2 + x = 90$
50. $x^2 - 9x = 190$
51. $x^2 + 3x = 270$
52. $x^2 + x = 306$
53. $x^2 + x = \frac{5}{16}$
54. $x^2 - x + \frac{6}{25} = 0$
55. $x^2 - 4x = 0$
56. $x^2 - 5x = 0$
57. $x^2 + x = 0$
58. $x^2 = x$
59. $x^2 - ax = 0$
60. $x^2 - ax = bx$
61. $x^2 - \frac{1}{2}x = 3$
62. $x^2 + \frac{1}{3}x = 8$
63. $x^2 - \frac{4}{5}x = 21$
64. $x^2 - \frac{4}{7}x = 45$
65. $x^2 + 12 = 18\frac{2}{3}x$
66. $x^2 + 6 = 10\frac{3}{5}x$
67. $x^2 + 14 = 16\frac{7}{8}x$
68. $x^2 + 2 = 3\frac{5}{12}x$
69. $x^2 - 5{,}2x + 1 = 0$
70. $x^2 + 0{,}06 = 0{,}5x$
71. $x^2 + 1{,}8 = 4{,}1x$
72. $x^2 + 1{,}9x = 11$
73. $ax^2 - 2bx = c$
74. $ax^2 + bx + c = 0$
75. $3x^2 - 2x = 85$
76. $3x^2 + 2x = 133$
77. $6x^2 + 40 = 31x$
78. $10x^2 + 3 = 11x$
79. $5x^2 + 24 = 43x$
80. $12x^2 + 63 = 55x$
81. $56x^2 + 56 = 113x$
82. $25x^2 + 91 = 100x$
83. $3x^2 + 28 = 27{,}5x$
84. $2x^2 + 11{,}7x = 16{,}1$
85. $5x^2 - 5{,}3x = 6{,}66$
86. $17{,}29 = 5x^2 + 0{,}4x$
87. $11{,}1x = 4{,}03 - 4x^2$
88. $3x^2 = 3{,}74 - 0{,}1x$
89. $15{,}9x = 2x^2 + 12{,}07$
90. $12{,}07 = 19{,}3x - 6x^2$

*) Die vorkommenden irrationalen Wurzeln sollen auf drei Dezimalstellen berechnet werden.

Digitized by Google

91. $x^2 - 7{,}583x + 4{,}081 = 0$

92. $x^2 - 7{,}777x + 14{,}331 = 0$

93. $x^2 + 12{,}223x - 10{,}101 = 0$

94. $5x^2 - 5{,}444x + 0{,}8888 = 0$

95. $7x^2 - 8{,}0589x + 2{,}1681 = 0$

96. $403x^2 - 574{,}165x + 124{,}683 = 0$*)

97. $391x^2 - 133{,}31x - 575{,}21 = 0$

98. $247x^2 - 243{,}59x - 2775{,}95 = 0$.

99. Zerlege nachstehende quadratische Ausdrücke in Faktoren. Die Faktoren der Ausdrücke 1. bis 20. sind rational; die Faktoren in 21. bis 24. sind irrational; die Faktoren in 25. und 26. sind imaginär. Lassen sich die Faktoren nicht nach A, 6 finden, so muß man sie nach A, 7 suchen.

1) $x^2 - 7x + 12$
2) $x^2 - 8x + 12$
3) $x^2 - x - 12$
4) $x^2 + x - 12$
5) $x^2 - 8x - 20$
6) $x^2 - 19x - 20$
7) $x^2 - 10x + 24$
8) $x^2 + 11x + 24$
9) $2x^2 - 7x + 3$
10) $6x^2 + x - 12$
11) $6x^2 + x - 40$
12) $6x^2 - 13x + 6$
13) $3a^2 - 10ab + 3b^2$
14) $2a^2 + ab - 3b^2$
15) $2x^2 + 5xy + 2y^2$
16) $6x^2 - 5xy - 6y^2$
17) $6 + x - x^2$
18) $5x - 6 - x^2$
19) $5 + 4x - x^2$
20) $6x - 5 - x^2$
21) $x^2 - 7x + 11$
22) $x^2 - 5x - 2$
23) $x^2 + 9x + 19$
24) $x^2 + 3x - 9$
25) $x^2 + 1$
26) $x^2 + 2x + 2$.

100. Bringe die Gleichungen 33., 34., 41., 42., 49.—52., welche rationale Wurzeln haben, auf 0, wenn sie nicht schon auf 0 gebracht sind, zerlege die linke Seite nach Theorie 5. in Faktoren, und gib mittels der Faktoren die Wurzeln der Gleichungen an.

101. Wie heißen die quadratischen Gleichungen in ihrer einfachsten Form, welche folgende Wurzeln haben:

*) Die Gleichung ist durch 403 zu dividieren, die Quotienten sind auf 4 Dezimalstellen zu berechnen. Der durch die Lösungsformel sich ergebende Zahlenausdruck ist ohne Anwendung der Logarithmen mittels abgekürzter Multiplikation zu berechnen.

Digitized by Google

1) 2, 2	2) 3, 4	3) 1, 1	4) 0, 1
5) 2, -3	6) 4, -3	7) -3, -5	8) -8, -7
9) ± 5	10) 3, $\frac{2}{3}$	11) $\frac{3}{2}$, $\frac{2}{3}$	12) $\pm\frac{3}{4}$
13) $\frac{3}{2}$, $-\frac{4}{3}$	14) $-\frac{3}{2}$, $-\frac{2}{3}$	15) 0,2, 0,5	16) 0,5, 8
17) $2\frac{1}{2}$, $3\frac{1}{3}$	18) $1\frac{1}{2}$, $2\frac{1}{2}$	19) $\pm 1\frac{1}{2}$	20) 0, $1\frac{1}{2}$?

102. Untersuche die Beschaffenheit der Wurzeln folgender Gleichungen, ohne die Gleichungen aufzulösen:

1) $x^2 - 4x - 21 = 0$	2) $x^2 - 6x + 9 = 0$
3) $x^2 - 8x + 17 = 0$	4) $x^2 - 9x + 14 = 0$
5) $x^2 - 1 = 0$	6) $x^2 + 1 = 0$
7) $x^2 + 10x + 24 = 0$	8) $x^2 - 3x + 1 = 0$
9) $x^2 - 5x - 7 = 0$	10) $x^2 + 3x - 8 = 0$.

Zweite Stufe.

103. $(6x - 5)(5x - 4) - (4x - 3)(3x - 2) = 22$

104. $(3x - 7)(2x - 9) - (5x - 12)(x - 6) = (x - 2)(2x - 3)$

105. $(5x - 1)(3x + 5) - (7x - 9)(4x + 3) = (x - 6)(3x + 7)$

106. $(1 + x)(2 + x)(3 + x) + (7 - x)(8 - x)(9 - x) = 360$

107. $(x - 3)(x - 4)(x - 5) - (x - 6)(x - 7)(x - 8) = 6$

108. $\frac{5x^2 - 72x + 448}{3x^2 + 56x - 320} = \frac{3}{5}$

109. $\frac{3x^2 - 8x + 15}{7x^2 - 15x + 27} = \frac{2}{5}$

110. $\frac{2x^3 - 3x + 10}{3x^3 + 5x^2 - 14} = \frac{2}{3}$

111. $\frac{3x^3 - 7x^2 - 6}{4x^3 - 31x + 1} = \frac{3}{4}$

112. $\frac{3x^3 - 5x^2 - 8}{x^2 + 2x - 1} = 3x - 7$

113. $\frac{2x^3 - 9x^2 + 12}{x^2 - 5x + 3} = 2x - 7$

114. $\frac{x^2 - 3x + 7}{2x^2 - 5x + 3} = \frac{x + 3}{2x - 3}$

115. $\frac{2x^2 - 7x + 5}{3x^2 - 7x - 8} = \frac{2x + 7}{3x + 8}$

116. $\left(\frac{5 + x}{5 - x}\right)^2 = \frac{x + 8}{x - 8}$

117. $\frac{5 + x}{5 - x} = \sqrt{\frac{x + 9}{x - 9}}$

118. $\frac{x^2 - 2x - 1}{x^3 - 3x^2 + 2x - 1} = \frac{2x - 4}{2x^2 - 6x + 5}$

119. $\frac{x^2 - 3x - 1}{2x^3 - 5x^2 + 3x - 1} = \frac{3x - 9}{6x^2 - 15x + 7}$

120. $\frac{4x^2 - 10x - 3}{6x^3 - 8x^2 - x + 5} = \frac{6x - 15}{9x^2 - 12x + 5}$

121. $\frac{x^2 - 2x + 3}{x^2 - 3x + 2} = \frac{2x^2 - 4x - 3}{2x^2 - 6x + 1}$

122. $\frac{2x^2 - 4x + 5}{4x^2 - 6x - 3} = \frac{3x^2 - 6x + 5}{6x^2 - 9x - 5}$

Digitized by Google

123. $\frac{5x-9}{x+1} - \frac{39-8x}{12} = \frac{3}{4}(x-1)$

124. $\frac{x-1}{3} - \frac{7x-10}{12} = \frac{5x-6}{2x+2} - \frac{3x+2}{8}$

125. $\frac{19}{2x-9} - \frac{18}{x-4} = 1$

126. $\frac{432}{5x-3} - \frac{175}{2x-1} = 1$

127. $\frac{7x-3}{3x-2} + \frac{7x+3}{3x+2} = 6$

128. $\frac{5x+7}{2x+5} + \frac{5x-7}{2x-5} = 10$

129. $\frac{17x-15}{2x-3} - \frac{3x+30}{3x-2} = 10$

130. $\frac{99+39x}{7-3x} - \frac{22+38x}{5-2x} = 7$

131. $\frac{x-5}{x-7} + \frac{3(x-8)}{2x-15} = 3$

132. $\frac{3x+4}{x+5} + \frac{x-11}{x-1} = 1$

133. $\frac{7x-1}{3x-5} - \frac{5x+1}{5-2x} = 7$

134. $\frac{5x-24}{x+2} - \frac{12-7x}{2x+1} = 6$

135. $\frac{3}{x-4} - \frac{4}{x-2} = \frac{3}{x}$

136. $\frac{6}{x-1} + \frac{10}{x-2} = \frac{7}{x-3}$

137. $\frac{3}{x-2} + \frac{4}{x-3} + \frac{6}{x-7} = 0$

138. $\frac{7}{4x-21} - \frac{4}{3x-14} - \frac{9}{8x-35} = 0$

139. $\frac{4x+1}{2x-1} - \frac{3x}{3x-2} + \frac{7x+5}{1-7x} = 0$

140. $\frac{2x-3}{2(x-3)} + \frac{x-1}{2-x} - \frac{2}{3x-10} = 0$

141. $\frac{5x+7}{x-1} + \frac{3x-5}{4-x} + \frac{2(x-4)}{6-x} = 0$

142. $\frac{3}{x-1} - \frac{3}{x-2} - \frac{3}{x-3} + \frac{3}{x-4} = 0$

143. $\frac{6}{x-1} + \frac{3}{x+1} + \frac{1}{x-3} = \frac{30}{3x-1}$

144. $\frac{6}{x-2} + \frac{14}{2x-1} - \frac{33}{3x-1} = \frac{2}{x-3}$

145. $\frac{3}{x-1} - \frac{4}{x+2} + \frac{3}{x-3} = \frac{2}{x-4}$

146. $\frac{x-5}{x-6} + \frac{x+2}{x-4} - \frac{x-1}{x-3} = \frac{x}{x-5}$

147. $\frac{2x+5}{2(x-1)} + \frac{2x-5}{2(x-3)} - \frac{x+1}{x-2} = \frac{x+3}{x+2}$

148. $\frac{2x+9}{2x-1} + \frac{3x-4}{3(x-2)} - \frac{x+4}{x-1} = \frac{3x+5}{3(x+1)}$

---

149. $x^2 + ab = (a+b)x$

150. $x^2 - ax + a = 1$

151. $x^2 + (a-1)x = a$

152. $x^2 - ax + ab = b^2$

Digitized by Google

153. $x^2 - b^2 = a(2x - a)$ 154. $x^2 + a^2 = 2ax + 1$

155. $x^2 - 2(a + b)x + 10ab = 3(a^2 + b^2)$

156. $x^2 - (a + b)x - 1 = a - (a + 1)b$

157. $x^2 - 3(a - b)x + 2(a^2 + b^2) = 5ab$

158. $(1 - 2ax)^2 + (2bx - 1)^2 = 2$

159. $(ax - 1)^2 + \frac{a+b}{a-b} = (bx + 1)^2$

---

160. $(x - 5)(x - 3) = 0$*) 161. $(3x - 2)(2x - 3) = 0$

162. $(x - a)(x - b) = 0$ 163. $(ax - 1)(x - a) = 0$

164. $a^2 - x^2 = (a - x)^2$ 165. $1 - x^2 = (1 + x)^2$

166. $a^2 - x^2 = m(a - x)^2$ 167. $3(1 - x)^2 = x^2 - 1$

168. $(5 - x)(x - 9) = (5 - x)(7 - x)$

169. $(3x - 2)(2x - 3) = (3x - 2)(3x - 4)$

170. $(7 - x)(5x - 7) + (x - 7)(x + 1) = 0$

171. $(x - a)(m - n) = (x - a)(x - n)$

172. $(a - x)(x - b) = (x - a)(x - c)$

173. $\frac{9-x}{x-6} = \frac{x-9}{2+x}$ 174. $\frac{a-x}{b-x} = \frac{c-x}{x-b}$

175. $\frac{a}{x} - b = \frac{a}{b} - x$ 176. $a\left(\frac{x}{m} - n\right) = x\left(\frac{x}{n} - m\right)$

177. $m\left(\frac{x}{a} - b\right) = n\left(\frac{1}{a} - \frac{b}{x}\right)$ 178. $a\left(\frac{1}{a} - \frac{b}{x}\right) = b\left(\frac{x}{b} - a\right)$

179. $\left(\frac{x}{m} - n\right)\left(\frac{x}{a} - b\right) = \left(\frac{x}{n} - m\right)\left(\frac{x}{b} - a\right)$ Eigurch.

---

180. $(a - b)^2 = (a - x)^2$ 181. $x(a - x) = b(a - b)$

182. $\frac{x-m}{a-m} = \frac{a}{x}$ 183. $\frac{a-x}{a-1} = \frac{b-1}{b-x}$

184. $\frac{a^2+x^2}{a^2+b^2} = \frac{a+x}{a+b}$ 185. $\frac{x-a}{1-a} = 2 - \frac{1}{x}$

186. $\frac{a-b+x}{a+b-x} = \frac{x}{b}$ 187. $\frac{a^2-ax+x^2}{a^2-ab+b^2} = \frac{a-x}{a-b}$

188. $x + \frac{1}{3} = \frac{1}{x} + 3$ 189. $x - 5 = \frac{1}{5} - \frac{1}{x}$

190. $x + \frac{1}{x} = 7 + \frac{1}{7}$ 191. $x - \frac{1}{x} = 3\frac{3}{4}$

*) Die Auflösung durch Zerlegung ist mit der gewöhnlichen Auflösung zu vergleichen. Ähnliches gilt für die folgenden Aufgaben.

Digitized by Google

192. $x - \frac{8}{5} = \frac{5}{8} - \frac{1}{x}$

193. $a - x = \frac{1}{x} - \frac{1}{a}$

194. $x - \frac{a}{b} = \frac{b}{a} - \frac{1}{x}$

195. $x - \frac{1}{x} = \frac{a-1}{a+1} - \frac{a+1}{a-1}$

196. $x^3 + (a-x)^3 = a^3$

197. $x + \sqrt[3]{a^3 - x^3} = a$

198. $(x-1)^3 = x^3 - 1$

199. $(x-1)^3 = x(x^3 - 1)$

200. $(a+x)^3 + (a-x)^3 = 8a^3$

201. $(7+x)^3 + (7-x)^3 = 1064$

202. $(x+5)^3 - (x-5)^3 = 280$

203. $(x-1)^3 + (5-x)^3 = 28$

204. $(x+2)^3 - (x-7)^3 = 189$

205. $(2x+3)^3 - (2x-3)^3 = 342$

206. $(3x+2)^3 + (2-3x)^3 = 124$

207. $(\frac{1}{3}x + \frac{5}{2})^3 - (\frac{1}{3}x - \frac{5}{2})^3 = (x + \frac{7}{2})^2 + (x - \frac{7}{2})^2$

208. $(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}x)^3 + (\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x)^3 = (\frac{3}{2}x + \frac{7}{2})^2 + (\frac{3}{2}x - \frac{7}{2})^2$

209. $(a-x)^3 + (x-b)^3 = a^3 - b^3$

210. $(a-x)^3 + (x-b)^3 = (a-b)^3$

211. $(a-x)^3 + (b+x)^3 = \frac{1}{4}(a+b)^3$

212. $x - \sqrt[3]{x^3 - 7} = 1$

213. $x + \sqrt[3]{35 - x^3} = 5$

214. $\frac{x^3 + (a-x)^3}{x^2 + (a-x)^2} = a$

215. $\frac{(a-x)^3 + x^3}{(a-2x)^2} = a$

216. $\frac{(a-x)^3 + (x-b)^3}{(a-x)^2 + (x-b)^2} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2}$

217. $\frac{(a-x)^3 + (x-b)^3}{(a-x)^2 + (x-b)^2} = a - b$

218. $\frac{(a-x)^3 + (x-b)^3}{(a+b-2x)^2} = a - b$

219. $\frac{(a-x)^3 + (x-b)^3}{(a+b-2x)^2} = \frac{a^3 - b^3}{(a+b)^2}$

220. $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = \frac{9}{7}$

221. $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \frac{a^2}{b^2}$

222. $\frac{3a+x}{3a-x} - \frac{b+3x}{b-3x} = \frac{9a-b}{3a-b}$

---

223. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} = \frac{x+1}{\sqrt{x+4}}$

224. $\sqrt{x+3} - \sqrt{5x-25} = \frac{8}{\sqrt{x+3}}$

225. $\sqrt{x+15} - \sqrt{5x-77} = \frac{16}{\sqrt{x+15}}$

226. $\sqrt{x+5} - \frac{24}{\sqrt{x+5}} + \sqrt{5x-63} = 0$

Digitized by Google

227. $\sqrt{x+12} - \frac{10}{\sqrt{x+12}} = \sqrt{5x-56}$

228. $\sqrt{x-7} + \frac{4}{\sqrt{x-7}} = \sqrt{2x+9}$

229. $\sqrt{2x+7} - \sqrt{x-5} = \frac{6}{\sqrt{x-5}}$

230. $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \frac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}$

231. $\sqrt{3a-4b+5x} - \sqrt{a+x} = \frac{a-b+x}{\sqrt{a+x}}$

232. $\sqrt{a+4b+x} - 2\sqrt{a+4b-x} = \frac{3a-4b+x}{\sqrt{a+4b+x}}$

233. $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{2a}$

234. $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = 2\sqrt{a}$

$\sqrt{-3x}$

$\sqrt{5+x}$

$\sqrt{-x}$

$\sqrt{+20}$

$\sqrt{x+6}$

$\sqrt{x-3}$

$\sqrt{-4x} = 4\sqrt{b}$

$\sqrt{4a-3b} = 2\sqrt{x+b}$

$\sqrt{+3a-6b} = 4\sqrt{2x-a-b}$

$\sqrt{-x} = \sqrt{21a+3b+3x}$

$\sqrt{a}$

$\sqrt{(9+x)(21-x)} = 6.$

Digitized by Google

192. $x - \frac{8}{5} = \frac{5}{8} - \frac{1}{x}$

193. $a - x = \frac{1}{x} - \frac{1}{a}$

194. $x - \frac{a}{b} = \frac{b}{a} - \frac{1}{x}$

195. $x - \frac{1}{x} = \frac{a-1}{a+1} - \frac{a+1}{a-1}$

196. $x^3 + (a-x)^3 = a^3$

197. $x + \sqrt[3]{a^3 - x^3} = a$

198. $(x-1)^3 = x^3 - 1$

199. $(x-1)^3 = x(x^2-1)$

200. $(a+x)^3 + (a-x)^3 = 8a^3$

201. $(7+x)^3 + (7-x)^3 = 1064$

202. $(x+5)^3 - (x-5)^3 = 280$

203. $(x-1)^3 + (5-x)^3 = 28$

204. $(x+2)^3 - (x-7)^3 = 189$

205. $(2x+3)^3 - (2x-3)^3 = 342$

206. $(3x+2)^3 + (2-3x)^3 = 124$

207. $(\frac{1}{3}x + \frac{5}{2})^3 - (\frac{1}{3}x - \frac{5}{2})^3 = (x + \frac{7}{2})^2 + (x - \frac{7}{2})^2$

208. $(\frac{5}{2} + \frac{1}{2}x)^3 + (\frac{5}{2} - \frac{1}{2}x)^3 = (\frac{3}{2}x + \frac{7}{2})^2 + (\frac{3}{2}x - \frac{7}{2})^2$

209. $(a-x)^3 + (x-b)^3 = a^3 - b^3$

210. $(a-x)^3 + (x-b)^3 = (a-b)^3$

211. $(a-x)^3 + (b+x)^3 = \frac{1}{4}(a+b)^3$

212. $x - \sqrt[3]{x^3 - 7} = 1$

213. $x + \sqrt[5]{35 - x^5} = 5$

214. $\frac{x^3 + (a-x)^3}{x^2 + (a-x)^2} = a$

215. $\frac{(a-x)^3 + x^3}{(a-2x)^2} = a$

216. $\frac{(a-x)^3 + (x-b)^3}{(a-x)^2 + (x-b)^2} = \frac{a^3 - b^3}{a^2 + b^2}$

217. $\frac{(a-x)^3 + (x-b)^3}{(a-x)^2 + (x-b)^2} = a - b$

218. $\frac{(a-x)^3 + (x-b)^3}{(a+b-2x)^2} = a - b$

219. $\frac{(a-x)^3 + (x-b)^3}{(a+b-2x)^2} = \frac{a^3 - b^3}{(a+b)^2}$

220. $\frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 1}{x^3 + 2x^2 + 2x + 1} = \frac{9}{7}$

221. $\frac{x^3 + x^2 - x - 1}{x^3 - 3x^2 + 3x - 1} = \frac{a^2}{b^2}$

222. $\frac{3a+x}{3a-x} - \frac{b+3x}{b-3x} = \frac{9a-b}{3a-b}$

---

223. $\sqrt{x+4} - \sqrt{x-4} = \frac{x+1}{\sqrt{x+4}}$

224. $\sqrt{x+3} - \sqrt{5x-25} = \frac{8}{\sqrt{x+3}}$

225. $\sqrt{x+15} - \sqrt{5x-77} = \frac{16}{\sqrt{x+15}}$

226. $\sqrt{x+5} - \frac{24}{\sqrt{x+5}} + \sqrt{5x-63} = 0$

Digitized by Google

227. $\sqrt{x+12} - \frac{10}{\sqrt{x+12}} = \sqrt{5x-56}$

228. $\sqrt{x-7} + \frac{4}{\sqrt{x-7}} = \sqrt{2x+9}$

229. $\sqrt{2x+7} - \sqrt{x-5} = \frac{6}{\sqrt{x-5}}$

230. $\sqrt{x+a} - \sqrt{x-a} = \frac{x+a-b}{\sqrt{x+a}}$

231. $\sqrt{3a-4b+5x} - \sqrt{a+x} = \frac{a-b+x}{\sqrt{a+x}}$

232. $\sqrt{a+4b+x} - 2\sqrt{a+4b-x} = \frac{3a-4b+x}{\sqrt{a+4b+x}}$

233. $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = \sqrt{2a}$

234. $\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x} = 2\sqrt{a}$

235. $\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b} = \sqrt{a-b}$

236. $\sqrt{7-x} + \sqrt{x-5} = \sqrt{2}$

237. $\sqrt{10+x} - \sqrt{10-x} = 2$

238. $\sqrt{37+x} + \sqrt{37-x} = 12$

239. $2\sqrt{5+x} + \sqrt{9-3x} = \sqrt{41-3x}$

240. $\sqrt{37-3x} - \sqrt{13-3x} = 2\sqrt{5+x}$

241. $\sqrt{5+x} - \sqrt{25-3x} = 2\sqrt{5-x}$

242. $\sqrt{x-2} + \sqrt{2x-2} = \sqrt{3x+20}$

243. $2\sqrt{2x-6} - 3\sqrt{x-10} = \sqrt{x+6}$

244. $\sqrt{13x-30} - 3\sqrt{x-2} = 2\sqrt{x-3}$

245. $\sqrt{a+4b+4x} - \sqrt{a+4b-4x} = 4\sqrt{b}$

246. $\sqrt{5x+4a-3b} + \sqrt{5x-4a-3b} = 2\sqrt{x+b}$

247. $\sqrt{14x-13a+2b} - \sqrt{6x+3a-6b} = 4\sqrt{2x-a-b}$

248. $\sqrt{a+7b-x} + 2\sqrt{7a+b-x} = \sqrt{21a+3b+3x}$

249. $\frac{\sqrt{2x+a} + \sqrt{2x-2a}}{\sqrt{2x+a} - \sqrt{2x-2a}} = \frac{3a}{2x+a}$

250. $\sqrt{(39-x)(21+x)} - \sqrt{(39+x)(21-x)} = 6.$

Digitized by Google

Dritte Stufe.

251. $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$ 252. $x^4 + 9 = 10x^2$

253. $x^4 + 100 = 29x^2$ 254. $x^4 + 16 = 17x^2$

255. $(x^2 - 9)(x^2 - 16) = 15x^2$ 256. $(x^2 - 10)(x^2 - 18) = 13x^2$

257. $(x^2 - 5)^2 + (x^2 - 8)^2 = 17$ 258. $(x^2 - 3)^2 + (x^2 - 5)^2 = 52$

259. $x - 6\sqrt{x} + 5 = 0$ 260. $x + 10 = 7\sqrt{x}$

261. $x - 3\sqrt{x} = 28$ 262. $x + \sqrt{x} = 30$

263. $(\sqrt{x} - 5)(\sqrt{x} - 7) = 3$ 264. $(5 - \sqrt{x})^2 = 2(7 + \sqrt{x})$

265. $x + ab = b^2 + a\sqrt{x}$ 266. $x + a^2 = b^2 + 2a\sqrt{x}$

267. $(4 - \sqrt[4]{x})(5 - \sqrt[4]{x}) = 2(7 - \sqrt{x})$

268. $(\sqrt[4]{x} - 3)^2 + (\sqrt[4]{x} - 2)^2 = 1$

269. $(2x - 5)^2 - 2(2x - 5) = 3$

270. $(3x - 7)^2 - 4(3x - 7) = 32$

271. $\left(\frac{a+x}{a-x}\right)^2 + \frac{7}{2} \cdot \frac{a+x}{a-x} + 3 = 0$

272. $\frac{17}{6} \cdot \frac{a+x}{b+x} - \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^2 = 2$

273. $x - 7\sqrt{51 - x} = 33$ 274. $4\sqrt{75 - x} = x - 54$

275. $x + 126 = 20\sqrt{35 + x}$ 276. $19\sqrt{47 + x} = 135 + x$

277. $\frac{3x - 16}{2x - 12} + \frac{2x - 12}{3x - 16} = \frac{5}{2}$ 278. $\frac{2x - 6}{3x - 4} + \frac{3x - 4}{2x - 6} = \frac{17}{4}$

279. $\frac{3x - 15}{5x - 9} + \frac{5x - 9}{3x - 15} = \frac{10}{3}$ 280. $\frac{x - a}{x - b} + \frac{x - b}{x - a} = 2\frac{1}{2}$

281. $\sqrt{\frac{3x+6}{7x-3}} + \sqrt{\frac{7x-3}{3x+6}} = \frac{13}{6}$ 282. $\sqrt{\frac{3x-4}{x-5}} + \sqrt{\frac{x-5}{3x-4}} = \frac{5}{2}$

283. $\frac{x - a}{x - b} + \frac{x - b}{x - a} = \frac{a}{b} + \frac{b}{a}$

284. $\frac{x+1}{x-1} + \frac{a-b}{a+b} = \frac{x-1}{x+1} + \frac{a+b}{a-b}$

285. $(x - a)^2 + (x - a)(b - x) - 2(b - x)^2 = 0$

286. $(x - a)^2 + (x - b)^2 = \frac{13}{6}(x - a)(x - b)$

287. $2(a - x)^2 - 6(b - x)^2 = (a - x)(b - x)$

288. $\frac{(a+x)^4 + (a-x)^4}{(a+x)^3 + (a-x)^3} = 2a$ 289. $\frac{(a+x)^3 + (a-x)^3}{(a+x)^4 + (a-x)^4} = \frac{a}{a^2 - x^2}$

290. $\frac{(1+x)^5 + (1-x)^5}{(1+x)^2 + (1-x)^2} = 8$ 291. $\frac{(5+x)^5 + (5-x)^5}{(5+x)^3 + (5-x)^3} = 100$

Digitized by Google

292. $\frac{(2+x)^5+(2-x)^5}{(2+x)^4+(2-x)^4}=2$ 293. $\frac{(3+x)^5+(3-x)^5}{(3+x)^4+(3-x)^4}=6$

294. $x^4-ax^2+b^2=0$ 295. $4x^4-4ax^2+b^2=0$

296. $x\sqrt{4a-x^2}=2b$ 297. $x\sqrt{2b-x^2}=2a-b$

298. $x^4-(a+b)x^2+(a-b)^2=0$

299. $x^4-2(a+b)x^2+9(a-b)^2=0$

300. $\frac{x^4+x^2+1}{x^4-x^2+1}=\frac{a}{b}$ 301. $\frac{x^4+14x^2+1}{x^4-14x^2+1}=\frac{a}{b}$

302. $\frac{x^4+10x^2+1}{x^4-10x^2+1}=\frac{a}{a-1}$ 303. $\frac{x^4+6x^2+1}{x^4-6x^2+1}=\frac{a+1}{a}$

---

304. $x^3-1=0$ 305. $x^3+1=0$

306. $(x-1)^3=8$ 307. $(x-1)^3=1$

308. $(x+1)^3=(3-x)^3$ 309. $x^3=(2a-x)^3$

310. $\frac{4x+4}{5x-5}=\frac{(x+1)^2}{x^2+1}$ 311. $\frac{2x-2}{5x+5}=\frac{x^2-1}{x^2+1}$

312. $\frac{8x-8}{17x+17}=\frac{(x-1)^2}{x^2+1}$ 313. $\frac{11a-x}{8a-x}=\frac{121a^2-x^2}{9a^2+x^2}$

314. $3x-x\sqrt{x}=2\sqrt{x}$ 315. $x\sqrt{x}-x=12\sqrt{x}$

316. $\sqrt{x}+\sqrt[4]{x^3}=2\sqrt[4]{x}$ 317. $x-\sqrt[4]{x^3}=6\sqrt{x}$

318. $x^{\frac{3}{5}}+x^{\frac{2}{5}}=6x^{\frac{1}{5}}$ 319. $x^{\frac{7}{2}}+8x^{\frac{1}{2}}=9x^2$

---

320. $x^3+x^2-x-1=0$

321. $x^3-x^2-x+1=0$

322. $x^3-x^2+x-1=0$

323. $x^3-2x^2+2x-1=0$

324. $3x^3-7x^2-7x+3=0$

325. $2x^3-7x^2+7x-2=0$

326. $3x^3-13x^2+13x-3=0$

327. $6x^3-19x^2+19x-6=0$

328. $6x^3-7x^2-7x+6=0$

329. $4x^3-21x^2+21x-4=0$

330. $12x^3-37x^2+37x-12=0$

331. $\frac{a+x}{a-x}=\left(\frac{b+x}{b-x}\right)^2$ 332. $\frac{a+x}{a-x}=\sqrt{\frac{b+x}{b-x}}$

Digitized by Google

333. $\frac{a+x}{b+x} - \frac{a-x}{b-x} = \frac{2x}{a-3b}$

334. $\left(\frac{a+2x}{a-2x}\right)^2 = \frac{a+4b+4x}{a+4b-4x}$

335. $\frac{a(x-b)^3 + b(a-x)^3}{(a-x)^3 + (x-b)^3} = x$

336. $\frac{a(b-x)^3 + b(a-x)^3}{(a-x)^3 + (b-x)^3} = x$

337. $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \frac{a}{x}$

338. $\frac{\sqrt{a+x} + \sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x} - \sqrt{a-x}} = \frac{b}{x}$

339. $\frac{a\sqrt{x-b} + b\sqrt{a-x}}{\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}} = x$

340. $\frac{b\sqrt{a-x} - a\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{b-x}} = x$

341. $\frac{\sqrt{a-x} + \sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{b-x}} = \frac{5a+3b-8x}{5a-3b-2x}$

342. $\frac{\sqrt{a-x} + \sqrt{x-b}}{\sqrt{a-x} - \sqrt{x-b}} = \frac{a-b}{a+b-2x}$

343. $\frac{\sqrt{a+2b-x} + \sqrt{x-a}}{\sqrt{a+2b-x} - \sqrt{x-a}} = \frac{b}{a+b-x}$

344. $\frac{\sqrt{a+b+x} + \sqrt{a+b-x}}{\sqrt{a+b+x} - \sqrt{a+b-x}} = \frac{2a-x}{x-2b}$

345. $\frac{a\sqrt[3]{x-b} + b\sqrt[3]{a-x}}{\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{x-b}} = x$

346. $\frac{a\sqrt[3]{b-x} + b\sqrt[3]{a-x}}{\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{b-x}} = x$

347. $\frac{(a-x)\sqrt[3]{a-x} - (b-x)\sqrt[3]{b-x}}{\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{b-x}} = a-b$

348. $\frac{\sqrt[3]{a-x} - \sqrt[3]{x-b}}{\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{x-b}} = \frac{a+b-2x}{a-b}$

349. $\frac{\sqrt[3]{(a-x)^2} + \sqrt[3]{(b-x)^2}}{\sqrt[3]{(a-x)^2} - \sqrt[3]{(b-x)^2}} = \frac{a+b-2x}{a-b}$

350. $x = \sqrt{a(x+1)} + \sqrt{a-x}$

351. $2x = \sqrt{a^2+2mx} - \sqrt{a^2-2mx}$

352. $\sqrt{(2+x)(x+8)} + \sqrt{(2-x)(x-8)} = 2\sqrt{2x}$

353. $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = \sqrt[3]{2a}$

354. $\sqrt[3]{a+x} + \sqrt[3]{a-x} = 2\sqrt[3]{a}$

355. $\sqrt[3]{14+x} + \sqrt[3]{14-x} = 4$

356. $\sqrt[3]{36+x} + \sqrt[3]{36-x} = 6$

357. $\sqrt[3]{37+x} - \sqrt[3]{x} = 1$

358. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{28-x} = 4$

359. $\sqrt[3]{a-x} + \sqrt[3]{x-b} = \sqrt[3]{a-b}$

Digitized by Google

360. $\sqrt[3]{20+x}-\sqrt[3]{x+1}=1$

361. $\sqrt[3]{30-x}+\sqrt[3]{x+5}=5$

362. $\sqrt[3]{50+x}+\sqrt[3]{22-x}=6$

363. $\dfrac{(a+x)\sqrt[4]{a+x}+(a-x)\sqrt[4]{a-x}}{\sqrt[4]{a+x}+\sqrt[4]{a-x}}=a$

364. $\dfrac{(a+x)\sqrt[4]{a-x}+(a-x)\sqrt[4]{a+x}}{\sqrt[4]{a+x}+\sqrt[4]{a-x}}=a$

365. $\dfrac{(\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x})^3}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}}=a-b$

366. $\dfrac{\sqrt{a-x}+\sqrt{b-x}}{\sqrt{a-x}-\sqrt{b-x}}=\dfrac{2(a-b)}{\sqrt{(a-x)(b-x)}}$

367. $\dfrac{x^3+(a-x^2)\sqrt{a-x^2}}{x+\sqrt{a-x^2}}=c$

368. $\dfrac{a-x^2+x\sqrt{a-x^2}}{x+\sqrt{a-x^2}}=\dfrac{c}{x}$.

Vierte Stufe.

369. $x^4+2x^3-7x^2-8x+12=0$

370. $x^4-4x^3-7x^2+22x+24=0$

371. $x^4-14x^3+71x^2-154x+120=0$

372. $x^4-8x^3+23x^2-28x+12=0$

373. $x^4-12x^3+49x^2-78x+40=0$

374. $x^4-6x^3+13x^2-12x+4=0$

375. $x^4-x^3-1\frac{3}{4}x^2+x+1=0$

376. $x^4-6x^3+11x^2-6x=0$

377. $x^4-4x^3+4x^2-1=0$

378. $x^4-4x^3+8x=165$

379. $(x^2-8x+9)(x^2-8x+13)=12$

380. $(x^2-6x)^2+17(x-1)(x-5)=13$

381. $(x^2-10x+20)^2+11=3(x-5)^2$

382. $(x^2-x+1)^2=3x(x-1)+1$

383. $(x^2-7x)(x^2-3x)+2(7x-6)(x-2)=10x$

384. $(x^2-5x)(x^2-3x)+(2x-3)(3x-2)=7x$

Digitized by Google

385. $x^2 - x + 2\sqrt{x^2 - x - 11} = 14$

386. $x^2 + 3\sqrt{3x^2 - 6x} = 2(x + 6)$

387. $x^2 + 37 = 2x + 9\sqrt{x^2 - 2x + 17}$

388. $x^2 + \frac{1}{4} = x - 2\sqrt{x^2 - x + \frac{1}{4}}$

389. $3x^2 = 3x + 2\sqrt{x^2 - x}$

390. $1 + \sqrt{3x^2 + 3x - 5} = x^2 + x$

391. $x^2 + 24 = 2x + 6\sqrt{2x^2 - 4x + 16}$

392. $x + 5 + \sqrt{13 + 2x - 2x^2} = x^2$

393. $x^2 - 2x - \sqrt{4x^2 - 8x - 101} = 33\frac{1}{4}$

394. $7 + \sqrt{(2x + 1)^2 - 24} = x^2 + x$

395. $x^2 + 5 = 4x + \sqrt{3(x - 2)^2 + 1}$

396. $3 + \sqrt{26 - (2x - 3)^2} = x^2 - 3x$

397. $(x + 2)(x - 4) + 3 = 2\sqrt{2(x - 1)^2 - 7}$

---

398. $x^4 + (x - 1)^4 = 97$

399. $(5 - x)^4 + x^4 = 257$

400. $x - \sqrt[4]{97 - x^4} = 1$

401. $x + \sqrt[4]{337 - x^4} = 7$

402. $(3 - x)^4 + (2 - x)^4 = 17$

403. $(5 - x)^4 + (3 - x)^4 = 82$

404. $x^5 - (x - 1)^5 = 31$

405. $(3 - x)^5 + x^5 = 243$

406. $x + \sqrt[5]{33 - x^5} = 3$

407. $x - \sqrt[5]{x^5 - 242} = 2$

408. $(1 + x)^5 + (4 - x)^5 = 275$

409. $(3 - x)^5 + (x - 1)^5 = 242$

410. $\frac{x^4 + (2 - x)^4}{x^3 + (2 - x)^3} = 2$

411. $\frac{(3 - x)^5 + x^5}{(3 - x)^2 + x^2} = 27$

412. $\frac{(3 - x)^4 + (x + 2)^4}{(1 - 2x)^2} = 97$

413. $\frac{(2 - x)^4 + (x + 1)^4}{(1 - 2x)^2} = 17$

414. $\sqrt[4]{a + x} + \sqrt[4]{a - x} = \sqrt[4]{2a}$

415. $\sqrt[4]{41 + x} + \sqrt[4]{41 - x} = 4$

416. $\sqrt[4]{x} + \sqrt[4]{17 - x} = 3$

417. $\sqrt[4]{82 - x} - \sqrt[4]{x} = 2$

418. $\sqrt[4]{8 + x} - \sqrt[4]{9 - x} = 1$

419. $\sqrt[4]{6 + x} + \sqrt[4]{11 - x} = 3$

420. $\sqrt[4]{5 - x} + \sqrt[4]{x - 3} = \sqrt[4]{2}$

Digitized by Google

421. $\sqrt[5]{a+x}+\sqrt[5]{a-x}=\sqrt[5]{2a}$

422. $\sqrt[5]{x}+\sqrt[5]{33-x}=3$ 423. $\sqrt[5]{244-x}+\sqrt[5]{x}=4$

424. $\sqrt[5]{x+9}-\sqrt[5]{x-22}=1$

425. $\sqrt[5]{24+x}+\sqrt[5]{40-x}=4$

426. $\sqrt[5]{20-x}+\sqrt[5]{13+x}=3$

427. $\sqrt[5]{7-x}+\sqrt[5]{x-3}=\sqrt[5]{4}$

---

428. $x^4-2x^3+2x^2-2x+1=0$

429. $2x^4-5x^3+4x^2-5x+2=0$

430. $2x^4-9x^3+14x^2-9x+2=0$

431. $2x^4-x^3-6x^2-x+2=0$

432. $3x^4-16x^3+26x^2-16x+3=0$

433. $4x^4-9x^3-26x^2-9x+4=0$

434. $6x^4-25x^3+38x^2-25x+6=0$

435. $6x^4-35x^3+62x^2-35x+6=0$

436. $8x^4-54x^3+101x^2-54x+8=0$

437. $12x^4-4x^3-41x^2-4x+12=0$

438. $2x^5+3x^4-5x^3-5x^2+3x+2=0$

439. $2x^5-7x^4+9x^3-9x^2+7x-2=0$

440. $3x^5-7x^4-10x^3+10x^2+7x-3=0$

441. $3x^5-7x^4-4x^3-4x^2-7x+3=0$

442. $6x^5+11x^4-33x^3-33x^2+11x+6=0$

443. $6x^5+x^4-43x^3-43x^2+x+6=0$

444. $6x^5-7x^4-x^3-x^2-7x+6=0$

445. $12x^5-8x^4-45x^3+45x^2+8x-12=0$

446. $\frac{(x+1)^4}{x^4+1}=8$ 447. $\frac{x^4+1}{(x-1)^4}=17$

448. $\frac{(x+1)(x^3+1)}{(x-1)(x^3-1)}=\frac{28}{13}$ 449. $\frac{(x+1)(x^4+1)}{(x-1)(x^4-1)}=\frac{17}{5}$

450. $\frac{(x+1)^2(x^3+1)}{(x-1)(x^4-1)}=\frac{27}{5}$ 451. $\frac{(x^3+1)(x^3+1)}{(x+1)(x^4+1)}=\frac{221}{257}$

452. $\frac{(x^3+1)(x^3+1)}{(x^2-1)(x^3-1)}=\frac{221}{189}$ 453. $\frac{(x^3+1)(x^3-1)}{(x^2-1)(x^3+1)}=\frac{403}{378}$

454. $\frac{(x+1)^2(x^2+x+1)}{(x-1)^2(x^2-x+1)}=\frac{175}{39}$

Digitized by Google

455. $\frac{(x+1)^2(x^2-x+1)}{(x-1)^2(x^2+x+1)} = \frac{189}{124}$

456. $\frac{(x+1)^5}{x^5+1} = \frac{81}{11}$

457. $\frac{(x-1)^5}{x^5-1} = \frac{81}{341}$

458. $\frac{(x+1)(x^5-1)}{(x-1)(x^5+1)} = \frac{81}{11}$

459. $\frac{(x+1)^5}{(x^2+1)(x^3+1)} = 8.$

XXIV. Anwendung der quadratischen Gleichungen mit einer Unbekannten.

A. Vorbemerkung.

Die Aufstellung der Gleichung, der „Ansatz" der Aufgaben im Abschnitt B erfolgt unter Beachtung der im Abschnitt XX, A aufgestellten Grundsätze.

B. Aufgaben.

1. Das Produkt aus dem 3. Teil und dem 5. Teil einer Zahl ist 4860. Wie heißt die Zahl?

2. Das Produkt aus dem Dreifachen einer Zahl und ihrem 7. Teil ist 1701. Wie heißt die Zahl?

3. Wenn man von einer Zahl die Hälfte und den dritten Teil nimmt und die Quadrate dieser Teile addiert, so erhält man 208. Wie heißt die Zahl?

4. Wenn man von einer Zahl den 3. Teil und den 4. Teil nimmt und das Quadrat des letzten Teils von dem ersten subtrahiert, so erhält man 63. Wie heißt die Zahl?

5. Eine Frau verkauft Äpfel, das Dutzend für soviel Pfennig, als der 60. Teil ihrer Äpfel betrug. Wieviel Äpfel verkaufte sie, wenn sie für dieselben 1,25 $\mathcal{M}$ einnahm?

6. Die lange Seite eines Rechtecks ist um 7 m größer, die kurze um 7 m kleiner als die Seite eines Quadrats. Wie groß ist die Seite dieses Quadrats, wenn Quadrat und Rechteck zusammen einen Flächeninhalt von 4951 qm haben?

7. Die Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks sind 2914 m und 1248 m lang. Wie groß ist die Hypotenuse?

8. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist 1898 m lang, die eine Kathete ist 1702 m. Wie lang ist die andere Kathete?

9. Die Seiten eines Rechtecks verhalten sich wie 12 : 5. Wie lang sind sie, wenn die Diagonale 299 m lang ist?

10. Die Diagonale eines Quadrats ist 100 m. Wie groß ist sein Umfang?

11. Der Radius eines Kreises ist 30 m. Wie groß ist die Seite des einbeschriebenen Quadrats?

Digitized by Google

12. Der Umfang des einem Kreise einbeschriebenen Quadrats ist 200 *m*. Wie groß ist der Durchmesser des Kreises?

13. Die Seite des einem Kreise einbeschriebenen Quadrats ist 20 *m*. Wie groß ist die Seite des um den Kreis beschriebenen Quadrats?

14. Es gibt zwei Zahlen, von denen die eine die Zahl 65 um soviel übertrifft, als die andere darunter bleibt. Wie heißen dieselben, wenn die Summe ihrer Quadratwurzeln 16 beträgt?

15. Die Differenz der Quadratwurzeln aus zwei Zahlen, von denen die eine um soviel größer ist als 205, als die andere kleiner, beträgt 6. Wie heißen die Zahlen?

15_1. 15_2. Die Seiten eines Dreiecks haben die Längen 49 *m*, 36 *m*, 68 *m* (81 *m*, 49 *m*, 104 *m*). Wie lang ist die Halbierungslinie des Gegenwinkels der dritten Seite?

15_3. 15_4. Wie lang ist in einem Dreieck mit den Seiten $a = 19\,m$, $b = 9\,m$, $c = 10\,m$ (39 *m*, 25 *m*, 56 *m*) die Mitteltransversale t_c?

15_5. 15_6. Ein Quader hat Kanten von 8, 9 und 12 *m* (32, 24, 9 *m*) Länge. Wie lang ist seine Raumdiagonale?

15_7. Die Grundfläche eines Quaders ist 12 *m* lang, 16 *m* breit, die Raumdiagonale ist 29 *m* lang. Wie groß ist die Höhe des Quaders?

15_8. Die Gesamtoberfläche eines geraden Kegels von 8 *cm* Höhe beträgt 96π *qcm*. Wie groß ist der Grundkreisradius?

---

16. Wie heißt die Zahl, deren Quadrat ihr Dreißigfaches gerade um 1000 übertrifft?

17. Welche Zahl ist von der Art, daß ihr Quadrat mit ihrem Dreizehnfachen zusammen 888 beträgt?

18. Zerlege die Zahl 3024 in zwei Faktoren, deren Summe 120 beträgt.

19. Man soll 1000 in zwei solche Teile teilen, daß ihr Produkt 219 024 beträgt.

20. Man soll 100 in zwei Teile teilen, deren Quadrate zusammen 5162 betragen.

21. Teile 80 so in zwei Teile, daß die Differenz des dreifachen Quadrats vom ersten und des doppelten Quadrats vom zweiten 5281 beträgt.

22. Teile die Zahl 20 so in zwei Teile, daß die Summe ihrer Kuben 2060 beträgt.

23. Zerlege die Zahl 96 so in zwei Faktoren, daß die Summe ihrer Quadrate 208 beträgt.

24. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen, von denen die erste um 10 größer ist als die zweite, beträgt 1850. Wie heißen dieselben?

Digitized by Google

25. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist 1250 *m* lang. Wie lang sind die Katheten, wenn die größere 382 *m* länger ist als die kürzere?

26. Die Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks ist 530 *m* lang. Wie lang sind die Katheten, wenn ihre Summe 686 *m* beträgt?

26_1. Der Inhalt eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 216 *qm*, die beiden Katheten sind zusammen 42 *m* lang. Wie groß sind die Katheten?

27. In einem Quadrat ist die Diagonale 5 *m* länger als die Seite. Wie groß ist die Seite?

28. In einem Quadrat sind eine Seite und eine Diagonale zusammen 100 *m* lang. Wie groß ist der Inhalt des Quadrats?

29. Wie groß muß der Durchmesser eines Kreises sein, wenn die Seite des eingeschriebenen Quadrats um 1 *m* länger sein soll, als der Radius?

30. Um welche Zahl muß man jeden Faktor des Produkts $37 \cdot 23$ verkleinern, damit das Produkt um 500 kleiner wird?

31. Um welche Zahl muß man den ersten Faktor des Produkts $73 \cdot 31$ verkleinern und den zweiten vergrößern, damit das Produkt um 360 größer wird?

32. Man soll 1 in zwei Faktoren zerlegen, deren Differenz $\frac{4ab}{a^2 - b^2}$ ist.

33. Zerlege die Größe $a^2 - b^2$ in zwei Summanden, deren Produkt den Wert $ab(a - b)^2$ hat.

34. Zerlege die Größe $3a + b$ so in zwei Summanden, daß die Summe ihrer Quadrate gleich $5(a^2 + b^2)$ wird.

35. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen beträgt 5330. Dividiert man die zweite durch die erste, so erhält man 4, Rest 3.

36. Man soll 30 so in zwei Teile zerlegen, daß die Summe ihrer Kuben gleich 8190 ist.

37. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 10, die Differenz ihrer Kuben 12 250. Wie heißen die Zahlen?

38. Die Summe zweier Zahlen beträgt 9603, die Summe ihrer Kubikwurzeln 33. Wie heißen die Zahlen?

39. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 2716, die Differenz ihrer Kubikwurzeln 4. Wie heißen die Zahlen?

40. Zwei Würfel haben zusammen einen Kubikinhalt von 9990 *cbm*. Wie lang sind die beiden Kanten, wenn die Summe derselben 30 *m* beträgt?

41. Die Differenz der Volumina zweier Würfel beträgt 9970 *cbm*. Wie groß sind dieselben, wenn die Differenz ihrer beiden Kanten 10 *m* beträgt?

Digitized by Google

41_1. Die Höhe eines geraden Zylinders ist um 3 *cm* größer als der Durchmesser der Grundfläche. Wie groß ist der Inhalt desselben, wenn der Mantel 28π *qcm* beträgt?

41_2. Der Durchmesser eines geraden Zylinders ist um 5 *cm* kleiner als die Höhe. Wie groß ist sein Inhalt, wenn die Oberfläche desselben 84π *qcm* beträgt?

41_3. Die Seitenlinie eines Kegels beträgt 5 *cm*, die Oberfläche desselben 36π *qcm*. Wie groß ist der Inhalt?

42. Der Inhalt eines Rechtecks, dessen lange Seite 99 *m* größer ist als die kurze, ändert sich nicht, wenn man die lange Seite auf die Länge von 972 *m* bringt und die kurze Seite um 133 *m* verkleinert. Wie groß ist der Inhalt und wie lang sind die Seiten?

43. Aus einem Rechteck, dessen Seiten 50 *m* und 48 *m* lang sind, ist gleichmäßig um den Mittelpunkt ein so großes Rechteck ausgeschnitten, daß ein überall gleichbreiter Rahmen übrig bleibt, dessen Fläche 19mal so groß ist als das ausgeschnittene Stück. Wie breit ist der Rahmen und wie groß ist sein Inhalt?

43_1. Wieviel Ecken hat ein Vieleck, in dem 20 Diagonalen vorhanden sind?

43_2. Wievielseitig ist ein Prisma, das 42 Flächendiagonalen aufweist?

43_3. Welches ist die Gesamtflächenzahl eines Prismas, in dem sich 70 Raumdiagonalen ziehen lassen?

43_4. Die Gesamtzahl der Kanten, der Flächendiagonalen und der Raumdiagonalen eines Prismas beträgt 66. Wievielseitig ist dieses Prisma?

44. Teilt man eine vierzifferige Zahl in der Mitte, so ist das Produkt der Teile 403. Die Summe der Teile verhält sich zur ursprünglichen Zahl wie 4 : 283. Wie heißt die Zahl?

45. Ein Kaufmann kauft Ware ein, hat dann $7\frac{1}{2}$ Pzt. Unkosten und verkauft sie wieder für 774 *M*. Dabei gewinnt er soviel Pzt., als der 30. Teil des Ankaufspreises in Mark beträgt. Wieviel zahlte er für dieselbe?

46. Jemand hat 16 000 *M* auf Zinsen. Er nimmt am Ende des ersten Jahres von den Zinsen 520 *M* fort. Als er am Ende des zweiten Jahres noch 71 *M* hinzugefügt hatte, war das Kapital auf 17 000 *M* angewachsen. Zu wieviel Prozent stand es?

47. Zwei Männer A und B können zusammen in 18 Tagen eine Arbeit verrichten. Wie lange müßte jeder allein arbeiten, wenn B noch 15 Tage mehr braucht als A?

48. Ein Teich kann durch zwei Röhren gefüllt werden. Er wird in 6 Stunden voll, wenn beide Röhren zugleich offen sind. Öffnet man die Röhren so nacheinander, daß der Teich durch jede Röhre

Digitized by Google

gefüllt wird, so wird er in 25 Stunden zweimal voll. In wieviel Stunden wird er durch jede Röhre allein gefüllt?

49. Eine Legierung von 90 *g* Gold und 10 *g* Kupfer hat ein spezifisches Gewicht von $17\frac{5}{16}$. Wie groß ist das spezifische Gewicht der genannten Metalle, wenn das des Goldes noch $10\frac{1}{2}$ mehr beträgt als das des Kupfers?

50. Zwei Körper A und B, welche 600 *m* voneinander entfernt sind, bewegen sich gegeneinander. Wieviel Meter legt jeder in der Sekunde zurück, wenn B in der Sekunde 6 *m* weniger macht als A und daher, um die ganze Strecke zu durchlaufen, 5 Sekunden mehr gebraucht als A, und nach wieviel Sekunden werden sie zusammentreffen?

51. Eine Frau kauft Äpfel, im ganzen für 110 *Pf.* Hätte sie die 10 Äpfel noch erhalten, welche sie als Zugabe verlangte, so wäre ihr das Dutzend um 1 *Pf.* billiger geworden. Wieviel zahlte sie für das Stück?

52. Eine Frau brachte Eier zu Markte und löste dafür 3 *M*. Hätte sie 10 Eier weniger gehabt, so würde sie ebensoviel Geld eingenommen haben, wenn sie das Stück 1 *Pf.* teurer verkauft hätte. Wieviel Eier hatte sie?

53. Eine Anzahl von Personen verzehrte in einem Wirtshause für 24 *M*. Wäre die Zahl der Personen um 2 geringer gewesen und hätte jede Person für 50 *Pf.* mehr verzehrt, so hätte sich die Rechnung auf 25 *M* belaufen. Wie groß war die Anzahl der Personen, und wieviel verzehrte jede?

54. Zwei Arbeiter haben bei verschiedenem Lohn eine Anzahl von Tagen Arbeit angenommen. A versäumt in der ganzen Zeit 2 Tage und erhält 70 *M*; B versäumt 6 Tage und erhält 54 *M*. Hätte A 6 Tage und B 2 Tage versäumt, so hätte A 3 *M* weniger erhalten als B. Wieviel Tage standen sie in Arbeit, und wieviel Lohn erhielt jeder täglich?

55. Zwei Frauen brachten Eier zu Markte, zusammen 100 Stück. Hätte die erste ihre Eier zu dem Preise der zweiten verkauft, so hätte sie 1,60 *M* erhalten. Wenn die zweite ihre Eier zum Preise der ersten verkauft hätte, so hätte sie 2,70 *M* erhalten. Wieviel Eier hatte jede Frau, wenn die erste noch 60 *Pf.* mehr einnahm als die zweite?

56. Ein Schnellzug geht morgens 6 Uhr von Berlin nach Hamburg ab. Um dieselbe Zeit geht ein Güterzug von Hamburg nach Berlin ab. Als sie sich treffen, hat der Schnellzug $12\frac{2}{3}$ Meilen mehr gemacht als der Güterzug. Wie weit ist Hamburg von Berlin entfernt, wenn der Schnellzug 1 Stunde, der Güterzug 4 Stunden nach dem Zusammentreffen am Ziele angelangt?

Digitized by Google

56_1. Ein von Bingen um 3 Uhr nachm. stromabwärts abgefahrener Rheindampfer, der stündlich 18 *km* zurücklegt, begegnet um 5 Uhr einem stromauffahrenden Dampfer, der Koblenz um 3 Uhr verlassen hatte. Der erstere kommt um 1 Stunde 40 Minuten früher in Koblenz an als der zweite in Bingen. Welche Länge ergibt sich hieraus für die Strecke Bingen—Koblenz?

56_2. Ein Fußgänger, der von A nach B geht und stündlich 5 *km* zurücklegt, wird 90 Minuten nach seinem Aufbruch von einem Radfahrer überholt, der eine halbe Stunde nach dieser Begegnung in B ankommt, dort sofort umkehrt und in A zu derselben Zeit wieder anlangt, in der der Fußgänger B erreicht. Wie lang ist die Strecke AB?

57. Zwei Punkte A und B bewegen sich auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien. A macht in der Sekunde 8 *m*, B 6 *m*. Sie treffen beide zugleich im Schnittpunkt der Linien ein. Nach wieviel Sekunden werden sie 1000 *m* voneinander entfernt sein?

58. Zwei Punkte A und B bewegen sich auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien. A macht in der Sekunde 2 *m*, B 1 *m*. Als A im Schnittpunkt der Linien eintrifft, ist A noch 55 *m* von demselben entfernt. Wann werden sie eine Entfernung von 50 *m* voneinander haben, von der Zeit an gerechnet, wo A im Schnittpunkt eintraf?

59. Auf zwei sich rechtwinklig schneidenden Linien bewegen sich zwei Punkte A und B nach dem Schnittpunkte hin. Im Anfang der Bewegung ist A 572 *m*, B 403 *m* vom Schnittpunkt entfernt, so daß ihre gegenseitige Entfernung 699,71 *m* beträgt. Nach wieviel Sekunden wird ihre gegenseitige Entfernung 325 *m* betragen, wenn sie bezw. 3 und 2 *m* in der Sekunde zurücklegen, und welche Entfernung haben die Punkte dann vom Schnittpunkt der Linien?

60. Zwei Kreise A und B, deren Radien bezüglich 60 und 40 *m* lang sind, bewegen sich mit ihren Mittelpunkten auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien und treffen zu derselben Zeit im Schnittpunkt ein. A legt in der Sekunde 8 *m*, B 6 *m* zurück. Nach wieviel Sekunden berühren sie sich 1) von außen, 2) von innen? Vor wieviel Sekunden berührten sie sich 3) von außen, 4) von innen, wenn die Bewegung schon stattfand, bevor sie im Schnittpunkt eintrafen, die Zeit von ihrem Zusammentreffen im Schnittpunkt an gerechnet?

61. Zwei Kreise A und B bewegen sich mit ihren Mittelpunkten auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien. A macht 3 *m*, B 2 *m* in der Sekunde. Im Anfang der Bewegung ist A noch 82 *m*, B 59 *m* vom Schnittpunkt entfernt. Die Kreise berühren sich viermal, zweimal von außen und zweimal von innen. Wann geschieht das, wenn die Radien der Kreise bez. $35\frac{3}{4}$ und $29\frac{1}{4}$ *m* lang sind?

Digitized by Google

62. Wie gestalten sich die Resultate der vorigen Aufgabe, wenn die Geschwindigkeiten der Kreise bez. m und n *m*, ihre anfänglichen Entfernungen vom Schnittpunkt a und b *m* betragen, ihre Radien R und r sind?

XXV. Quadratische Gleichungen mit zwei Unbekannten.

A. Theorie.

1. Eine Gleichung zweiten Grades mit zwei Unbekannten muß nach Abschn. XIX, Nr. 6. die Form haben

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dxy + ex + f = 0.$$

Hierin sind die 3 ersten Glieder vom zweiten, das vierte und das fünfte Glied vom ersten, das letzte (bekannte) Glied vom nullten Grade.

Um die beiden Unbekannten bestimmen zu können, müssen natürlich zwei solcher Gleichungen gegeben sein, aus denen die eine Unbekannte eliminiert werden muß, damit die andere bestimmt werden kann.

2. Löst man zu diesem Zwecke von den beiden Gleichungen

$$a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2 + d_1x + e_1y + f_1 = 0$$
$$a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2 + d_2x + e_2y + f_2 = 0$$

die erste nach x auf, so erhält man für x einen Ausdruck, bei dem unter der Quadratwurzel y^2 vorkommt. Diesen Ausdruck hätte man dann in die zweite Gleichung einzusetzen. Die in dieser Gleichung vorkommende Quadratwurzel müßte darauf durch Quadratur fortgeschafft werden, wobei, weil sowohl innerhalb, als außerhalb des Wurzelzeichens die Größe y^2 auftritt, eine vollständige Gleichung vierten Grades für y herauskommt, die nach den bisher erörterten Methoden nicht gelöst werden kann.

3. Doch kann in besonderen Fällen die Sache einfacher liegen, so daß die Lösung der Aufgabe überhaupt auf eine wirkliche quadratische Gleichung oder auf eine Gleichung höheren Grades, die mittels der für quadratische Gleichungen geltenden Methoden zu lösen ist (Abschn. XXIII, 15. bis 20.), zurückgeführt werden kann. Solche Aufgaben heißen im engeren Sinne „Quadratische Gleichungen mit mehreren Unbekannten", hier handelt es sich nur um solche Aufgaben.

4. Ist nur die eine der gegebenen Gleichungen quadratisch, die andere vom ersten Grade, so kann man die letztere nach der einen Unbekannten, etwa nach y auflösen. Den gefundenen Ausdruck für x setzt man in die erste quadratische Gleichung ein. Da in diesem kein Wurzelzeichen vorkommt, fällt die oben (unter Nr. 2.) erwähnte Quadratur fort, die nach x zu lösende Gleichung ist einfach quadratisch.

5. Bisweilen läßt sich aus zwei quadratischen Gleichungen eine dritte Gleichung bilden, die selbst vom ersten Grade ist. Diese kann man dann statt der einen gegebenen Gleichung in die Rechnung so

Digitized by Google

einführen, als ob sie selbst von vornherein gegeben wäre. So liegt die Sache z. B. bei den beiden in Nr. 2. angegebenen Gleichungen dann, wenn die drei Größen $a_1\ b_1\ c_1$ dasselbe Verhältnis besitzen, wie $a_2\ b_2\ c_2$, man also hat $a_1 = a_2 k$, $b_1 = b_2 k$, $c_1 = c_2 k$. Multipliziert man dann die zweite Gleichung mit k und subtrahiert sie von der ersten, so heben sich alle quadratischen Glieder fort und es bleibt eine Gleichung ersten Grades übrig.

Besonders einfache Fälle dieser Art sind die, in denen von den 3 Koeffizientenpaaren $a_1\ a_2$; $b_1\ b_2$; $c_1\ c_2$ zwei überhaupt den Wert Null haben; oder die, bei denen eines dieser Paare fortfällt, die beiden anderen aber in Proportion stehen.

6. Sehr einfach gestaltet sich die Sache, wenn der Quotient $\frac{x}{y}$ von vornherein gegeben ist oder leicht bestimmt werden kann. Hat man $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$, so setzt man $x = mt$, $y = nt$ und bestimmt zunächst t. Von dieser Art sind die Gleichungen Nr. 7., 24. usw. — Zur Bestimmung von $\frac{x}{y}$ tut die Division der Gleichungen durcheinander oft wesentliche Dienste, so in Nr. 64., 104., 106. usw. Aus den Gleichungen

1) $\frac{x+y}{x-y} = \frac{a}{b}$, 2) $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2} = c$, 3) $\frac{x^3+y^3}{x^3-y^3} = \frac{a}{b}$, 4) $\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}} = c$

ist nach Abschn. X, 19. sofort hinzuschreiben

1) $\frac{x}{y} = \frac{a+b}{a-b}$, 2) $\frac{x}{y} = \sqrt{\frac{c+1}{c-1}}$, 3) $\frac{x}{y} = \sqrt[3]{\frac{a+b}{a-b}}$, 4) $\frac{x}{y} = \left(\frac{c+1}{c-1}\right)^2$.

Gleichungen von der Art der vorstehenden können gegeben sein, wie in Nr. 40. und 41., oder sie werden durch Kombination der gegebenen Gleichungen gebildet, wie in Nr. 92., 93. usw.

Die Gleichungen

$$ax^2 + bxy + cy^2 = 0 \text{ und } \frac{a_1x^2 + b_1xy + c_1y^2}{a_2x^2 + b_2xy + c_2y^2} = \frac{p}{q}$$

sind quadratisch für $\frac{x}{y}$, wie man sieht, wenn man durch y^2 dividiert. Ist daher eine Gleichung dieser Art gegeben, wie in Nr. 78. und 79., oder kann man aus der Kombination der Gleichungen auf eine solche Gleichung kommen (Nr. 83., 147.), so hat die Auflösung keine Schwierigkeiten mehr.

7. In den Gleichungen

$$\left|\begin{array}{l} a_1x^2 + b_1y^2 = c_1xy + d_1 \\ a_2x^2 + b_2y^2 = c_2xy + d_2 \end{array}\right| \quad \left|\begin{array}{r} d_2 \\ -d_1 \end{array}\right|$$

hat man nur die bekannten Größen d_1 und d_2 zu eliminieren, was durch Multiplikation mit den beigesetzten Faktoren und Addition geschieht, um eine Gleichung für $\frac{x}{y}$ zu erhalten. Oder man eliminiere

Digitized by Google

aus beiden Gleichungen einerseits x^2, andererseits y^2, und multipliziere die gewonnenen Gleichungen miteinander, so erhält man eine quadratische Gleichung für xy.

8. Sind in den eben genannten Gleichungen die Koeffizienten a_1 und b_1 unter sich und ebenso a_2 und b_2 unter sich gleich, so kann man leicht Gleichungen für $x + y$ und $x - y$ erhalten. Die beiden Gleichungen

$$p_1 x^2 + p_1 y^2 = c_1 xy + d_1$$
$$p_2 x^2 + p_2 y^2 = c_2 xy + d_2$$

kann man in die Form bringen

$$p_1(x + y)^2 = (c_1 + 2p_1)xy + d_1$$
$$p_2(x + y)^2 = (c_2 + 2p_2)xy + d_2,$$

worauf man durch Elimination der Größe xy (mittels der Additionsmethode) einen Wert für $(x + y)^2$ und mithin zwei durch das Zeichen voneinander unterschiedene Werte für $(x + y)$ erhält.

Auf $(x - y)$ kommt man dadurch, daß man die Gleichungen in die Form

$$p_1(x - y)^2 = (c_1 - 2p_1)xy + d_1$$
$$p_2(x - y)^2 = (c_1 - 2p_1)xy + d_2$$

bringt und entsprechend verfährt.

9. Auf die Bestimmung von Werten für $x + y$ und $x - y$ führt man auch die Aufgaben

1) $\left|\begin{array}{r} x^2 + y^2 = a \\ xy = b \end{array}\right|$ 2) $\left|\begin{array}{r} x \pm b = a \\ xy = b \end{array}\right|$ 3) $\left|\begin{array}{r} x \pm y = a \\ x^2 + y^2 = b \end{array}\right|$

zurück, die besonders zu merken sind.

Aus $x^2 + y^2$ und xy kann man sowohl $(x + y)^2$ als $(x - y)^2$ bilden; ferner ist $(x + y)^2 - 4xy = (x - y)^2$; $(x - y)^2 + 4xy = (x + y)^2$; $2(x^2 + y^2) - (x \pm y)^2 = (x + y)^2$.

Diese Gleichungen lassen sich indessen auch auf anderem Wege, nämlich durch Substitution des aus der einen Gleichung sich für die eine Unbekannte ergebenden Ausdrucks in die anderen lösen.

10. Bei Aufgaben von der Form

$$(a_1 x + b_1 y)^2 + p_1(a_1 x + b_1 y) = q_1$$
$$(a_2 x + b_2 y)^2 + p_2(a_2 x + b_2 y) = q_2$$

läßt sich aus der ersten Gleichung die Größe $(a_1 x + b_1 y)$, aus der zweiten die Größe $(a_2 x + b_2 y)$ bestimmen. Beide zusammen ermöglichen dann die Bestimmung von x und y selbst.

Manche Gleichungen, die diese Form noch nicht von vornherein besitzen, lassen sich darauf bringen.

11. Noch anders liegt die Sache bei Aufgaben von der Art, wie

$$x^2 - xy + y^2 = a \cdot (x - y) + b$$
$$xy = c(x - y) + d.$$

Digitized by Google

Hier läßt sich leicht eine quadratische Gleichung für die Größe $(x - y)$ herstellen. Den für diese Größe gefundenen Wert kann man dann mit dem durch die zweite Gleichung gegebenen Werte für xy kombinieren, wenn man es nicht vorzieht, mittels der linken Seiten beider Gleichungen das Quadrat von $(x + y)$ zu bilden, das sich dann ebenfalls mit Hilfe des für $(x - y)$ schon gefundenen Wertes bestimmen läßt.

12. Bei manchen Aufgaben kommt man durch Zerlegung der einen Gleichung in zwei Gleichungen des ersten Grades am einfachsten zum Ziel. Man hat dann jede der Partialgleichungen mit der zweiten gegebenen Gleichung zu kombinieren. Hierher gehören Nr. 68., 70. usw.

13. Auch die Einführung einer neuen Unbekannten, um zunächst diese zu bestimmen, ist vielfach sehr vorteilhaft. So setzt man in Nr. 162. $x - 3 = u$, $y - 2 = v$. — Lautet eine der gegebenen Gleichungen $x + y = c$, so setzt man am besten $x - y = z$, also $x = \frac{c+z}{2}$, $y = \frac{c-z}{2}$ und bestimmt zunächst z, so in Nr. 168.

14. Bei allen Aufgaben hat man zu untersuchen, in welcher Weise die für die verschiedenen Unbekannten gefundenen Werte untereinander zusammenhängen. Es kann der Fall sein, daß man jedem Werte von x jeden Wert von y zuordnen darf. Die Sache kann auch so liegen, daß jedem Werte der einen nur ganz bestimmte Werte der anderen Unbekannten entsprechen. Welcher Fall vorliegt, ergibt sich jedesmal aus dem Gange der Lösung, wobei namentlich die Aufgaben besondere Aufmerksamkeit erfordern, in denen die eine Gleichung zunächst einen von x und y abhängigen Ausdruck (etwa $x + y$), die andere einen zweiten solchen Ausdruck (etwa $x - y$) liefert. Hier ist jedesmal zu erwägen, ob diese Ausdrücke unabhängig voneinander gefunden worden sind, oder ob der eine mit Hilfe des anderen bestimmt worden ist.

Im ersten Falle muß man jeden der für den einen Ausdruck gefundenen Werte mit jedem der für den anderen Ausdruck gefundenen Werte kombinieren, wobei sich dann lauter Paare von zueinander gehörenden Werten für x und y ergeben. Im zweiten Falle darf man jeden Wert des zweiten Ausdrucks nur mit dem Wert des ersten Ausdrucks kombinieren, mit dessen Hilfe er bestimmt worden ist. Zum Schluß erhält man dann auch in diesem Falle lauter Paare von gegenseitig miteinander verknüpften Werten für x und y.

Die Gruppierung der Schlußwerte ist in der Weise zu bewirken, daß deutlich erkennbar ist, ob sie voneinander unabhängig sind, oder sich paarweise entsprechen.

Im ersten Falle wird man etwa schreiben:

$$x_1 = u_1, \quad x_2 = u_2, \quad x_3 = u_3 \text{ usw.};$$
$$y_1 = v_1, \quad y_2 = v_2, \quad y_3 = v_3 \text{ usw.},$$

im zweiten Falle:

$$x_1 = u_1, \quad y_1 = v_1; \quad x_2 = u_2, \quad y_2 = v_2 \text{ usw.}$$

Digitized by Google

B. Aufgaben.

1. $\left|\begin{array}{c} x^2+y^2=10 \\ 3x^2-5y^2=22 \end{array}\right|$

2. $\left|\begin{array}{c} x^2-5y=10 \\ x^2+3y=34 \end{array}\right|$

3. $\left|\begin{array}{c} x^2-y^2=24 \\ x^2+3y=64 \end{array}\right|$

4. $\left|\begin{array}{c} 3x-y^2=5 \\ 7x^2-2y^2=55 \end{array}\right|$

5. $\left|\begin{array}{c} 2x^2-3y^2=24 \\ 2x=3y \end{array}\right|$

6. $\left|\begin{array}{c} xy=54 \\ 3x=2y \end{array}\right|$

7. $\left|\begin{array}{c} x^2+y^2=100 \\ x:y=3:4 \end{array}\right|$

8. $\left|\begin{array}{c} x^2-y^2=640 \\ x:y=7:3 \end{array}\right|$

9. $\left|\begin{array}{c} 3x-2y=1 \\ x^2+y^2=74 \end{array}\right|$

10. $\left|\begin{array}{c} 4x-3y=24 \\ xy=96 \end{array}\right|$

11. $\left|\begin{array}{c} x+y=12 \\ x^2+y^2=90 \end{array}\right|$

12. $\left|\begin{array}{c} x-y=2 \\ xy=48 \end{array}\right|$

13. $\left|\begin{array}{c} 3x-y=5 \\ x^2+y^2=1825 \end{array}\right|$

14. $\left|\begin{array}{c} 2x+3y=10 \\ x(x+y)=25 \end{array}\right|$

15. $\left|\begin{array}{c} x^2+xy+y^2=343 \\ 2x-y=21 \end{array}\right|$

16. $\left|\begin{array}{c} 3x^2-7y^2=84 \\ 3x+7y=42 \end{array}\right|$

17. $\left|\begin{array}{c} x\left(1+\frac{y}{x}\right)=19 \\ xy=90 \end{array}\right|$

18. $\left|\begin{array}{c} x^2\left(1+\frac{y}{x}\right)=60 \\ xy=24 \end{array}\right|$

19. $\left|\begin{array}{c} x+y=16 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3} \end{array}\right|$

20. $\left|\begin{array}{c} xy=80 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{5} \end{array}\right|$

21. $\left|\begin{array}{c} 3x+5y=2 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=8 \end{array}\right|$

22. $\left|\begin{array}{c} xy=72 \\ \frac{2}{x}-\frac{3}{y}=\frac{1}{12} \end{array}\right|$

23. $\left|\begin{array}{c} \frac{y}{x}=\frac{46}{y}-1 \\ \frac{x}{16}=\frac{15}{y} \end{array}\right|$

24. $\left|\begin{array}{c} \frac{y}{x}=\frac{42}{y}-\frac{x}{25} \\ \frac{x}{5}=\frac{y}{3} \end{array}\right|$

25. $\left|\begin{array}{c} (x-1)(y-1)=24 \\ x+y=12 \end{array}\right|$

26. $\left|\begin{array}{c} (x-7)(y+3)=48 \\ x+y=18 \end{array}\right|$

27. $\left|\begin{array}{c} (x-8)(y-6)=0 \\ x+y=13 \end{array}\right|$

28. $\left|\begin{array}{c} (x-3)(y-4)=0 \\ 4x+3y=36 \end{array}\right|$

29. $\left|\begin{array}{c} (x-15)(y-7)=0 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{6} \end{array}\right|$

30. $\left|\begin{array}{c} (x-3)(x-2)=20 \\ \frac{7}{x}+\frac{3}{y}=2 \end{array}\right|$

Digitized by Google

31. $\left|\begin{array}{c}(x-y)(20x-9y)=240\\2x-y=22\end{array}\right|$

32. $x^2+y^2=22x-4y=10\,(4x-3y)$

33. $x^2+y^2=(18-x)^2=(16-y)^2$

34. $\left|\begin{array}{l}\frac{x+5}{y-7}=\frac{y+2}{x-4}\\3x+1=2y\end{array}\right|$

35. $\left|\begin{array}{l}\frac{3x-5}{2y-7}-\frac{y-2}{2x-5}=2\\5x=4y-1\end{array}\right|$

36. $\left|\begin{array}{l}\frac{x+5}{y-3}=\frac{x-1}{y-4}\\x^2+6y=79\end{array}\right|$

37. $\left|\begin{array}{l}\frac{3x-2}{x+1}-\frac{2y-1}{y+1}=1\\x^2+y^2=3x+4y\end{array}\right|$

38. $\left|\begin{array}{l}\frac{x-1}{y-1}=2\\\frac{x^2+x+1}{y^2+y+1}=\frac{19}{7}\end{array}\right|$

39. $\left|\begin{array}{l}\frac{x+1}{y+1}=\frac{3}{2}\\\frac{x^2+y}{x+y^2}=\frac{32}{15}\end{array}\right|$

40. $\left|\begin{array}{l}\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}}{\sqrt{x}-\sqrt{y}}=\frac{7}{3}\\16x-y^2=384\end{array}\right|$

41. $\left|\begin{array}{l}\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}=\frac{29}{20}\\9x-54=y^2\end{array}\right|$

42. $\left|\begin{array}{l}4x=xy+5\\7y=xy+6\end{array}\right|$

43. $\left|\begin{array}{l}3x=x^2+y^2-1\\3y=x^2+y^2-7\end{array}\right|$

44. $\left|\begin{array}{l}2x^2-3y^2+5y=16\\3y^2-2x^2+5x=9\end{array}\right|$

45. $\left|\begin{array}{l}3xy=5x-7y-1\\2xy=3x+5y-9\end{array}\right|$

46. $\left|\begin{array}{l}x+y=7xy\\x-y=3xy\end{array}\right|$

47. $\left|\begin{array}{l}x+y=3xy-121\\x-y=2xy-86\end{array}\right|$

48. $\left|\begin{array}{l}x\,(7-y)=20\\y\,(7-x)=6\end{array}\right|$

49. $\left|\begin{array}{l}x\,(1+y)=28\\y\,(1+x)=24\end{array}\right|$

50. $\left|\begin{array}{l}x+y=8y\\x-y=6y^2\end{array}\right|$

51. $\left|\begin{array}{l}x=y\,(5-2x)\\y=x\,(3-4y)\end{array}\right|$

52. $\left|\begin{array}{l}xy=4x-9y\\xy=2x-3y\end{array}\right|$

53. $\left|\begin{array}{l}5x+8y-1=5xy\\7x+2y-1=4xy\end{array}\right|$

54. $\left|\begin{array}{l}1400+xy=40x\\1440-xy=40y\end{array}\right|$

55. $\left|\begin{array}{l}xy=5x-8\\xy=5y-3\end{array}\right|$

56. $\left|\begin{array}{l}x=\frac{4}{y}+3\\y=\frac{5}{x}+1\end{array}\right|$

57. $\left|\begin{array}{l}\frac{1}{x}=9y+2\\\frac{1}{y}=5x+2\end{array}\right|$

Digitized by Google

58. $\left|\begin{array}{l} x = 15\left(1+\frac{x}{y}\right) \\ y = 100\left(1-\frac{x}{y}\right) \end{array}\right|$

59. $\left|\begin{array}{l} 3-\frac{x}{y} = 12x \\ 5+\frac{y}{x} = 20y \end{array}\right|$

60. $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{y} = 10x-3 \\ \frac{y}{x} = 9x-4 \end{array}\right|$

61. $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{y} = 7x-39 \\ \frac{x}{y} = 5y-7 \end{array}\right|$

62. $\left|\begin{array}{c} (x+16)(y-19)=760 \\ \frac{60}{x}-\frac{57}{y}=1 \end{array}\right|$

63. $\left|\begin{array}{c} (x+5)(y+2)=56 \\ \frac{1}{x}-\frac{1}{y}=\frac{1}{8} \end{array}\right|$

64. $\left|\begin{array}{l} (x-y)(3x-2y)=18 \\ (x-y)(2x-3y)=2 \end{array}\right|$

65. $\left|\begin{array}{l} (x+y)(x-7)=15 \\ (x+y)(y-5)=30 \end{array}\right|$

66. $\left|\begin{array}{l} (2x-1)(y-7)=19 \\ (x-3)(2y-5)=77 \end{array}\right|$

67. $\left|\begin{array}{l} (x-3)^2-(y+1)^2=7 \\ (x-1)^2-(y+3)^2=11 \end{array}\right|$

68. $\left|\begin{array}{l} (x-1)(y-2)=0 \\ (x+1)(y+2)=12 \end{array}\right|$

69. $\left|\begin{array}{l} (x-5)(y-3)=0 \\ (x-4)(y-7)=0 \end{array}\right|$

70. $\left|\begin{array}{c} x^2-y^2=8(x-y) \\ x^2+y^2=50 \end{array}\right|$

71. $\left|\begin{array}{l} x^2-y^2=2(x+y) \\ x^2+y^2=100 \end{array}\right|$

72. $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{y}=\frac{5}{36}(x+y) \\ \frac{y}{x}=\frac{4}{45}(x+y) \end{array}\right|$

73. $\left|\begin{array}{l} x\left(1+\frac{x}{y}\right)=90 \\ y\left(1+\frac{y}{x}\right)=40 \end{array}\right|$

74. $\left|\begin{array}{l} x\left(\frac{x}{y}-1\right)=60 \\ y\left(1-\frac{y}{x}\right)=15 \end{array}\right|$

75. $\left|\begin{array}{l} x^2\left(1+\frac{y}{x}\right)=45y \\ y^2\left(1+\frac{x}{y}\right)=20x \end{array}\right|$

76. $\left|\begin{array}{c} x^2+y^2=52 \\ xy=24 \end{array}\right|$

77. $\left|\begin{array}{c} x^2-y^2=28 \\ xy=48 \end{array}\right|$

78. $\left|\begin{array}{c} x^2+y^2=2\frac{1}{2}xy \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1\frac{1}{2} \end{array}\right|$

79. $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=3\frac{1}{3} \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=1\frac{1}{3} \end{array}\right|$

80. $\left|\begin{array}{c} x^2-y^2=\frac{5}{6}xy \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{5}{6} \end{array}\right|$

81. $\left|\begin{array}{c} x^2+y^2=45 \\ \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{2} \end{array}\right|$

82. $\left|\begin{array}{l} x^2+xy+y^2=57 \\ x^2-xy+y^2=43 \end{array}\right|$

83. $\left|\begin{array}{l} x^2+xy+y^2=13x \\ x^2-xy+y^2=7x \end{array}\right|$

84. $\left|\begin{array}{l} x^2+5xy+y^2=79 \\ x^2+3xy+y^2=59 \end{array}\right|$

85. $\left|\begin{array}{l} x^2+y^2=61-3xy \\ x^2-y^2=31-2xy \end{array}\right|$

Digitized by Google

86. $\left|\begin{array}{l} x^2 + xy = 78 \\ y^2 - xy = 7 \end{array}\right|$

87. $\left|\begin{array}{l} x^2 = 28xy - 675 \\ y^2 = 225 - 8xy \end{array}\right|$

88. $\left|\begin{array}{l} x^3 + y^3 = 370 \\ x + y = 10 \end{array}\right|$

89. $\left|\begin{array}{l} x^3 - y^3 = 999 \\ x - y = 9 \end{array}\right|$

90. $\left|\begin{array}{l} x^3 - y^3 = 124 \\ x^2 + xy + y^2 = 31 \end{array}\right|$

91. $\left|\begin{array}{l} x^3 + y^3 = 127 \\ x^2 - xy + y^2 = 127 \end{array}\right|$

92. $\left|\begin{array}{l} x^2 + y^2 = 37\,(x - y) \\ x^2 - y^2 = 12\,(x - y) \end{array}\right|$

93. $\left|\begin{array}{l} x^3 + y^3 = 370\,(x - 2y) \\ x^3 - y^3 = 316\,(x - 2y) \end{array}\right|$

94. $\left|\begin{array}{l} \sqrt{x} + \sqrt{y} = 14 \\ x + y = 100 \end{array}\right|$

95. $\left|\begin{array}{l} \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{y} = 2 \\ x - y = 56 \end{array}\right|$

96 $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \\ x^2 + y^2 = c^2 \end{array}\right|$

97. $\left|\begin{array}{l} \frac{x}{y} = \frac{a}{b} \\ bx^2 + ay^2 = ab \end{array}\right|$

98. $\left|\begin{array}{l} xy = a^2 - b^2 \\ \frac{x+y}{x-y} = \frac{a}{b} \end{array}\right|$

99. $\left|\begin{array}{l} x^2 - y^2 = ab \\ \frac{x+y}{x-y} = \frac{a}{b} \end{array}\right|$

100. $\left|\begin{array}{l} x\,(x + y) = a \\ y\,(x + y) = b \end{array}\right|$

101. $\left|\begin{array}{l} x^2 - xy = a \\ xy - y^2 = b \end{array}\right|$

102. $\left|\begin{array}{l} (x + y)\,xy = 2a \\ (x - y)\,xy = 2b \end{array}\right|$

103. $\left|\begin{array}{l} xy = a\,(x - y) \\ xy = b\,(x + y) \end{array}\right|$

104. $\left|\begin{array}{l} x + y = axy \\ x - y = bxy \end{array}\right|$

105. $\left|\begin{array}{l} x\,(x^2 + y^2) = a \\ y\,(x^2 + y^2) = b \end{array}\right|$

106. $\left|\begin{array}{l} x^3y^2 = a \\ x^2y^3 = b \end{array}\right|$

107. $\left|\begin{array}{l} x^3y = a^2 \\ xy^3 = b^2 \end{array}\right|$

108. $\left|\begin{array}{l} x^2 = a\,(x + y) \\ y^2 = b\,(x + y) \end{array}\right|$

109. $\left|\begin{array}{l} x^3 = a\,(x^2 + y^2) \\ y^3 = b\,(x^2 + y^2) \end{array}\right|$

110. $\left|\begin{array}{l} x + xy + y = 7 \\ x^2 - x^2y^2 + y^2 = 1 \end{array}\right|$

111. $\left|\begin{array}{l} 3xy + 2\,(x + y) = 27 \\ 2xy + 3\,(x + y) = 38 \end{array}\right|$

112. $\left|\begin{array}{l} x\,(x + y) = 56 + y \\ y\,(x + y) = 34 + x \end{array}\right|$

113. $\left|\begin{array}{l} x\,(y + 5) = 4 + x^2 \\ y\,(x - 5) = 2 + y^2 \end{array}\right|$

114. $\left|\begin{array}{l} (x + y)^2 + 55 = 16\,(x + y) \\ (x - y)^2 + 15 = 8\,(x - y) \end{array}\right|$

115. $\left|\begin{array}{l} (x - y)^2 = 4\,(x - y) - 3 \\ (x + y)^2 = 5xy - 1 \end{array}\right|$

Digitized by Google

116. $\left|\begin{array}{r} x^2+y^2=10\,(x-y) \\ xy=12 \end{array}\right|$ 117. $\left|\begin{array}{r} x^2+y^2+2(x+y)=38 \\ 2xy+3(x+y)=28 \end{array}\right|$

118. $\left|\begin{array}{r} x^2+y^2=16-3(x-y) \\ xy=11-4(x-y) \end{array}\right|$ 119. $\left|\begin{array}{r} x^2+y^2=5(x+y)-6 \\ xy=2(x+y)-1 \end{array}\right|$

120. $\left|\begin{array}{r} x^2+y^2=21+x \\ 2xy=9+y \end{array}\right|$ 121. $\left|\begin{array}{r} x^2+y^2=133-y \\ 2xy=77-x \end{array}\right|$

122. $\left|\begin{array}{r} x^2+y^2=46+4y \\ xy=7+2x \end{array}\right|$ 123. $\left|\begin{array}{r} x^2+2x=16-y^2 \\ xy=4-y \end{array}\right|$

124. $\left|\begin{array}{r} x^2-xy=8(x-y)-6 \\ y^2-xy=4-5(x-y) \end{array}\right|$

125. $\left|\begin{array}{r} x^2+y^2=15(x+y)-70 \\ xy=11-\frac{1}{2}(x+y) \end{array}\right|$

125_1. $\left|\begin{array}{r} x+y+\sqrt{x^2+y^2}=12 \\ xy=12 \end{array}\right|$ 125_2. $\left|\begin{array}{r} x+y-\sqrt{x^2+y^2}=4 \\ x-y=7 \end{array}\right|$

125_3. $\left|\begin{array}{r} x-y+\sqrt{x^2+y^2}=24 \\ xy=120 \end{array}\right|$ 125_4. $\left|\begin{array}{r} x-y+\sqrt{x^2+y^2}=72 \\ x+y=49 \end{array}\right|$

126. $\left|\begin{array}{r} x^2+y^2=2(x-y)+11 \\ (x-1)(y+1)=6 \end{array}\right|$

127. $\left|\begin{array}{r} x^2+y^2=3(x-y)+14 \\ 3(x-1)(y+1)=xy+19 \end{array}\right|$

128. $\left|\begin{array}{r} x^2+y^2=17xy-299 \\ (x-1)(y-1)=12 \end{array}\right|$

129. $\left|\begin{array}{r} x^2+y^2=1189-97xy \\ x-y=109-9xy \end{array}\right|$ 130. $\left|\begin{array}{r} x^2+13xy+y^2=91 \\ x+xy+y=11 \end{array}\right|$

131. $\left|\begin{array}{r} x^2+y^2=3xy-1 \\ x+y=\frac{1}{2}xy+2 \end{array}\right|$ 132. $\left|\begin{array}{r} 3x^3+3y^3=29(x+y) \\ (x-3)(y+3)=2xy-10 \end{array}\right|$

133. $\left|\begin{array}{r} (x^2-1)(y^2-1)=2800 \\ (x-1)(y-1)=40 \end{array}\right|$ 134. $\left|\begin{array}{r} (x^2+1)(y^2+1)=500 \\ (x+1)(y+1)=32 \end{array}\right|$

135. $\left|\begin{array}{r} 2xy-3(x-y)^2=37 \\ 3(x+y)^2-4xy=163 \end{array}\right|$

136. $\left|\begin{array}{r} 17xy-x^2y^2=60 \\ 15(x+y)^2+13(x-y)^2=748 \end{array}\right|$

137. $\left|\begin{array}{r} \frac{x}{y}+\frac{y}{x}=2\frac{1}{6} \\ 2x^2-3y^2=600 \end{array}\right|$ 138. $\left|\begin{array}{r} \frac{x}{y}-\frac{y}{x}=\frac{7}{12} \\ x^2+y^2=100 \end{array}\right|$

Digitized by Google

139. $\begin{cases} 3x^2+2xy-5y^2=0 \\ 2x^2-5(x+y)=12 \end{cases}$

140. $\begin{cases} 3x^2-7xy+2y^2=0 \\ 3x+2y=xy \end{cases}$

141. $\begin{cases} 3x^2+10y^2=11xy \\ xy+11=13(x-y) \end{cases}$

142. $\begin{cases} x(2x-5y)=4-6y \\ y(x+2y)=6x-8 \end{cases}$

143. $\begin{cases} 2x^2-5xy+3y^2=6 \\ 3x^2-8xy+2y^2=5 \end{cases}$

144. $\begin{cases} (3x-y)(x-y)=56 \\ (x+3y)(x+y)=48 \end{cases}$

145. $\begin{cases} 5x^2-3xy=2 \\ 3y^2-4xy=3 \end{cases}$

146. $\begin{cases} (x+y)^2=4y^2+33 \\ (x-y)^2=3x^2+66 \end{cases}$

147. $\begin{cases} (x+y)^2=64(2x-y) \\ (x-y)^2=4(2x-y) \end{cases}$

148. $\begin{cases} (3x-2y)^2=36(x-y) \\ (2x-y)^2=25(x-y) \end{cases}$

149. $\begin{cases} (3x-4y)(2x-3y)=2(x-y) \\ (2x-y)(3x-2y)=42(x-y) \end{cases}$

150. $\begin{cases} (x+y)^2-4xy=9(x-2y) \\ (x-y)^2+xy=19(x-2y) \end{cases}$

151. $\begin{cases} 3(x^2+y^2)=15(x-y)+5xy \\ 9(x^2-y^2)=75(x-y)-xy \end{cases}$

152. $\begin{cases} \frac{x^2-2xy+3y^2}{3x^2-2xy+y^2}=\frac{1}{3} \\ x^2-3y=1 \end{cases}$

153. $\begin{cases} \frac{x^2+y+1}{y^2+x+1}=\frac{3}{2} \\ 2x^2+3y^2=5xy \end{cases}$

154. $\begin{cases} \frac{x+y}{x-y}+\frac{x-y}{x+y}=5\frac{1}{5} \\ 2x^2-3y^2=24 \end{cases}$

155. $\begin{cases} \frac{x+1}{y-1}+\frac{y-1}{x+1}=\frac{10}{3} \\ 3x^2-5y^2=30 \end{cases}$

156. $\begin{cases} \frac{x+y}{xy+1}=\frac{7}{11} \\ \frac{x-y}{xy-1}=\frac{1}{3} \end{cases}$

157. $\begin{cases} \frac{x+y}{xy-1}=\frac{4}{7} \\ \frac{x-y}{xy+1}=\frac{1}{8} \end{cases}$

158. $\begin{cases} (x^2+y^2)(x-y)=200 \\ xy(x-y)=96 \end{cases}$

159. $\begin{cases} (x^2-y^2)(x+y)=9 \\ xy(x+y)=6 \end{cases}$

160. $\begin{cases} x^2-13y=xy-11 \\ 13x-y^2=3xy+19 \end{cases}$

161. $\begin{cases} x^2-y^2=9-8xy \\ x+y=3-xy \end{cases}$

162. $\begin{cases} (x-3)^2+(y-2)^2=20 \\ (x-3)(y-2)=8 \end{cases}$

163. $\begin{cases} \sqrt{x-7}+\sqrt{y-9}=5 \\ (x-7)(y-9)=36 \end{cases}$

164. $\begin{cases} (x-1)^3+(y-2)^3=28 \\ x+y=7 \end{cases}$

165. $\begin{cases} (x-7)^3+(5-y)^3=63 \\ x-y=5 \end{cases}$

166. $\begin{cases} x+y=30 \\ \sqrt[3]{x+7}+\sqrt[3]{y-9}=4 \end{cases}$

167. $\begin{cases} x-y=68 \\ \sqrt[3]{x-5}+\sqrt[3]{9-y}=6 \end{cases}$

Digitized by Google

168. $\left|\begin{array}{l} x^4 + y^4 = 97 \\ x + y = 5 \end{array}\right|$

169. $\left|\begin{array}{l} x^4 + y^4 = 257 \\ x - y = 3 \end{array}\right|$

170. $\left|\begin{array}{l} (x-3)^4 + (y-2)^4 = 82 \\ x + y = 9 \end{array}\right|$

171. $\left|\begin{array}{l} (x-7)^4 + (y-3)^4 = 257 \\ x - y + 1 = 0 \end{array}\right|$

172. $\left|\begin{array}{l} \sqrt[4]{x+7} + \sqrt[4]{y-5} = 3 \\ x + y = 15 \end{array}\right|$

173. $\left|\begin{array}{l} \sqrt[4]{90-x} - \sqrt[4]{9-y} = 2 \\ x + y = 17 \end{array}\right|$

174. $\left|\begin{array}{l} x^5 + y^5 = 1056 \\ x + y = 6 \end{array}\right|$

175. $\left|\begin{array}{l} x^5 - y^5 = 211 \\ x - y = 1 \end{array}\right|$

176. $\left|\begin{array}{l} \sqrt[5]{250-x} + \sqrt[5]{2-y} = 2 \\ x + y = 10 \end{array}\right|$

177. $\left|\begin{array}{l} \sqrt[5]{x-8} - \sqrt[5]{y-6} = 2 \\ x - y = 4 \end{array}\right|$

178. Eliminiere aus den beiden folgenden Gleichungen erst y, dann x, und gib die resultierende Gleichung des vierten Grades für die noch bleibende Unbekannte an.*)

$$\left|\begin{array}{l} 2x^2 - 3y^2 + 5x + 8y - 4 = 0 \\ 3x^2 - 2y^2 + 7x + 5y - 7 = 0 \end{array}\right|.$$

179. Führe dasselbe bei folgenden Gleichungen aus:

$$\left|\begin{array}{l} x^2 - xy + 3y^2 + 2x - y - 9 = 0 \\ 2x^2 + xy - y^2 - 3x + y - 7 = 0 \end{array}\right|.$$

XXVI. Anwendung der quadratischen Gleichungen mit mehreren Unbekannten.

Aufgaben.

1. Zwei Zahlen verhalten sich wie 7 : 9. Die Summe ihrer Quadrate beträgt 1170. Wie heißen die Zahlen?

2. Die Differenz der Quadrate zweier Zahlen ist 3240. Wie heißen die Zahlen, wenn sie sich wie 7 : 3 verhalten?

3. Die Summe zweier Zahlen ist 90, ihr Produkt 2016. Wie heißen dieselben?

4. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 8, die Summe ihrer Quadrate 2210. Wie heißen dieselben?

5. Die Zahl 864 in zwei Faktoren zu zerlegen, deren Summe gleich 60 ist.

6. Die Zahl 100 so in zwei Teile zu zerlegen, daß das

*) Um die Gleichung für x zu finden, ist es am einfachsten, die Glieder mit y^2 zu eliminieren, aus der resultierenden Gleichung y zu bestimmen und den Wert für y in einer der gegebenen Gleichungen zu substituieren.

Digitized by Google

Quadrat des ersten Teils um 10 kleiner ist, als das Siebenfache des zweiten Teils.

7. Zerlege die Zahl 1008 so in zwei Faktoren, daß der 7. Teil des ersten und der 6. Teil des zweiten Faktors zusammen 10 betragen.

8. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen übertrifft das Zehnfache der ersten um 120, das Zehnfache der zweiten um 160. Wie heißen dieselben?

9. Das Produkt zweier Zahlen übertrifft das Siebenfache der ersten um 132, das Siebenfache der zweiten um 90. Wie heißen dieselben?

10. Die Summe der Quadrate zweier Zahlen beträgt 1690. Sie würde 1930 betragen, wenn jede der beiden Zahlen um 2 größer wäre. Wie heißen die Zahlen?

11. Die Diagonale eines Rechtecks ist 35 *m* lang. Sie würde 45 *m* lang sein, wenn die lange Seite um 8, die kurze um 6 *m* länger wäre. Wie lang sind die Seiten?

12. Die Diagonale eines Rechtecks ist um 6 *m* länger als die große Seite. Wäre jede Seite um 5 *m* länger, so würde der Inhalt 370 *qm* mehr betragen. Wie lang sind die Seiten?

13. Teile die Zahl 10 000 so in zwei Teile, daß die Summe ihrer Quadratwurzeln 140 beträgt.

14. Teile die Zahl 900 so in zwei Teile, daß die Differenz ihrer Quadratwurzeln 6 beträgt.

15. Teile die Zahl 10 so in zwei Teile, daß die Summe ihrer Kuben 370 beträgt.

16. Zerlege die Zahl 7110 so in zwei Teile, daß die Summe ihrer Kubikwurzeln 30 beträgt.

17. Es gibt zwei Zahlen von folgender Beschaffenheit. Das Quadrat der ersten Zahl, vermehrt um das Zehnfache der zweiten, gibt ebensoviel, als das Quadrat der zweiten Zahl, vermehrt um das Zehnfache der ersten, nämlich 84. Wie heißen die Zahlen?

18. Welche Zahlen haben folgende Eigentümlichkeiten? Dividiert man die Summe der Quadrate durch die erste Zahl, so erhält man 37, Rest 3. Dividiert man sie durch die zweite Zahl, so erhält man 24, Rest 2.

19. Welche Zahlen haben folgende Eigentümlichkeiten? Dividiert man die Differenz der Quadrate durch die erste Zahl, so erhält man 5, Rest 5. Dividiert man sie durch die zweite Zahl, so erhält man 13, Rest 1.

20. Die Summe der Kuben zweier Zahlen beträgt 2240. Die Summe ihrer Quadrate übertrifft ihr Produkt um 112. Wie heißen die Zahlen?

Digitized by Google

21. Die Differenz der Kuben zweier Zahlen ist 513. Die Summe ihrer Quadrate ist um ihr Produkt kleiner als 171. Wie heißen die Zahlen?

22. Welche dreiziffrige Zahl hat folgende Eigentümlichkeiten? Schneidet man die letzte Ziffer rechts ab und setzt sie vorn links wieder an, so ist die Summe der ursprünglichen Zahl und der neuen Zahl 435, das Produkt 38 376.

23. Ein Bruch bleibt seinem Werte nach ungeändert, wenn man den Zähler um 2, den Nenner um 3 vergrößert. Er verwandelt sich in den umgekehrten Bruch, wenn man den Zähler um 3 vergrößert, den Nenner um 3 verkleinert. Wie heißt der Bruch?

24. Ein Bruch verwandelt sich in einen anderen vom reziproken Werte sowohl, wenn man vom Zähler 2, vom Nenner 5 abzieht, als auch wenn man zum Zähler 6, zum Nenner 1 addiert. Wie heißt der Bruch?

25. Die Summe zweier Zahlen beträgt 8, die Summe ihrer Biquadrate 706. Wie heißen die Zahlen?

26. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 4, die Summe ihrer Biquadrate 7186. Wie heißen dieselben?

27. Zerlege die Zahl 10 so in zwei Teile, daß die Summe ihrer fünften Potenzen 17 050 beträgt.

28. Die Differenz zweier Zahlen beträgt 3, die Differenz ihrer fünften Potenzen 29 643. Wie heißen die Zahlen?

29. Eine Anzahl von Personen hatte in einem Wirtshaus 42 *M* zu zahlen. Wären ihrer 3 mehr gewesen und hätte jede Person für 50 *Pf.* mehr verzehrt, so hätte sich die Rechnung auf 60 *M* belaufen. Wie groß war die Anzahl der Personen, und wieviel hatte jede zu zahlen?

30. Zwei Frauen brachten Butter zur Stadt. Die erste erhielt 18 *M*. Die zweite, welche 3 Pfd. weniger hatte, hatte doch dieselbe Einnahme, weil sie für das Pfund 30 *Pf.* mehr erhielt. Wieviel Pfund brachte jede Frau zur Stadt, und zu welchem Preise verkaufte sie das Pfund?

31. Jemand kauft für 3 *M* Zitronen. Hätte er für dasselbe Geld 10 Zitronen mehr erhalten, so wäre ihm das Stück 1 *Pf.* billiger geworden. Wieviel Zitronen kaufte er und zu welchem Preise?

32. Auf der Peripherie eines Kreises, welche 120 *m* lang ist, bewegen sich zwei Punkte A und B. A braucht, um die ganze Peripherie zu durchlaufen, drei Sekunden weniger als B, weil er in der Sekunde 2 *m* mehr zurücklegt. Wieviel *m* legt jeder in der Sekunde zurück?

33. Zwei Arbeiter A und B schaffen eine Arbeit zusammen in

Digitized by Google

6 Tagen. Wie lange müßte jeder allein an derselben arbeiten, wenn B allein noch 5 Tage mehr gebraucht als A allein?

34. Ein Kaufmann verkaufte zwei Arten Tuch, zusammen für 294 ℳ, von der ersten Art 6 Ellen mehr als von der zweiten Art. Das Tuch der ersten Art würde zum Preise des Tuches der zweiten Art 180 ℳ kosten. Das Tuch der zweiten Art würde zum Preise des Tuches der ersten Art 120 ℳ kosten. Wieviel Ellen von jeder Art?

35. Zwei Arbeiter A und B stehen bei verschiedenem Lohn in Arbeit. A verdient 42 ℳ, B 40 ℳ. Hätte A für den Tagelohn von B und B für den Tagelohn von A gearbeitet, so hätten sie zusammen 1 ℳ mehr verdient. Wieviel Tage standen sie in Arbeit, wenn B 2 Tage länger arbeitete als A, und wieviel Lohn erhielt jeder täglich?

35_1. (40.) Jemand hat zwei Kapitalien auf Zinsen; das erste bringt jährlich 387 ℳ. Das zweite, welches um 1000 ℳ kleiner ist, bringt 26 ℳ weniger, obgleich es $\frac{1}{4}$ Pzt. höher steht. Wie groß sind die Kapitalien, und zu wieviel Prozent stehen sie?

36. Zwei Punkte A und B bewegen sich auf zwei sich senkrecht schneidenden Geraden nach dem Schnittpunkte hin. A macht in der Sekunde 5, B 4 *m*. Sie haben nach 3 Sekunden eine gegenseitige Entfernung von 35 *m*. Welche Entfernung hatten sie ursprünglich vom Schnittpunkt, wenn A demselben 4 *m* näher war als B?

36_1. (37.) Zwei Punkte A und B bewegen sich auf zwei sich senkrecht schneidenden Geraden nach dem Schnittpunkte hin. A ist im Anfange der Bewegung 86, B 57 *m* vom Schnittpunkte entfernt. Nach 10 Sekunden beträgt ihre gegenseitige Entfernung 45 *m*. Wieviel *m* legt jeder Punkt in der Sekunde zurück, wenn A 2 *m* mehr zurücklegt als B?

36_2. (38.) Zwei Kreise A und B bewegen sich mit ihren Mittelpunkten auf zwei sich senkrecht schneidenden Geraden. Sie sind im Anfang der Bewegung bez. noch 44 und 33 *m* vom Schnittpunkt entfernt. Sie berühren sich zum erstenmal von außen nach 3 Sekunden, zum erstenmal von innen nach 10 Sekunden. Wieviel *m* legt jeder Kreis in der Sekunde zurück, wenn ihre Radien bez. $22\frac{1}{2}$ und $17\frac{1}{2}$ *m* lang waren?

36_3. (39.) Zwei Kreise A und B rollen auf den inneren Seiten der Schenkel eines rechten Winkels entlang, nach dem Scheitelpunkte hin. A macht in der Sekunde 6, B 8 *m*. Ihre Berührungspunkte sind im Anfang der Bewegung bez. 42 und 46 *m* vom Scheitelpunkt entfernt. Sie berühren sich zum erstenmal von außen nach 2 Sekunden, zum erstenmal von innen nach 4 Sekunden. Wie groß sind die Radien der Kreise, und wann berühren sie sich zum zweitenmal von außen und zum zweitenmal von innen?

Digitized by Google

37. In einem Kreis von 13 *cm* Radius soll durch einen 5 *cm* vom Mittelpunkt abstehenden Punkt eine Sehne von 25 *cm* Länge gezogen werden. Wie lang fallen ihre Abschnitte aus?

37_1. Durch zwei konzentrische Kreise von den Radien $r = 25$ *cm*, $\varrho = 17$ *cm* soll eine Sehne so gelegt werden, daß das in den inneren Kreis fallende Stück zwei Fünftel der ganzen Sehnenlänge ausmacht. Wie lang ist die Sehne und wie groß ist ihr Abstand vom Mittelpunkt?

37_2. Außerhalb eines Kreises von 21 *cm* Radius liegt ein Punkt, der um 29 *cm* vom Mittelpunkt absteht. Von ihm soll nach dem Kreise eine Sekante gezogen werden, deren innerer Abschnitt 9 *cm* beträgt. Wie lang ist diese Sekante?

38. Der Umfang eines Rechtecks beträgt 82 *m*, die Diagonale 29 *m*. Wie lang sind die Seiten?

38_1. Die Diagonale eines Rechtecks, dessen Fläche 120 *qm* beträgt, hat eine Länge von 17 *m*. Wie lang sind die beiden Seiten?

38_2. Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Hypotenuse 41 *m* lang ist, beträgt 180 *qm*. Wie lang sind die Katheten?

38_3. Die Fläche eines Rechtecks beträgt 168 *qm*, der Umfang 62 *m*. Wie lang sind die Seiten?

38_4. Die Fläche eines rechtwinkligen Dreiecks, dessen Katheten sich um 1 *m* unterscheiden, beträgt 210 *qm*. Wie groß sind die drei Dreiecksseiten?

38_5. Der Umfang eines rechtwinkligen Dreiecks beträgt 30 *m*, die Fläche 30 *qm*. Wie lang sind die Dreiecksseiten?

38_6. Ein rechtwinkliges Dreieck hat eine Hypotenuse von 25 *m* Länge, der Radius des ihm einbeschriebenen Kreises hat eine Größe von 3 *m*. Wie lang sind die Katheten?

38_7. Einem rechtwinkligen Dreieck, das eine Fläche von 24 *qm* besitzt, ist ein Kreis von 2 *m* Radius einbeschrieben. Wie lang sind die Dreiecksseiten?

38_8. Einem rechtwinkligen Dreieck, dessen eine Kathete die andere um 1 *m* in der Länge übertrifft, ist ein Kreis von 6 *m* Radius einbeschrieben. Wie lang sind die Dreiecksseiten?

39. Von den drei in einer Ecke zusammenstoßenden Kanten eines Quaders, dessen Gesamtoberfläche 568 *qcm* beträgt, ist die erste um 4 *cm* länger als die zweite und um 4 *cm* kürzer als die dritte. Wie lang sind diese Kanten?

39_1. Ein gerades dreiseitiges Prisma hat zur Grundfläche ein rechtwinkliges Dreieck, dessen Katheten sich um 7 *cm* unterscheiden. Die Höhe des Prismas ist um 1 *cm* größer als die größere Kathete. Vergrößert man die drei erwähnten Kanten um je 2 *cm*, so wächst der Inhalt um 174 *ccm*. Wie groß sind die Kanten des Prismas?

Digitized by Google

39_2. Der Achsenschnitt eines Zylinders ist ein Rechteck von 26 *cm* Umfang, die Oberfläche beträgt $44\,\pi$ *qcm*. Wie groß ist der Rauminhalt?

39_3. Die Seitenlinie eines Kegels ist um 3 *cm* größer als der Durchmesser der Grundfläche; die Oberfläche beträgt $36\,\pi$ *qcm*. Wie groß sind Mantel und Rauminhalt?

39_4. Die Höhe eines Kegels beträgt 12 *cm*, der Mantel $135\,\pi$ *qcm*. Wie groß sind Oberfläche und Rauminhalt?

39_5. Die Summe der Grundkreisradien eines Kegelstumpfes von 20 *m* Höhe und 440 *cbm* Volumen beträgt 5 *m*. Wie groß sind diese Radien?*)

39_6. Ein Kegelstumpf hat eine Höhe von 9 *m*, ein Volumen von 264 *cbm*. Wie groß sind seine Grundkreisradien, wenn deren Produkt 8 *qm* beträgt?

39_7. Die Seite eines geraden Kegelstumpfes ist 29 *cm* lang, seine Höhe beträgt 21 *cm* und sein Volumen 17 050 *ccm*. Wie lang sind seine Grundkreisradien?

39_8. Ein gerader Kegelstumpf von 3 *cm* Höhe, dessen Grundkreisradien sich um 4 *cm* unterscheiden, hat einen Mantel von 220 *qcm* Fläche. Wie groß sind die beiden Grundkreisradien?

39_9. Die Gesamtoberfläche eines geraden Kegelstumpfes von 12 *m* Höhe und 5 *m* Unterschied der Grundkreisradien stellt sich auf 1188 *qm*. Wie groß sind die Grundkreisradien?

39_{10}. Wie groß sind die beiden Radien einer Kugelschale, die bei einer Dicke von 3 *cm* ein Volumen von 5016 *ccm* besitzt?

39_{11}. Einer Kugel von 29 *m* Radius soll ein Zylinder einbeschrieben werden, dessen Mantel 5280 *qm* groß ist. Wie groß sind Höhe und Grundkreisradius dieses Zylinders?

39_{12}. Einer Kugel von 25 *m* Radius ist ein Zylinder einbeschrieben, dessen Achsenschnitt einen Umfang von 124 *m* besitzt. Wie groß sind dessen Höhe und Grundkreisradius?

40. Ein Hohlspiegel von 75 *cm* Brennweite erzeugt an einem auf seiner Achse liegenden leuchtenden Punkt ein Bild, das von diesem in der Richtung nach dem Hohlspiegel zu um 80 *cm* absteht. Wie weit sind der Punkt und sein Bild vom Spiegel entfernt?

40_1. Auf der Achse einer Linse von 24 *cm* Brennweite liegt ein leuchtender Punkt; das durch die Linse erzeugte Bild dieses Punktes steht von ihm um 100 *cm* ab. Welche Entfernungen von der Linse haben der Punkt und sein Bild?

40_2. Auf einen Hohlspiegel von 40 *cm* Brennweite fällt Licht

*) Bei den Aufgaben 39_5. bis 39_{12}. ist für π überall der archimedische Näherungswert zu nehmen.

Digitized by Google

von einem Punkt der Achse Rückt dieser Punkt vom Hohlspiegel um 120 *cm* ab, so nähert sich sein Bild dem Spiegel um 12 *cm*. Wie weit sind beide von diesem entfernt?

40_2. Eine Linse von 24 *cm* Brennweite erzeugt von einem leuchtenden Körper ein Bild, das sich von der Linse um 24 *cm* entfernt, wenn der Körper sich ihr um 12 *cm* nähert. Wie weit stehen der Körper und sein Bild von der Linse ab?

---

41. Drei Zahlen geben paarweise miteinander multipliziert der Reihe nach die Produkte 216, 288 und 432. Wie heißen dieselben?

41_1. Ein Quader hat Flächen von der Größe 20 *qm*, 28 *qm*, 35 *qm*. Wie lang sind seine Kanten? Wie groß ist sein Rauminhalt?

42. Drei Zahlen bilden eine stetige Proportion. Die Summe der drei Zahlen ist 37. Vergrößert man die mittlere Zahl um $\frac{1}{2}$, so ist sie das arithmetische Mittel zwischen den beiden andern Zahlen. Wie heißen dieselben?

43. Drei Zahlen bilden eine stetige Proportion. Die Summe derselben ist 57. Das Dreifache der ersten und das Doppelte der dritten geben zusammen das Fünffache der zweiten. Wie heißen die Zahlen?

44. Eine Zahl besteht aus drei Ziffern, deren Summe gleich 9 ist. Bringt man die Ziffern in die umgekehrte Reihenfolge, so ist die neue Zahl um 396 größer als die ursprüngliche. Das Quadrat der mittleren Ziffer ist um 4 größer als das Produkt der ersten und dritten. Wie heißt die Zahl?

45. Eine Zahl besteht aus drei Ziffern. Schneidet man die erste Ziffer links ab und setzt sie rechts wieder an, so ist die neue Zahl um 369 größer als die ursprüngliche. Das Produkt der ersten und dritten Ziffer ist gleich der zweiten Ziffer, während die Summe der ersten und dritten Ziffer um 1 kleiner ist als die zweite Ziffer. Wie heißt die Zahl?

46. Es gibt einen Fluß, dessen Name mit drei Buchstaben geschrieben wird. Setzt man für jeden Buchstaben die Zahl, durch welche seine Stelle im Alphabet bezeichnet wird, so ist die Summe der drei Zahlen 31. Das Doppelte der ersten und das Fünffache der zweiten geben das Sechsfache der dritten. Das Quadrat der zweiten übertrifft die Summe der Quadrate der ersten und dritten um 11. Wie heißt der Fluß?

47. Der Name einer Stadt wird mit drei Buchstaben geschrieben. Bezeichnet man die Buchstaben, wie in der vorigen Aufgabe, durch die entsprechenden Zahlen, so ist die Summe derselben

Digitized by Google

gleich 43. Das Vierfache der ersten übertrifft das Vierfache der zweiten um das Dreifache der dritten. Wäre die erste um 17, die zweite um 5 kleiner, so würden die drei Zahlen eine stetige Proportion bilden. Wie heißt die Stadt?

48. Vier Zahlen bilden eine Proportion. Das Produkt der inneren und äußeren Glieder beträgt 60. Die Summe aller Glieder beträgt 35, die Summe ihrer Quadrate 377. Wie heißen die Zahlen?

49. Es gibt vier Zahlen, von denen je zwei aufeinander folgende dieselbe Differenz haben. Das Produkt aller vier Zahlen ist 14560; die Summe der beiden mittleren beträgt 23. Wie heißen die Zahlen?

50. Der Name einer Stadt wird mit vier Buchstaben geschrieben. Bezeichnet man die Buchstaben, wie in Aufgabe 46., durch die ihren Stellen im Alphabet entsprechenden Zahlen, so haben diese folgende Eigentümlichkeiten. Die Summe der ersten und der dritten übertrifft die Summe der zweiten und der vierten um 1. Die Summe der Quadrate aller Zahlen ist 1155. Dividiert man die Summe der drei letzten durch die erste, so erhält man 4, Rest 1. Dividiert man die Summe der ersten, dritten und vierten durch die zweite, so erhält man 11, Rest 1. Wie heißt die Stadt?

XXVII. Arithmetische Reihen.

A. Theorie.

1. Unter einer Reihe versteht man in der Arithmetik eine gesetzmäßige Aufeinanderfolge von Zahlen. Die Zahlen

$$a \quad a_1 \quad a_2 \quad a_3 \quad a_4 \quad a_5 \ldots a_n$$

bilden nur dann eine Reihe, wenn sich jede von ihnen aus der vorhergehenden immer nach demselben Gesetze ableiten läßt. Die Zahlen, aus welchen die Reihe besteht, heißen die Glieder der Reihe. Wachsen die Glieder, so heißt die Reihe steigend; nehmen sie ab, so heißt sie fallend. Unter der Summe einer Reihe versteht man die Summe aller Glieder einer Reihe.

2. Das einfachste Gesetz, nach welchem die Glieder einer Reihe auseinander gebildet werden können, ist das: Je zwei aufeinander folgende Glieder der Reihe haben dieselbe Differenz. Eine solche Reihe heißt eine arithmetische Reihe*) (oder arithmetische Progression). Die Differenz zwischen je zwei aufeinander folgenden Gliedern heißt die Differenz der Reihe. Ist das erste

*) Genauer eine arithmetische Reihe erster Ordnung. Es gibt auch arithmetische Reihen höherer Ordnung, von denen indessen hier nicht weiter die Rede sein wird.

Digitized by Google

Glied der arithmetischen Reihe a, die Differenz d, die Anzahl der Glieder n, so muß eine solche Reihe die Form haben:

$$\overset{1.}{a} \quad \overset{2.}{a+d} \quad \overset{3.}{a+2d} \quad \overset{4.}{a+3d} \ldots . \overset{n.}{a+(n-1)d}.$$

Diese Reihe gibt die allgemeine Form einer arithmetischen Reihe (erster Ordnung). Der Faktor von d ist in jedem Gliede um 1 kleiner als die betreffende Anzahl der Glieder: er muß demgemäß im n-ten Gliede den Wert $(n-1)$ haben. Die Reihe ist steigend, wenn d positiv ist; sie ist fallend, wenn d negativ ist. Der Name dieser Reihen rührt daher, daß je drei aufeinander folgende Glieder eine stetige arithmetische Proportion bilden, oder daß jedes Glied das arithmetische Mittel zwischen dem vorhergehenden und dem folgenden ist. (Vgl. Abschn. X, Anm. auf S. 69 u. Nr. 13.)

3. Die einfachsten arithmetischen Reihen sind die Reihe der natürlichen oder ganzen Zahlen, die Reihe der geraden Zahlen und die Reihe der ungeraden Zahlen, also folgende drei Reihen:

$$\begin{array}{llllll} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \cdots & n \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \cdots & 2n \\ 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \cdots & 2n-1. \end{array}$$

Kennt man zwei aufeinander folgende Glieder einer arithmetischen Reihe, so läßt sich aus ihnen die ganze Reihe bilden, vorwärts und rückwärts. Sind z. B. 7 und 11 zwei solche Glieder, so heißt die Reihe vorwärts 7, 11, 15, 19 usw., rückwärts 11, 7, 3, -1, -5 usw. Man hat nur die Differenz zu suchen, hier $11-7=4$, diese im ersten Fall immer zu addieren, im zweiten Fall immer zu subtrahieren.

4. Das (letzte oder) n-te Glied einer Reihe bezeichnet man mit z, ihre Summe mit s. Danach kommen bei einer arithmetischen Reihe fünf Größen in Betracht: das erste Glied a, die Differenz d, die Anzahl der Glieder n, das letzte Glied z, die Summe der Glieder s.

Die beiden einfachsten Aufgaben, zugleich die Hauptaufgaben, welche bei einer Reihe vorkommen, sind die, bei denen das letzte Glied und die Summe der Reihe zu finden sind. Das geschieht für arithmetische Reihen durch die Formeln

$$\text{I.} \quad z = a + (n-1)d$$

$$\text{II.} \quad s = \frac{(a+z)n}{2}.$$

Das letzte Glied einer arithmetischen Reihe wird gefunden, indem man das erste Glied um soviel d vermehrt, als die um Eins verminderte Anzahl der Glieder beträgt. Für 20 Glieder ist daher das letzte Glied $a+19d$, für 55 Glieder $a+54d$, für 100 Glieder $a+99d$. — Der Beweis für die Formel ergibt sich unmittelbar aus der Bildung der allgemeinen Reihe.

Die Summe einer arithmetischen Reihe wird gefunden, indem man das erste und letzte Glied addiert und die Hälfte

Digitized by Google

dieser Summe mit der Anzahl der Glieder multipliziert. Setzt man für das letzte Glied in der allgemeinen Reihe s, so müssen die vorhergehenden $s - d$, $s - 2d$ usw. sein. Addiert man daher zu der allgemeinen Reihe

$$a,\ a + d,\ a + 2d,\ \ldots s - 2d,\ s - d,\ s$$

gliederweise die umgekehrte Reihe

$$s,\ s - d,\ s - 2d,\ \ldots a + 2d,\ a + d,\ a,$$

so erhält man überall $a + s$, also im ganzen $(a + s) \cdot n$. Das muß die doppelte Summe der Reihe sein.

5. Eliminiert man s aus II durch I, so erhält man

$$\text{III.}\quad s = an + \frac{n(n-1)d}{2},$$

in welcher Formel s direkt durch a, d und n ausgedrückt ist. Ebenso gibt die Elimination von a aus II durch I die Formel

$$\text{IV.}\quad s = s \cdot n - \frac{n(n-1)}{2} \cdot d.$$

6. Die vier vorstehenden Formeln, von denen die beiden ersten die wichtigsten sind, genügen für die Lösung aller Aufgaben, welche sich über arithmetische Reihen aufstellen lassen. Es kommen fünf Größen in Betracht. Für diese sind zwei Gleichungen vorhanden. Aus zwei Gleichungen lassen sich nur zwei Größen bestimmen. Von den fünf Größen müssen daher drei gegeben sein. Das gibt im ganzen zehn Fälle. Es können gegeben sein:

1) adn, 2) ads, 3) ads, 4) ans, 5) ans,
6) ass, 7) dns, 8) dns, 9) dss, 10) nss.

Von diesen zehn Fällen oder Aufgaben führen acht auf Gleichungen des ersten Grades und nur zwei, wenn ads und sds gegeben sind, auf quadratische Gleichungen. Der durch Auflösung solcher Aufgaben sich ergebende Wert für die Gliederzahl n muß der Bedeutung dieser Größe gemäß natürlich stets eine ganze positive Zahl sein; dagegen können die vier Größen a, d, s, s jeden beliebigen positiven oder negativen, ganzen oder gebrochenen Wert besitzen. — Bei der Lösung anderer Aufgaben über arithmetische Reihen genügt es zur Bestimmung der Reihe, wie hier, ebenfalls, wenn man zwei Gleichungen über die fünf hier in Betracht kommenden Größen aufstellen kann.

B. Aufgaben.

1. Wie heißt die 33. ungerade Zahl, und wie groß ist die Summe der ersten 33 ungeraden Zahlen?

2. Wie heißt die 44. gerade Zahl, und wie groß ist die Summe der ersten 44 geraden Zahlen?

3. Wie groß ist die Summe aller natürlichen Zahlen von 1 bis 1000?

Digitized by Google

4. Wie groß ist die Summe aller ungeraden Zahlen von 1 bis 99?

5. Wie groß ist die Summe aller geraden Zahlen von 2 bis 100?

6. Wie groß ist das 30. Glied der arithmetischen Reihe 1, 4, 7 ..., und wie groß die Summe der ersten 30 Glieder?

7. Wie groß ist das 70. Glied der arithmetischen Reihe 1, 5, 9 ..., und wie groß die Summe der ersten 70 Glieder?

8. Eine arithmetische Reihe fängt mit 2 an, ihre Differenz ist 3, ihr letztes Glied 77. Wie groß ist die Anzahl der Glieder und wie groß ihre Summe?

9. Die Differenz einer arithmetischen Reihe ist — 4, das letzte Glied 1. Wie groß ist die Anzahl der Glieder und wie groß ihre Summe, wenn die Reihe mit 101 anfängt?

10. Das erste Glied einer arithmetischen Reihe ist 7, die Anzahl der Glieder 22, das letzte Glied 70. Wie groß ist die Differenz und wie groß die Summe der Reihe?

11. Das letzte Glied einer arithmetischen Reihe ist 4, die Anzahl der Glieder 30. Wie groß sind die Differenz und die Summe der Reihe, wenn die Reihe mit 149 anfängt?

12. Die Summe einer arithmetischen Reihe ist 1000, die Anzahl ihrer Glieder 25. Wie groß sind die Differenz und das letzte Glied, wenn die Reihe mit 64 anfängt?

13. Das letzte Glied einer arithmetischen Reihe ist 172, die Summe 2222. Wie groß sind die Differenz und die Anzahl der Glieder, wenn die Reihe mit — 128 anfängt?

14. Die Differenz einer arithmetischen Reihe ist 7, ihr letztes Glied 1000. Wie groß sind das erste Glied und die Summe der Reihe, wenn die Anzahl der Glieder 140 ist?

15. Die Differenz einer arithmetischen Reihe ist $\frac{1}{2}$, die Anzahl der Glieder 25, ihre Summe 100. Wie groß sind das erste Glied und das letzte Glied?

16. Das letzte Glied einer arithmetischen Reihe ist 27, die Summe 777. Wie groß sind das erste Glied und die Differenz, wenn die Anzahl der Glieder 37 beträgt?

17. Die Differenz einer arithmetischen Reihe ist 4, ihre Summe 999. Wie groß sind das letzte Glied und die Anzahl der Glieder, wenn die Reihe mit — 15 anfängt?

18. Das erste Glied einer arithmetischen Reihe ist $17\frac{1}{2}$, die Differenz 5, die Summe 1300. Wie groß sind die Anzahl der Glieder und das letzte Glied?

19. Das letzte Glied einer arithmetischen Reihe ist 58, die Summe der Glieder 555. Wie groß sind das erste Glied und die Anzahl der Glieder, wenn die Differenz gleich 3 ist?

20. Die Differenz einer arithmetischen Reihe ist — 3, das letzte

Digitized by Google

Glied -114. Wie groß sind das erste Glied und die Anzahl der Glieder, wenn die Summe 747 ist?

21. Zwischen den Zahlen 5 und 7 sollen 5 Zahlen so eingeschaltet werden, daß alle 7 Zahlen eine arithmetische Reihe bilden.

22. Zwischen je zwei aufeinander folgenden Gliedern der arithmetischen Reihe 1, 7, 13 ... sollen 3 Glieder so eingeschaltet werden, daß wieder eine arithmetische Reihe entsteht.

23. Zwischen a und b sollen n Zahlen so eingeschaltet werden, daß alle $n + 2$ Zahlen eine arithmetische Reihe bilden.

---

24. Das 7. Glied einer arithmetischen Reihe heißt 20, das 13. Glied 38. Wie heißt das 167. Glied?

25. Das 6. Glied einer arithmetischen Reihe heißt 30, die Summe der ersten 13 Glieder beträgt 455. Wie groß ist die Summe der ersten 30 Glieder?

26. Die Summe des 5. und des 8. Gliedes einer arithmetischen Reihe beträgt 37, die Summe der ersten 10 Glieder 155. Wie heißt das 20. Glied?

27. In einer arithmetischen Reihe von 6 Gliedern ist die Summe aller Glieder 66, die Summe ihrer Quadrate 1006. Wie groß sind das erste Glied und die Differenz?

28. In einer arithmetischen Reihe von 100 Gliedern ist die Summe aller Glieder gleich 10 000, das Produkt der beiden mittleren Glieder gleich 9999. Wie groß sind das erste Glied und die Differenz?

29. In einer arithmetischen Reihe von 20 Gliedern ist die Summe aller Glieder gleich 590, die Summe der Quadrate der beiden mittleren Glieder gleich 1745. Wie groß sind das erste Glied und die Differenz?

30. In einer arithmetischen Reihe von 12 Gliedern ist die Summe der beiden mittleren Glieder gleich 37, die Summe der Quadrate aller Glieder gleich 5394. Wie groß sind das erste Glied und die Differenz?

31. Ein Beamter erhält wegen guter Führung in jedem Jahre 30 ℳ Zulage, d. h. in jedem folgenden Jahre 30 ℳ mehr als im vorhergehenden. Wie hoch beläuft sich sein Gehalt im 20. Jahre, wenn er im ersten Jahre, als er eintrat, 2400 ℳ erhielt, und wieviel erhielt er in den 20 Jahren zusammengenommen?

32. Einem Diener wird ein Lohn von 200 ℳ versprochen, mit dem Bemerken, daß er bei guter Führung jedes Jahr 15 ℳ Zulage erhalte, bis 500 ℳ voll seien. Wie lange muß er bleiben, um die volle Summe zu erhalten, und wieviel hat er dann von seinem Gehalte erübrigt, wenn er im ersten Jahre 10 ℳ zurücklegt,

Digitized by Google

in jedem folgenden 20 ℳ mehr als im vorhergehenden, die Zinsen nicht gerechnet?

33. Jemand läßt einen Brunnen graben. Er zahlt für das erste Meter 5 ℳ, für jedes folgende 50 *Pf.* mehr als für das vorhergehende. Wie tief wurde der Brunnen, wenn im ganzen 590 ℳ gezahlt wurden?

34. Jemand will sich 1000 ℳ ersparen, indem er in jedem folgenden Jahre 10 ℳ mehr zurücklegt als im vorhergehenden. Er fängt mit 40 ℳ an. Wie lange wird er sparen müssen?

35. Unter 20 Knaben sollen 7 Schock Nüsse verlost werden in der Art, daß derjenige, welcher die folgende Nummer zieht, 2 Nüsse weniger erhält als derjenige, welcher die vorhergehende Nummer hat. Wieviel Nüsse erhielt jeder?

36. Ein Kranker will sich durch Bewegung in frischer Luft wieder gesund machen. Er beschließt jeden folgenden Tag 500 *m* mehr zu machen als am vorhergehenden, bis er auf täglich 2 Meilen oder 15 *km* gekommen ist. An welchem Tage wird er zum erstenmal diese Strecke zurücklegen, wenn er mit 1000 *m* am ersten Tage anfängt?

37. A legt monatlich eine kleine Summe zurück, jedesmal 2,30 ℳ mehr als im vorhergehenden Monat, er beginnt mit 25 ℳ. Zu gleicher Zeit beginnt B seine Ersparnisse in der Art anzugreifen, daß er monatlich eine gewisse Summe davon entnimmt, das erste Mal 30 ℳ, jedes folgende Mal 1,70 ℳ mehr. Wann wird der Sparbesitz bei beiden dieselbe Höhe aufweisen, wenn B ursprünglich 730 ℳ mehr besaß als A?

38. Einem Fußgänger, der seinen Marsch mit einer Geschwindigkeit von 4,2 *km* in der Stunde beginnt, in jeder folgenden Stunde aber 0,3 *km* weniger zurücklegt, als in der vorhergehenden, folgt nach einer Stunde ein zweiter, der seinen Marsch mit 3,6 *km* in der Stunde beginnt, diesen aber so beschleunigt, daß die stündlich zurückgelegte Strecke nun fortwährend um 0,6 *km* zunimmt. Wann wird er den ersten einholen?

39. Ein Meteorolog machte die Beobachtung, daß in den ersten 15 Tagen des August die mittlere Temperatur täglich um $\frac{1}{4}$ Grad stieg, in den letzten 16 Tagen täglich um $\frac{1}{2}$ Grad abnahm. Wie hoch war die mittlere Temperatur des August, und wieviel Grad zeigte das Thermometer, als es sein Maximum erreicht hatte, wenn am 1. August die mittlere Temperatur 14 Grad betrug?

40. Geologen haben die Wahrnehmung gemacht, daß die Erdwärme so weit, als man bisher in die Erde eingedrungen ist, alle 32 *m* um 1 Grad Celsius zunimmt. Man ist bis jetzt etwa 1000 *m* in die Erde eingedrungen. Wie hoch muß die Temperatur hier sein, wenn sie an der Oberfläche zu 10 Grad gerechnet wird?

Digitized by Google

41. In welcher Tiefe müssen nach der Annahme der vorhergehenden Aufgabe der Schwefel, das Silber, das Schmiedeeisen schmelzen, wenn ihre Schmelzpunkte bez. auf 111 Grad, 1000 Grad und 1600 Grad angenommen werden?

42. Nach den Gesetzen der Physik erlangt ein im luftleeren Raum frei fallender Körper in jeder Sekunde einen Zuwachs an Geschwindigkeit von 9,81 *m**). Diese Größe wird in der Physik kurz mit g bezeichnet und heißt die Fallbeschleunigung. Diese Beschleunigung tritt zu der bereits vorhandenen Geschwindigkeit hinzu. Bei Beginn des Falles hat der Körper die Geschwindigkeit Null, nach einer Sekunde ist diese auf g angewachsen, die Fallstrecke ist ebenso groß, als sie sein würde, wenn der Körper während der ganzen Sekunde mit gleichmäßiger Geschwindigkeit, die zwischen der Anfangsgeschwindigkeit Null und der Endgeschwindigkeit g das arithmetische Mittel ist, also mit der Geschwindigkeit $\frac{g}{2}$ gefallen wäre, dieser Wert ist die mittlere Geschwindigkeit der ersten Sekunde. Wie groß ist danach die Geschwindigkeit nach 10, nach 20 Sekunden, wie groß ist die mittlere Geschwindigkeit in der 10., in der 20. Sekunde, und welchen Weg hat der Körper in dieser Zeit zurückgelegt?

43. In wieviel Sekunden wird ein frei fallender Körper einen Raum von 200 *m* durchfallen?

44. Umgekehrt verliert ein senkrecht in die Höhe geschnellter Körper in jeder Sekunde 9,81 *m* von seiner Geschwindigkeit. Wie lange und wie hoch wird danach eine Kugel steigen, die mit einer Geschwindigkeit von 400 *m* senkrecht nach oben abgeschossen wird?

45. Wie lange wird eine Kugel, welche mit einer Geschwindigkeit von 450 *m* senkrecht nach oben abgeschossen wird, gebrauchen, bis sie wieder auf die Erde fällt, mit welcher Geschwindigkeit stößt sie auf, und wie hoch wird sie gestiegen sein?

46. Die Bewegung einer Kugel, welche eine schiefe Ebene hinabrollt, geht ebenfalls nach den Fallgesetzen vor sich. Wenn eine solche Kugel in der ersten Sekunde einen Weg von 2 *m* zurücklegt, welchen Weg muß sie in der 5. Sekunde zurücklegen, welche Geschwindigkeit hat sie nach 5 Sekunden erlangt, und welchen Weg legt sie in 5 Sekunden zurück?

---

*) Unter Geschwindigkeit versteht man in der Physik kurz den bei gleichförmiger Bewegung in einer Sekunde (der Zeiteinheit) durchlaufenen Weg. — Der Widerstand der Luft ist hier, wie in den folgenden Aufgaben dieser Art, nicht zu berücksichtigen. — Die Fallgesetze sind in den Formeln $v = c + gt$ und $s = ct + \frac{1}{2}gt^2$ enthalten, wo v die nach t Sekunden erlangte Geschwindigkeit ist, c die bei Beginn des Falles schon vorhandene (etwa von einem Stoß herrührende) Anfangsgeschwindigkeit, s der durchlaufene Raum. Bei einer aufwärts gerichteten Bewegung ist $-$ statt $+$ zu setzen. Die Aufgaben sind 1) direkt, 2) nach diesen Formeln zu lösen.

Digitized by Google

47. Eine Kugel wird mit einer Geschwindigkeit von 20 *m* eine schiefe Ebene hinaufgeworfen. Sie kommt nach 10 Sekunden wieder unten an. Wieweit lief sie die Ebene hinauf, und wie groß ist die Beschleunigung?

48. Jemand läßt in einen tiefen Brunnen einen Stein fallen. Er hört das Aufschlagen desselben auf das Wasser nach 10 Sekunden. Wie tief war der Brunnen, wenn der Schall in jeder Sekunde $\frac{1}{8}$ *km* zurücklegt?

49. Um die Summe der n ersten Quadratzahlen zu finden, bildet man $1^3 = (0+1)^3 = 1$, $2^3 = (1+1)^3 = 1^3 + 3 \cdot 1^2 + 3 \cdot 1 + 1$, $3^3 = (2+1)^3 = 2^3 + 3 \cdot 2^2 + \cdot 3 \cdot 2 + 1$ usw. bis $(n+1)^3 = n^3 + 3 \cdot n^2 + 3 \cdot n + 1$ und addiert diese Gleichungen. Man erhält

$$1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + \cdots n^2 = \tfrac{1}{6} n(n+1)(2n+1).$$

Beweise das, und berechne nach der gefundenen Formel die Summe der 20, 30, 40 ersten Quadratzahlen.

50. Um die Summe der n ersten Kubikzahlen zu finden, hat man, wie oben die dritten Potenzen von $0+1$, $1+1$, $2+1$, $3+1$ usw., so hier die vierten Potenzen zu bilden. Mit Benutzung der in der vorhergehenden Aufgabe gefundenen Formel erhält man

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + 5^3 + \cdots n^3 = \tfrac{1}{4} n^2 (n+1)^2 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2,$$

d. h. die Summe der n ersten Kubikzahlen ist gleich dem Quadrat der Summe der n ersten natürlichen Zahlen. So ist $1^3 + 2^3 + 3^3 = (1+2+3)^2$. Leite die obige Formel vollständig her, und gib nach derselben die Summe der 20, 30, 40 ersten Kubikzahlen an.

XXVIII. Geometrische Reihen.

A. Theorie.

1. Eine Reihe, in welcher je zwei aufeinander folgende Glieder denselben Quotienten haben, heißt eine geometrische Reihe (oder geometrische Progression). Der Quotient je zweier aufeinander folgender Glieder heißt der Quotient der Reihe. Ist das erste Glied der Reihe a, der Quotient q, die Anzahl der Glieder n, so muß die allgemeine Form einer geometrischen Reihe folgende sein:

1.	2.	3.	4.		n.
a	aq	aq^2	aq^3	$\cdots$	aq^{n-1}

Der Name der Reihe rührt daher, daß je drei aufeinander folgende Glieder eine stetige geometrische Proportion bilden, oder daß jedes

Digitized by Google

Glied das geometrische Mittel zwischen dem vorhergehenden und dem folgenden ist (vgl. Abschn. X, Anm. auf S. 69 u. Nr. 12.). Bei der geometrischen Reihe kommen, wie bei der arithmetischen, ebenfalls fünf Größen in Betracht: das erste Glied a, der Quotient q, die Anzahl der Glieder n, das letzte Glied z und die Summe der Glieder s.

2. Auch bei dieser Reihe sind besonders zwei Gleichungen zu merken. Diese genügen, um alle hierher gehörigen Aufgaben zu lösen:

$$\text{I.}\quad z = aq^{n-1}$$

$$\text{II.}\quad s = \frac{a(q^n-1)}{q-1} = \frac{a(1-q^n)}{1-q}.$$

Das letzte Glied einer geometrischen Reihe ist gleich der $(n-1)$ten Potenz des Quotienten, multipliziert mit dem ersten Gliede. Dies folgt direkt aus dem Bildungsgesetz der allgemeinen Reihe. Demgemäß muß das 10., 34., 47. Glied einer solchen Reihe bezw. aq^9, aq^{33}, aq^{46} heißen.

Die Summe einer geometrischen Reihe wird gefunden, indem man die um 1 verminderte $n$te Potenz des Quotienten durch den um 1 verminderten Quotienten dividiert und das Resultat mit dem ersten Gliede multipliziert. — Subtrahiert man die erste der beiden Gleichungen

$$s = a + aq + aq^2 + aq^3 + \cdots + aq^{n-2} + aq^{n-1}$$
$$qs = aq + aq^2 + aq^3 + aq^4 + \cdots + aq^{n-1} + aq^n$$

von der zweiten, so heben sich alle Glieder von aq bis aq^{n-1} fort und man erhält durch Division mit $(q-1)$ den ersten der beiden in Formel II für die Summe s angegebenen Ausdrücke. Diesen wird man anwenden, wenn $q > 1$ ist. Ist dagegen $q < 1$, so wird man die Gleichung für qs von der für s abziehen und dann durch $1-q$ dividieren, dadurch gelangt man zu dem zweiten in Formel II angegebenen, auf diesen Fall passenden Ausdruck. Beide Ausdrücke gehen durch Erweiterung mit (-1) ineinander über.

Da $aq^n = aq^{n-1} \cdot q = z \cdot q$ ist, so folgt aus der Formel II die Formel

$$\text{III.}\quad s = \frac{qz-a}{q-1} = \frac{a-qz}{1-q}.$$

Ist z gegeben oder bereits gefunden, so wird mit Hilfe dieser Formel auch s leicht bestimmt.

3. Ist $q > 1$, so nehmen die Glieder der Reihe fortwährend an Größe zu und zwar erfolgt diese Zunahme früher oder später in viel stärkerem Verhältnis, als bei der arithmetischen Reihe, mag deren Differenz noch so groß sein. Ist z. B. $q = \frac{3}{2}$ $d = 5$, so lauten die mit dem Gliede Eins beginnenden beiden Reihen arithmetischer und geometrischer Art

1	6	11	16	21	20	31	46	41	..
1	$\frac{3}{2}$	$\frac{9}{4}$	$\frac{27}{8}$	$\frac{81}{16}$	$\frac{243}{32}$	$\frac{729}{64}$	$\frac{2187}{128}$	$\frac{6561}{256}$	..

Digitized by Google

Bis zum siebenten Gliede ist die Größendifferenz zwischen zwei aufeinander folgenden Gliedern bei der arithmetischen Reihe stärker als bei der geometrischen. Sie beträgt zwischen dem sechsten und dem siebenten Gliede der geometrischen Reihe nur $3\frac{51}{64}$, also weniger als die konstante Differenz der arithmetischen Reihe, die den Wert 5 hat. Zwischen dem 7. und dem 8. Gliede ist sie bereits auf $5\frac{89}{128}$ gestiegen, durch ihr fortwährendes Wachstum hat sie allmählich den Differenzwert der arithmetischen Reihe überholt. Von hier an übertrifft die Zunahme der Glieder der geometrischen Reihe die Zunahme der der arithmetischen in immer wachsendem Grade.

Solche Reihe heißt eine steigende Reihe.

4. Bei der fallenden geometrischen Reihe ist $q < 1$, hier nehmen die Glieder fortwährend an Größe ab, und zwar in unbegrenztem Maße, so daß sich der Wert von q^n mit zunehmendem Werte von n mehr und mehr dem Werte Null nähert. So ist z. B. für $q = \frac{1}{2}$ schon $q^{10} = \frac{1}{1024}$, also kleiner als 0,001; $q^{20} = \frac{1}{1048576}$ kleiner als 0,000001.

Hier darf man auch den Fall ins Auge fassen, daß die Gliederzahl der Reihe unendlich groß ist und für diesen Fall ($n = \infty$) dann $q^n = 0$ setzen. Dann erhält man für die Reihensumme die Gleichung

$$s = \frac{a}{1-q}.$$

Reihen von unendlicher Gliederzahl, die trotzdem eine endliche Summe haben, heißen konvergent. Das Maß der Konvergenz hängt von dem Grade ab, in dem die Glieder solcher Reihen an Größe abnehmen. Die Reihe, für die $q = \frac{1}{3}$ ist, konvergiert stärker, als die, für die $q = \frac{1}{2}$ ist. Bei der ersten kommt man durch Fortführung bis zum 7. Gliede dem Schlußwerte schon näher, als bei der zweiten durch Fortführung bis zum 10. Gliede.

5. Bei beiden Arten von Reihen, der steigenden, wie der fallenden, kann q sowohl positiv als auch negativ sein; bei negativem q haben die Glieder der Reihe wechselnde Zeichen. Auch kann q ebensowohl einen ganzzahligen, wie einen gebrochenen Wert haben. Dagegen muß die Gliederzahl stets eine positive ganze Zahl sein.

6. Unendliche Reihen, deren Glieder nach Potenzen einer Größe q fortschreiten, die ihrem absoluten Werte nach kleiner als 1 ist, können auch dann noch summiert werden, wenn die Koeffizienten der Potenzen eine arithmetische Reihe bilden. — Hat man z. B.

$$s = 1 + 4q + 7q^2 + 10q^3 + 13q^4 + \cdots$$

zu bestimmen, so erhält man leicht, indem man die Gleichung mit q multipliziert und die neue Gleichung von der ursprünglichen subtrahiert,

$$s(1-q) = 1 + 3q + 3q^2 + 3q^3 + \cdots = 1 + \frac{3q}{1-q} = \frac{1+2q}{1-q}$$

$$s = \frac{1+2q}{(1-q)^2}.$$

Digitized by Google

7. Auch bei der geometrischen Reihe kommen zunächst zehn Fälle oder zehn Aufgaben in Betracht, wenn von den fünf vorkommenden Größen drei direkt gegeben sind:

1) aqn, 2) aqs, 3) aqs, 4) ans, 5) ans,
6) ass, 7) qns, 8) qns, 9) qss, 10) nss.

Von diesen zehn Aufgaben sind die 5. und die 10. (wenn ans oder nss gegeben sind) nur in besonderen Fällen lösbar, nicht allgemein. Sie führen auf Gleichungen höheren Grades. — Ist die Anzahl der Glieder n nicht gegeben, so kann diese im allgemeinen nur mit Hilfe der Logarithmen gefunden werden; denn man kommt auf eine Exponentialgleichung.

B. Aufgaben.

1. Das erste Glied einer geometrischen Reihe ist 1, das zweite Glied 2. Wie heißen die ersten 10 Glieder, und wie groß ist ihre Summe?

2. Das 5. Glied einer geometrischen Reihe heißt 1, das 6. Glied $\frac{1}{2}$. Wie heißen die ersten 12 Glieder, und wie groß ist ihre Summe?

3. Das erste Glied einer geometrischen Reihe heißt 0,025, der Quotient 2. Wie heißt das 8. Glied s, und wie groß ist die Summe der ersten 8 Glieder?

4. Das erste Glied einer geometrischen Reihe ist $20\frac{1}{4}$, der Quotient $\frac{2}{3}$. Wie groß ist das 20. Glied, und wie groß die Summe der ersten 20 Glieder?

5. Das erste Glied einer geometrischen Reihe ist $3\frac{13}{81}$, der Quotient $\frac{3}{4}$, das letzte Glied $\frac{9}{16}$. Wie groß sind die Anzahl der Glieder und die Summe?

6. Das erste Glied einer geometrischen Reihe ist $4\frac{59}{243}$, der Quotient $1\frac{1}{2}$. Wie groß sind die Anzahl der Glieder und die Summe, wenn das letzte Glied 2768 ist?*)

7. Der Quotient einer geometrischen Reihe ist 1,5, die Summe $\frac{665}{1944}$. Wie groß sind die Anzahl der Glieder und das letzte Glied, wenn die Reihe mit $\frac{4}{243}$ anfängt?

8. Dieselbe Aufgabe für $a = 5$, $q = 0{,}9$, $s = 43{,}922$.

9. Das 6. Glied einer geometrischen Reihe ist $11\frac{1}{4}$. Wie groß sind die Summe der ersten 6 Glieder und der Quotient, wenn die Reihe mit $\frac{40}{27}$ anfängt?

10. Dieselbe Aufgabe für $a = 100$, $n = 21$, $s = 1{,}1529$.

11. Das letzte Glied einer geometrischen Reihe ist 8, ihre

*) Bei dieser und ähnlichen Aufgaben, bei welchen die gewöhnliche Rechnung zu umständlich ist, sind die Logarithmen anzuwenden.

Digitized by Google

Summe 65. Wie groß sind der Quotient und die Anzahl der Glieder, wenn die Reihe mit 27 anfängt?

12. Dieselbe Aufgabe für $a = 1000$, $s = 10{,}025$, $s = 3969{,}93$.

13. Der Quotient einer geometrischen Reihe ist $\frac{5}{6}$, das 5. Glied 625. Wie groß sind das erste Glied und die Summe der ersten 5 Glieder?

14. Dieselbe Aufgabe für $q = \frac{7}{8}$, $n = 15$, $s = 1$.

15. Der Quotient einer geometrischen Reihe ist $1\frac{1}{4}$, die Summe 11529. Wie groß sind das erste Glied und das letzte Glied, wenn die Anzahl der Glieder 6 ist?

16. Dieselbe Aufgabe für $q = \frac{5}{6}$, $n = 20$, $s = 6000$.

17. Das letzte Glied einer geometrischen Reihe ist 4096, ihre Summe 14197. Wie groß sind das erste Glied und die Anzahl der Glieder, wenn der Quotient der Reihe $1\frac{1}{8}$ ist?

18. Dieselbe Aufgabe für $q = 0{,}78$, $s = 10{,}686$, $s = 416{,}66$

19. Zwischen je zwei aufeinander folgenden Gliedern der geometrischen Reihe 3, 6, 12 usw. sind drei Glieder so einzuschalten, daß wieder eine geometrische Reihe entsteht.

20. Schalte zwischen 1 und a vier Zahlen so ein, daß alle 6 Zahlen eine geometrische Reihe bilden.

21. Schalte zwischen a^7 und b^7 sechs Glieder so ein, daß eine geometrische Reihe entsteht.

22. Drei Zahlen bilden eine geometrische Reihe. Die Summe ist 26. Wie heißen die beiden letzten Glieder, wenn das erste Glied 2 ist?

23. Die Summe einer geometrischen Reihe von drei Gliedern beträgt 19. Wie heißen die beiden ersten Glieder, wenn das dritte Glied 9 ist?

24. In einer geometrischen Reihe von 8 Gliedern ist das 3. Glied 288, das 6. Glied 972. Wie groß ist das erste Glied, der Quotient, das letzte Glied und die Summe?

25. Wie groß sind folgende unendlichen Reihensummen:

1) $5 + \frac{5}{2} + \frac{5}{4} + \cdots$
2) $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \cdots$
3) $6 + 2 + \frac{2}{3} + \cdots$
4) $12 - 4 + \frac{4}{3} - \frac{4}{9} + \cdots$
5) $2 + \frac{6}{5} + \frac{18}{25} + \cdots$
6) $8 - \frac{24}{5} + \frac{72}{25} - \cdots$
7) $1 + 0{,}2 + (0{,}2)^2 + \cdots$
8) $1 - 0{,}6 + (0{,}6)^2 - \cdots$

26. Bestimme den Wert der folgenden unendlichen Reihensummen:

1) $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$
2) $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \cdots$
3) $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \cdots$
4) $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{9} - \frac{1}{27} + \cdots$
5) $1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots$
6) $1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \cdots$
7) $1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \cdots$
8) $1 - \frac{3}{4} + \frac{9}{16} - \cdots$

Digitized by Google

27. Beweise die Gleichheit folgender unendlicher Reihensummen:

1) $3 - \frac{3}{2} + \frac{3}{4} - \frac{3}{8} + \cdots = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \cdots$

2) $2 + \frac{2}{3} + \frac{2}{9} + \frac{2}{27} + \cdots = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \cdots$

3) $2 + \frac{2}{2} + \frac{2}{4} + \frac{2}{8} + \cdots = 1 + \frac{3}{4} + \frac{9}{16} + \frac{27}{64} + \cdots$

28. Wie groß sind die Summen folgender unendlichen Reihen, vorausgesetzt, daß sie konvergent sind, also x dem absoluten Werte nach < 1 ist?

1) $1 + 2x + x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5 + \cdots$

2) $1 + 2x - x^2 + 2x^3 + x^4 + 2x^5 - x^6 + \cdots$

3) $1 - 2x + x^2 + x^3 - 2x^4 + x^5 + x^6 - \cdots$

4) $1 + 2x + x^2 - x^3 - 2x^4 - x^5 + x^6 + \cdots$

5) $x + x^2 - 2x^3 + x^4 + x^5 - 2x^6 + x^7 - \cdots$

29. Wie groß sind die Summen folgender unendlichen Reihen, vorausgesetzt, daß sie konvergent sind?

$1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \cdots$ $\quad 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \cdots$

$1 + 3x + 5x^2 + 7x^3 + \cdots$ $\quad 2 - 4x + 6x^2 - 8x^3 + \cdots$

$2 + 5x + 8x^2 + 11x^3 + \cdots$ $\quad 3 - 7x + 11x^2 - 15x^3 + \cdots$

30. In einem Gefäß sind 25 *l* Wein. Jemand füllt 2 *l* aus und gießt dafür 2 *l* Wasser hinzu, füllt wieder 2 *l* der Mischung aus und gießt dafür 2 *l* Wasser hinzu usw. Wieviel Liter des ursprünglichen Weins sind noch in dem Gefäß, nachdem man die Manipulation 10mal gemacht hat?

31. In einem Gefäß sind 120 *l* von 88prozentigem Spiritus. Wieviel Liter reiner Spiritus sind noch in dem Gefäß, nachdem man 15mal 3 *l* der vorhandenen Flüssigkeit ausgeschöpft und dafür jedesmal 3 *l* Wasser hineingegossen hat?

32. Wie groß ist die Dichtigkeit in dem Rezipienten einer Luftpumpe nach 15 Kolbenzügen, wenn der Rezipient (nebst dem Verbindungskanal) 28 *cbdm*, der Stiefel, den Raum für den Kolben abgerechnet, 7 *cbdm* hält?

33. Jemand hat ein Gefäß mit 256 *l* Wein. Er zapft eine gewisse Quantität ab und ersetzt die abgezapfte Flüssigkeit durch Wasser. Dieselbe Operation nimmt er an der verdünnten Flüssigkeit und dann an dem Ergebnis der zweiten sowie an dem der dritten Verdünnung von neuem vor. Danach enthält das Gefäß an Wein noch 81 *l*. Wieviel hat er jedesmal abgezapft?

34. An 2000 *l* 50prozentigen Alkohols wird eine dreimalige Verdünnung in der Weise vorgenommen, daß jedesmal dasselbe Quantum Flüssigkeit abgezapft und durch Wasser ersetzt wird. Dadurch verringert sich der Bestand an reinem Alkohol auf 512 *l*. Wie groß war das jedesmal abgezapfte Quantum?

Digitized by Google

35. Der Rezipient einer Luftpumpe enthalte 88 *cbdm*, der Stiefel (ohne den Raum für den Kolben) 12 *cbdm*. Nach wieviel Kolbenzügen wird die Luft im Rezipienten nur noch $\frac{1}{10}$ der ursprünglichen Dichtigkeit betragen?

36. Aus einem Fasse mit 200 *l* Wasser läßt man jedesmal 10 *l* ab und ersetzt das Fehlende durch Spiritus von 90 Pzt. Wie oft muß das geschehen, damit die Flüssigkeit im Fasse schließlich Spiritus von 60 Pzt. enthält?

37. Aus einem Fasse mit 300 *l* Spiritus von 60 Pzt. läßt man jedesmal 10 *l* ab und ersetzt das Fehlende durch Spiritus von 95 Pzt. Wie oft muß das geschehen, damit die Mischung 80 Pzt. Spiritus hält?

38. Aus einem Fasse mit 500 *l* von 80prozentigem Spiritus füllt man 5 *l* aus und ersetzt das Fehlende durch Wasser. Nachdem gehörig gemischt ist, füllt man abermals 5 *l* der Flüssigkeit aus und ersetzt das Fehlende durch Wasser. Wie oft muß die Manipulation wiederholt werden, damit das Faß nur noch 300 *l* reinen Spiritus enthält?

39. Aus einem Fasse mit 400 *l* von 75prozentigem Spiritus läßt man ähnlich, wie in der vorigen Aufgabe, jedesmal 10 *l* der Flüssigkeit abfließen und ersetzt das Fehlende durch Wasser. Wie oft muß dies Verfahren erfolgen, damit die vorhandene Flüssigkeit noch 35 Pzt. Spiritus enthält?

40. Aus einem Fasse mit 1000 *l* von 90prozentigem Spiritus läßt man ähnlich, wie in den vorigen Aufgaben, jedesmal 20 *l* der Flüssigkeit ab und ersetzt das Fehlende durch Wasser. Dies Verfahren wird 30mal wiederholt. Wieviel Prozent hielt der Spiritus, der schließlich im Fasse war?

41. Ein Faß enthält 333 *l* an 84prozentigem Spiritus. Man läßt jedesmal eine bestimmte Anzahl Liter ab und ersetzt das Fehlende durch Wasser. Nach 40maliger Wiederholung dieser Operation waren im Fasse noch 100 *l* reinen Spiritus. Wieviel Liter wurden jedesmal abgelassen?

42. Das Anfangsglied einer unendlichen geometrischen Reihe habe den Wert 0,47; der Quotient den Wert 0,01. Die Summe der Reihe ist zu bestimmen.

43. Welchen Wert hat die Summe der unendlichen geometrischen Reihe mit dem Anfangsglied 0,259 und dem Quotienten $\frac{1}{1000}$?

44. Welche Bedeutung haben diese beiden Reihensummen für die Dezimalrechnung?

45. Stelle den reinperiodischen Dezimalbruch 0,3609 als Summe einer unendlichen geometrischen Reihe dar und bestimme auf diesem Wege seinen Wert in Form eines gemeinen Bruches.

Digitized by Google

46. Folgere aus dem Vorstehenden die allgemeine Regel für die Verwandlung eines reinperiodischen Dezimalbruchs in einen gemeinen Bruch.

47. Teile den vorperiodischen Dezimalbruch 0,43672672.. derart in zwei Teile, daß der eine als Summe einer unendlichen geometrischen Reihe erscheint, gib für diesen das Anfangsglied und den Quotienten an.

48. Verfahre entsprechend mit dem Dezimalbruch 0,3125757·

49. Verwandle unter Benutzung dieses Sachverhalts die beiden ebengenannten vorperiodischen Dezimalbrüche in gemeine Brüche.

50. Leite hieraus die allgemeine Regel für die Verwandlung vorperiodischer Dezimalbrüche in gemeine Brüche ab.

51. Inwiefern läßt sich ein reinperiodischer Bruch, z. B. der obengenannte Bruch 0,259259.. als ein vorperiodischer Bruch mit beliebiger Vorperiode auffassen?

52. Betrachte den Dezimalbruch 0,259259.. als vorperiodischen Bruch mit zweistelliger Vorperiode, wende auf ihn die Vorschrift über die Verwandlung vorperiodischer Brüche in gemeine Brüche an und zeige, daß das Ergebnis dasselbe ist, wie bei der Behandlung des Bruchs als eines reinperiodischen.

53. Verfahre entsprechend mit dem Bruche 0,285714285714..... unter Annahme einer vierstelligen Vorperiode.

54. Entwickele die Quotienten

$$1)\ \frac{a}{a-x}=\frac{1}{1-\frac{x}{a}} \qquad 2)\ \frac{a}{a+x}=\frac{1}{1+\frac{x}{a}}$$

in unendliche Reihen.

55. Beweise: Wenn x im Verhältnis zu a eine kleine Zahl ist, so hat man genähert

$$1)\ \frac{a}{a-x}=1+\frac{x}{a} \qquad 2)\ \frac{a}{a+x}=1-\frac{x}{a}.$$

56. Gib danach aus dem Kopfe genähert an, wie groß ist

$$1)\ \frac{100}{90}\quad\frac{100}{98}\quad\frac{100}{96}\quad\frac{100}{94}\quad\frac{1000}{987}\quad\frac{1000}{985}\quad\frac{1000}{978}\quad\frac{1000}{975}$$

$$2)\ \frac{100}{110}\quad\frac{100}{109}\quad\frac{100}{108}\quad\frac{100}{107}\quad\frac{100}{106}\quad\frac{100}{105}\quad\frac{100}{104}\quad\frac{100}{103}.$$

57. Wenn man Aktien unter Pari einkauft, deren nomineller Wert 100 $\mathcal{M}$ ist, für

	90	91	92	93	94	95	96	97	98 $\mathcal{M}$,
die bezw.	4	5	$4\frac{1}{2}$	$5\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{4}$	$4\frac{1}{4}$	4,6	4,7	4,8 Pzt.

tragen, wie hoch erhält man sein Geld verzinst? Näherungsweise zu berechnen.

Digitized by Google

58. Wenn man Aktien über Pari einkauft, deren nomineller Wert 100 ℳ ist, für

	110	108	107	105	104,6	103,7	106,8 ℳ,
die bezw.	5	5	4	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{1}{2}$	$4\frac{3}{4}$	$5\frac{1}{4}$ Pzt.

tragen, wie hoch erhält man sein Geld verzinst? Näherungsweise zu berechnen.

XXIX. Zinseszins- und Renten-Rechnung.

A. Theorie.

1. Unter Zinseszinsen versteht man die Zinsen, welche die Zinsen eines Kapitals bringen. Zinseszinsrechnung ist die Rechnung, welche von den Zinseszinsen handelt. — Unter Rente versteht man eine, meist nach Ablauf einer gewissen Zeit, jährlich (halbjährlich, vierteljährlich, monatlich) wiederkehrende Einnahme, auf die man sich einen rechtlichen Anspruch durch Einzahlung eines Kapitals erwerben kann.

2. Alle gewöhnlichen Aufgaben über Zinseszinsrechnung lassen sich leicht mit Hilfe der folgenden Formeln lösen:

$$\text{I.}\quad aq^n = b \qquad q = \frac{100+p}{100}$$

$$\text{II.}\quad aq^n \pm \frac{r(q^n-1)}{q-1} = b$$

$$\text{III.}\quad aq^n \pm \frac{rq(q^n-1)}{q-1} = b.$$

Die erste Formel gibt das Endkapital b an, welches aus dem Anfangskapital a in n Jahren wird, wenn dies zu p Prozent auf Zinseszinsen steht. — Aus 100 ℳ werden in einem Jahre $100+p$, aus 1 ℳ daher $\frac{100+p}{100}$, aus a ℳ $a$mal soviel, also $a \cdot \frac{100+p}{100}$ oder aq. Wenn aus aℳ in einem Jahre aqℳ werden, so werden aus aq im folgenden Jahre aq^2, aus aq^2 im dritten Jahre aq^3 usw. Demgemäß wächst das Kapital a in einem Jahre auf aq, in zwei Jahren auf aq^2, in drei Jahren auf aq^3, in n Jahren auf aq^n an. — Die Größe q heißt der Zinsfaktor. Der Zinsfaktor ist die Zahl, mit welcher man ein Kapital multiplizieren muß, um dasjenige Kapital zu erhalten, zu welchem das ursprüngliche Kapital mit den Zinsen in einem Jahre (oder in der Zeiteinheit) anwächst. Der Zinsfaktor stellt zugleich die Summe dar, zu welcher die Kapitaleinheit (Mark, Taler, Gulden) mit den Zinsen in einem Jahre anwächst. Der Zinsfaktor wird aus der Prozentzahl dadurch gefunden, daß man diese zu 100 addiert und die Summe durch 100 dividiert. Umgekehrt ist

$$p = 100\,(q-1),$$

Digitized by Google

d. h. die Prozentzahl wird aus dem Zinsfaktor dadurch gefunden, daß man diesen um 1 vermindert und den Rest mit 100 multipliziert. — Das Kapital a, welches man auf Zinsen gibt, heißt das Anfangskapital; die Summe, welche aus dem Anfangskapital a mit den Zinsen und Zinseszinsen am Ende der Zeit entstanden ist, heißt das Endkapital (hier b).

3. Die zweite Formel gibt die Summe b an, auf welche ein Kapital a in n Jahren anwächst, wenn es auf Zinseszinsen steht und außer den Zinsen am Ende eines jeden Jahres um dieselbe Summe r vermehrt oder um diese Summe vermindert wird. Das Kapital a erreicht dabei, wenn man zunächst nur den Fall der jährlichen Vermehrung um r ins Auge faßt, nach einem, nach 2, nach 3, nach n Jahren die nachstehend angegebene Größe

$$aq + r$$
$$aq^2 + rq + r$$
$$aq^3 + rq^2 + rq + r$$
$$aq^n + rq^{n-1} + rq^{n-2} + \cdots rq^2 + rq + r.$$

In der letzten Zeile steht hinter dem Anfangsglied aq^n die Summe einer $n$gliedrigen geometrischen Reihe, als deren Anfangsglied man das zuletzt stehende Glied (r) ansehen kann, der Quotient dieser Reihe ist dann die Größe q. Summiert man diese Reihe nach Vorschrift des Abschn. XXVIII, so erhält man die Formel II zunächst für den Fall, in dem man mit $+ r$ zu tun hat. Den Fall, in dem jährlich statt der Vermehrung eine Verminderung des Kapitals um r erfolgt, leitet man aus dem Vorstehenden dadurch ab, daß man allen mit dem Faktor r behafteten Gliedern das negative Zeichen gibt.

4. Die Formel III in Nr. 2. betrifft den Fall, in dem die jährliche Vermehrung oder Verminderung des ursprünglichen Kapitals nicht am Jahresschluß, sondern am Jahresanfang erfolgt. Zahle ich den Betrag r ein Jahr früher ein, so trägt er in diesem Jahre bereits Zinsen, wächst also auf rq an. Eine Einzahlung von r am Jahresanfang hat also denselben Wert, wie eine Einzahlung von rq am Jahresschluß. Man kommt demgemäß auf die Formel III, indem man in der Formel II die Größe r durch rq ersetzt.

5. Bei jährlicher Verminderung des zinstragenden Kapitals um r sind drei Fälle zu unterscheiden. Erstens kann diese Verminderung gerade den Betrag der Jahreszinsen ausmachen. Dann findet tatsächlich keinerlei Änderung am Betrage des ursprünglichen Kapitals statt, nach n Jahren muß $b = a$ sein, wie sich auch aus Nr. 2. leicht zeigen läßt; denn dann ist $r = \frac{ap}{100} = a(q-1)$, und mithin

$$r\frac{q^n-1}{q-1} = a(q^n-1), \quad aq^n - r\frac{q^n-1}{q-1} = a.$$

Zweitens kann r kleiner als der Betrag der Jahreszinsen des Kapitals sein, dann findet natürlich immer noch eine, wenn auch

Digitized by Google

weniger starke, allmähliche Zunahme des Kapitals statt. Es muß $b > a$ ausfallen. Im dritten Falle, in welchem die jährliche Verminderung des Kapitals mehr als den Betrag der Jahreszinsen ausmacht, muß das Kapital selbst allmählich zusammenschwinden, es fällt $b < a$ aus. Hier ist besonders der Sonderfall interessant, in dem nach n Jahren das ganze Kapital aufgebraucht worden ist, also $b = 0$ ist, oder die Gleichung gilt

$$aq^n = r\,\frac{q^n - 1}{q - 1}.$$

Mit Hilfe dieser Gleichung kann man sowohl die Frage lösen: Wieviel Jahre sind nötig, um durch eine jährliche Entnahme von der Größe r bei dem Zinsfaktor q das Kapital a allmählich aufzubrauchen, als auch die Frage: Wie groß muß die jährliche Entnahme r bemessen werden, um das Kapital a bei dem Zinsfaktor q in einer gegebenen Zeit zum Verschwinden zu bringen?

Die erste Frage, bei der es sich um die Bestimmung von n handelt, wird dadurch beantwortet, daß man die eben angegebene Gleichung zunächst nach q^n auflöst.

$$q^n = \frac{r}{r - a\,(q - 1)}.$$

Hat man so q^n gefunden, so findet sich der Wert von n durch Logarithmierung. Zur Beantwortung der zweiten Frage hat man unmittelbar die Gleichung

$$r = \frac{aq^n\,(q - 1)}{(q^n - 1)}.$$

6. Beide Fälle spielen eine große Rolle im praktischen Leben. Sie kommen z. B. in Betracht, wenn es sich darum handelt, eine vom Staat, von einer Stadtgemeinde oder einer sonstigen Körperschaft aufgenommene Anleihe durch regelmäßige Jahresaufwendungen, die den Betrag der Jahreszinsen übersteigen, allmählich zu tilgen (zu amortisieren).

Sie kommen auch dann in Betracht, wenn es sich darum handelt, das Recht auf den Bezug einer regelmäßigen Jahresrente durch eine einmalige Kapitalseinzahlung an eine Rentenanstalt zu erwerben. Hat das eingezahlte Kapital die Größe a, während die Rente n Jahre lang bezogen werden soll, so muß die eine Leistung durch die andere aufgewogen werden, d. h. der Kapitalwert am Ende des $n$jährigen Zeitraumes aq^n muß gerade gleich der Summe der gesamten Rentenbezüge sein, wenn man den Wert für denselben Schlußtermin berechnet.

Von diesem besonderen Falle rührt der Namen Renten-Rechnung her.

7. Überhaupt gibt die Zinseszins-Rechnung die Möglichkeit, Zahlungen, die zu verschiedenen Zeiten geleistet werden, dadurch miteinander vergleichbar zu machen, daß man unter Berücksichtigung ihrer fortwährenden Verzinsung ihren Wert für einen gemeinsamen Zeitpunkt berechnet. Das ist besonders für die Rechnungen im Versicherungswesen von erheblicher Bedeutung.

Digitized by Google

8. Erfolgt die Hinzunahme der Zinsen zum Kapital nicht nach jährlichen, sondern nach anderen Perioden, so muß man die Rechnung entsprechend modifizieren. Bei 4 Prozent und halbjährigem Rechnungsabschluß in einem $n$jährigen Zeitraum hat man z. B. in die Rechnung $p = 2$ einzustellen und die Zahl von n Jahren durch die von $2n$ Halbjahren zu ersetzen. Auch hat man wohl zu beachten, daß auf kleinere Zeitabschnitte, als die, nach deren Ablauf die Zinsen zum Kapital geschlagen werden, nur die einfache Zinsrechnung anwendbar ist.

Für die Zinsfaktoren q, die in der Regel die Gestalt von Dezimalzahlen haben (bei $p = 4$ ist z. B. $q = 1{,}04$), pflegen die Logarithmentafeln eine besondere Tabelle zu enthalten, die die wichtigsten praktisch vorkommenden Fälle umfaßt.*)

B. Aufgaben.

1. Wie heißt der Zinsfaktor für folgende Prozentsätze:

1) 3 2) 4 3) 5 4) $3\frac{1}{2}$ 5) $4\frac{1}{2}$ 6) $5\frac{1}{4}$ 7) $4\frac{1}{4}$ 8) $5\frac{1}{4}$
9) $3\frac{3}{4}$ 10) $4\frac{3}{4}$ 11) 4,2 12) 4,6 13) 5,3 14) $3\frac{2}{3}$ 15) $4\frac{1}{3}$ 16) $5\frac{1}{8}$?

2. Wie groß sind die Prozentsätze für folgende Zinsfaktoren, oder wie groß ist p, wenn q folgende Werte hat:

1) 1,05 2) 1,03 3) 1,07 4) 1,045 5) 1,0525 6) 1,0375
7) 1,0425 8) 1,05125 9) 1,0433 10) 1,03667 11) $1\frac{1}{25}$
12) $1\frac{1}{20}$ 13) $1\frac{1}{24}$ 14) $\frac{22}{21}$ 15) $\frac{47}{45}$ 16) $\frac{67}{62}$?

3. Wozu wachsen die Kapitalien 1) 1700 ℳ bei 4, 2) 3000 ℳ bei 5, 3) 4500 ℳ bei 3 Pzt. in 10 Jahren an, Zinseszinsen gerechnet?

4. Wozu wachsen die Kapitalien 1) 2000 ℳ bei $4\frac{1}{2}$, 2) 3700 ℳ bei $3\frac{1}{2}$, 3) 4300 ℳ bei $5\frac{1}{2}$ Pzt. in 12 Jahren an?

5. Wozu wachsen die Kapitalien 1) 4390 ℳ bei $4\frac{1}{4}$, 2) 5350 ℳ bei $3\frac{1}{4}$, 3) 7770 ℳ bei $5\frac{1}{4}$ Pzt. in 8 Jahren an?

6. Wozu wachsen 1) 970 ℳ bei $3\frac{3}{4}$, 2) 890 ℳ bei $4\frac{3}{4}$, 3) 750 ℳ bei $5\frac{3}{4}$ Pzt. in 9 Jahren an?

7. Wozu wachsen 1) 830 ℳ bei $3\frac{2}{3}$, 2) 750 ℳ bei $4\frac{2}{3}$, 3) 940 ℳ bei $5\frac{1}{3}$ Pzt. in 11 Jahren an?

8. Wozu wachsen 1) 730 ℳ bei 4,3, 2) 870 ℳ bei 4,7, 3) 980 ℳ bei 5,2 Pzt. in 13 Jahren an?

---

*) Demgemäß wird man den Zinsfaktor auch dann, wenn der Prozentsatz als gemischte Zahl gegeben ist, als Dezimalzahl ausdrücken. Für $p = \frac{2}{3}$ wird man z. B. $q = 1{,}03667$ schreiben. Hat man, wie es in den Formeln II und III der Fall ist, mit $q - 1$ zu tun, so kommt man ohne solche Umformung besser zum Ziel; denn es ist $q - 1 = \frac{p}{100}$, $\frac{r}{q-1} = \frac{r \cdot 100}{p}$, das gibt für $p = 3\frac{2}{3}$ z. B. den Wert $\frac{300\,r}{11}$.

Digitized by Google

9. Wozu wachsen 1) 1850 ℳ in 7, 2) 1740 ℳ in 8, 3) 2470 ℳ in 9 Jahren an, wenn die Zinsen halbjährlich zum Kapital gelegt werden, bei Annahme einer halbjährlichen Verzinsung von 2 Pzt.?

10. Wozu wachsen 1) 1470 ℳ in 5, 2) 1580 ℳ in 6, 3) 1690 ℳ in 7 Jahren an, wenn die Zinsen in Höhe von 1 Pzt. vierteljährlich zum Kapital geschlagen werden?

11. Wozu wachsen 1) 3450 ℳ in 4, 2) 2370 ℳ in 5, 3) 1840 ℳ in 6 Jahren an, wenn die Zinsen mit $\frac{1}{2}$ Pzt. monatlich zum Kapital geschlagen werden?

12. Am 1. Juli 1873 gab jemand 3750 ℳ auf Zinsen. Die Zinsen, welche halbjährlich fällig waren, wurden nicht gezahlt. Wie hoch belief sich die Summe am 1. Januar 1880, wo das Kapital mit den Zinsen und Zinseszinsen zurückgezahlt werden sollte, bei einer Jahresverzinsung von 4 Pzt.?

13. Der Endbetrag, zu dem ein Kapital von 1 ℳ durch jährliche Vermehrung um 4 Pzt. des jeweiligen Betrages, wenn dies tatsächlich möglich wäre, in 800 Jahren anwächst, soll durch eine Kugel aus reinem Golde dargestellt werden. Wieviel *dm* würde der Radius dieser Kugel zählen, wenn das spezifische Gewicht des Goldes zu 19,25, der Wert von 1 *cbdm* reinen Goldes zu 2800 ℳ angenommen wird?

14. Am 7. März 1894 wurde ein Betrag von 1200 ℳ bei einem Bankhause eingezahlt, das $3\frac{1}{2}$ Pzt. Jahreszinsen gibt und halbjährlichen Rechnungsabschluß am 30. Juni und 31. Dezember hat. Wie hoch stellte sich das Guthaben am 5. Juli 1900, wo es abgehoben wurde?*)

15. Unter den gleichen Voraussetzungen wurde bei einem Bankhause am 3. August 1895 die Summe von 1000 ℳ eingezahlt. In welcher Höhe erfolgte am 12. Oktober 1898 die Rückzahlung?

16 Unter sonst gleichen Voraussetzungen, aber bei einer Verzinsung von 4 Pzt wurde am 6. Februar 1878 eine Summe von 750 ℳ eingezahlt. Zu welchem Zeitpunkte war diese Summe auf 1000 ℳ angewachsen?

17. Am 18. Januar 1873 lieh A an B eine Summe von 500 ℳ unter der Bedingung, daß die Schuld zu $4\frac{1}{2}$ Pzt. verzinst und die Zinsen halbjährlich am 30. Juni und 31. Dezember dem ursprünglichen Betrage hinzugerechnet werden, die ganze Schuld aber an dem Tage zurückgezahlt werden sollte, wo sie auf 800 ℳ angewachsen war. Wann trat dieser Zeitpunkt ein?

---

*) Der Einzahlungstag sowie der Auszahlungstag kommen bei der Zinsberechnung nicht in Ansatz. Das Jahr ist zu 360 Tagen, der Monat zu 30 Tagen zu rechnen.

Digitized by Google

18. (13.) Welche Kapitalien muß man auf Zinsen geben, um 1) nach 10 Jahren 10000 ℳ, 2) nach 11 Jahren 12000 ℳ, 3) nach 12 Jahren 15000 ℳ zu haben, wenn man bezw. $4\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$ und $5\frac{1}{4}$ Pzt. rechnet?

19. (14.) Welche Kapitalien muß man auf Zinsen geben, um 1) nach 14 Jahren 16000 ℳ, 2) nach 16 Jahren 20000 ℳ, 3) nach 20 Jahren 25000 ℳ zu haben, wenn die Zinsen halbjährlich zum Kapital gelegt und bezw. 4, $4\frac{1}{2}$, $4\frac{3}{4}$ Pzt. p. a. gerechnet werden?*)

20. (15.) Ein Kapital, welches am 1. Oktober 1870 ausgeliehen war, wurde am 1. April 1879, einschließlich der Zinseszinsen, mit 5665 ℳ zurückgezahlt. Wie groß war das ausgeliehene Kapital, wenn bei 5 Pzt. p. a. die Zinsen halbjährlich fällig waren, also auch halbjährlich zum Kapital gelegt wurden?

21. (16.) In wieviel Jahren wachsen 1) 8470 ℳ bei 4,3, 2) 7680 ℳ bei 4,7, 3) 9730 ℳ bei 5,2 Pzt. bez. an zu 15000, 20000, 30000 ℳ?

22. (17.) In wieviel Jahren verdoppelt sich ein Kapital, das auf Zinseszinsen steht, 1) bei 3, 2) bei 4, 3) bei 5 Prozent?

23. (18.) Angenommen, ein Kapital verdoppele sich bei 3 Pzt. in 23, bei 4 Pzt. in 18, bei 5 Pzt. in 14 Jahren, wievielmal so groß wird ein Kapital in den drei genannten Fällen a) in 50 Jahren, b) in 100 Jahren? Genähert aus dem Kopfe zu berechnen.

24. (19.) In wieviel Jahren verdreifacht sich ein Kapital 1) bei 4, 2) bei $4\frac{1}{2}$, 3) bei 5 Prozent?

25. (21.) Zu wieviel Pzt. müssen 1) 6300 ℳ, 2) 8750 ℳ, 3) 9380 ℳ auf Zinsen stehen, wenn sie bezw. in 10 Jahren zu 10000 ℳ, in 9 Jahren zu 14000 ℳ, in 8 Jahren zu 13000 ℳ anwachsen?

26. (22.) Desgl. 1) 2950 ℳ, 2) 4780 ℳ, 3) 5340 ℳ, wenn sie bezw. in 10 Jahren zu 4444 ℳ, in 11 Jahren zu 7777 ℳ, in 12 Jahren zu 8888 ℳ anwachsen?

27. (23.) Am 1. Oktober 1871 wurden 6800 ℳ auf Zinsen gegeben. Sie wurden am 1. Januar 1879, einschließlich der Zinseszinsen, mit 9750 ℳ zurückgezahlt. Welche Verzinsung fand statt?

28. (24.) Welches Kapital wächst bei 5 Pzt. in 12 Jahren zu derselben Summe an, zu welcher 7500 ℳ bei 4 Pzt. in 15 Jahren anwachsen?

29. (25.) Jemand gab zwei gleiche Kapitalien auf Zinsen. Das

*) Wo es nicht anders angegeben ist, sollen, wenn jährlich p Pzt. angesetzt sind, halbjährlich $\frac{1}{2}p$ Pzt., vierteljährlich $\frac{1}{4}p$ Pzt., monatlich $\frac{1}{12}p$ Pzt. gerechnet werden.

Digitized by Google

erste wuchs in 8 Jahren bei $4\frac{1}{2}$ Pzt. zu 10 000 ℳ an. Wozu wuchs das zweite bei $4\frac{3}{4}$ Pzt. in 10 Jahren an?

30. (26.) In wieviel Jahren wachsen 7900 ℳ bei 5 Pzt. zu derselben Summe an, zu welcher 9700 ℳ bei 4 Pzt. in 8 Jahren anwachsen?

31. (27.) Zu wieviel Prozent muß man 7580 ℳ ausleihen, damit sie in 7 Jahren zu derselben Summe anwachsen, zu welcher 5780 ℳ in 12 Jahren bei $4\frac{3}{4}$ Pzt. anwachsen?

32. (28.) Wieviel Prozent muß man genau genommen bei Zinseszinsen 1) monatlich, 2) vierteljährlich, 3) halbjährlich rechnen, wenn man jährlich 4 Pzt. haben will?

33. Bei welchem Zinsfuß wächst ein Kapital in 100 Jahren auf das Hundertfache seines ursprünglichen Betrages an?

34. (30.) Es stehen 1000 ℳ zu 4 Pzt. 10 Jahre auf Zinsen. Wieviel bringt das, wenn die Zinsen 1) jährlich, 2) halbjährlich, 3) vierteljährlich, 4) monatlich zum Kapital gelegt werden, wenn man in den vier Fällen bezw. 4, 2, 1 und $\frac{1}{3}$ Pzt. rechnet?

35. (31.) Was bringt mehr, ob ein Kapital 4 Jahre zu 5 Pzt. auf Zinsen steht, oder 5 Jahre zu 4 Pzt., und wie groß ist der Unterschied bei einem Kapital von 1000 ℳ?

36. (32.) Was bringt mehr, ob ein Kapital 8 Jahre zu 3 Pzt., 6 Jahre zu 4 Pzt., 4 Jahre zu 6 Pzt., oder 3 Jahre zu 8 Pzt. auf Zinsen steht, und wie groß ist der Unterschied auf 1000 ℳ?

37. (35.) Zwei Kapitalien, von denen das erste um 500 ℳ größer ist als das zweite, stehen bezw. zu $3\frac{1}{2}$ und 5 Pzt. auf Zinsen. Wie groß sind dieselben, wenn sie in 20 Jahren zu derselben Summe anwachsen?

38. (36.) Zwei Kapitalien, deren Summe 20 000 ℳ beträgt, stehen auf Zinsen bezw. zu $3\frac{3}{4}$ und $5\frac{1}{4}$ Pzt. Nach 25 Jahren ist das zweite Kapital zu einer um 4732 ℳ größeren Summe angewachsen als das erste. Wie groß waren dieselben?

39. (37.) Zwei Kapitalien, von denen das erste um $\frac{1}{8}$ größer ist als das zweite, aber zu 1 Pzt. niedriger auf Zinsen steht, wachsen in 30 Jahren zu derselben Summe an. Zu wieviel Prozent stehen sie?

40. (38.) Jemand hatte zwei Kapitalien, 9400 ℳ und 8400 ℳ, auf Zinsen. Als das zweite Kapital 3 Jahre länger auf Zinsen gestanden hatte, war es mit seinen Zinsen zu einer um 75,20 ℳ größeren Summe angewachsen als das erste. Wieviel Jahre stand jedes Kapital auf Zinsen, bei Annahme eines Zinsfußes von 4 Pzt.?

41. (39.) A bot für ein Landgut 650 000 ℳ bar, B 740 000 ℳ nach 3 Jahren, C 800 000 ℳ nach 5 Jahren. Wer bot am meisten, wenn eine Verzinsung zu $4\frac{1}{2}$ Pzt. stattfand?

Digitized by Google

42. (40.) Für ein Haus bot A 32 000 ℳ bar, B 35 000 ℳ nach 2 Jahren, C 38 400 ℳ nach 4 Jahren. Wer bot am meisten bei Annahme einer 4 prozentigen Verzinsung?

---

43. (41.) Ein Kapital von 3000 ℳ wird außer den Zinsen am Ende jedes Jahres um 400 ℳ vermehrt. Wie groß ist dasselbe nach 12 Jahren bei 1) 4, 2) 5, 3) $4\frac{1}{2}$, 4) $4\frac{3}{4}$ Pzt.?*)

44. (42.) Ein Kapital von 7000 ℳ wird außer den Zinsen am Ende jedes Jahres um 500 ℳ vermehrt. Wie groß ist dasselbe nach 10 Jahren bei 1) $4\frac{1}{2}$, 2) $5\frac{1}{2}$, 3) $4\frac{1}{4}$, 4) $5\frac{1}{4}$ Pzt.?

45. (43.) Eine Summe von 8000 ℳ wird am Ende jedes Jahres außer den Zinsen um 300 ℳ vermehrt. Wie groß ist dieselbe nach 8 Jahren bei 1) 4,2, 2) 4,7, 3) $4\frac{1}{3}$, 4) $4\frac{2}{3}$ Pzt.?

46. (44.) Auf eine Schuld von 20 000 ℳ werden am Ende jedes Jahres die Zinsen einschließlich 2500 ℳ gezahlt. Wie groß ist der Rest der Schuld nach 9 Jahren bei 1) 5, 2) $4\frac{1}{2}$, 3) $4\frac{3}{4}$ Pzt.?

47. (45.) Von einem Waldbestand, der auf 1 000 000 *cbm* abgeschätzt wird, wurden am Ende jedes Jahres 40 000 *cbm* gehauen. Wie groß war der Bestand nach 8 Jahren bei einer jährlichen Vermehrung um 1) 3, 2) $2\frac{1}{2}$ Pzt.?

48. Es gibt jemand zu Anfang jedes Jahres 300 ℳ auf Zinsen. Wie groß wird sein Kapital sein 1) nach 7 Jahren bei 5, 2) nach 8 Jahren bei $4\frac{1}{2}$, 3) nach 16 Jahren bei $4\frac{3}{4}$, 4) nach 20 Jahren bei $4\frac{1}{4}$ Pzt.?

49. Wieviel muß jemand zu Anfang jedes Jahres auf Zinsen geben, damit er nach 20 Jahren im Besitze eines Kapitals von 10 000 ℳ ist bei 1) 4, 2) $4\frac{1}{2}$, 3) $4\frac{1}{3}$ Pzt.?

50. Um wieviel wird sich die Einwohnerzahl eines Staates, die jetzt 15 Millionen beträgt, nachdem sie sich in den letzten 10 Jahren um $\frac{1}{2}$ Million vermehrt hat, in den nächsten 10 Jahren vermehren, wenn sie sonst in demselben Verhältnis zunimmt, aber jährlich 50000 Menschen auswandern?

51. Jemand hinterließ seinen 4 Kindern ein Vermögen von 60 000 ℳ, das zu $4\frac{1}{2}$ Pzt. auf Zinsen stand. Es wurden für die Erhaltung und Erziehung der Kinder am Ende jedes Jahres 5 Jahre hindurch 8000 ℳ gezahlt. Zu Anfang des 9. Jahres wurde der Rest des Vermögens unter die vier Kinder gleich verteilt. Wieviel erhielt jedes Kind?

---

*) Bei Anwendung der Formeln II und III beachte man, daß $\frac{r}{q-1} = \frac{100r}{p}$ ist (vgl. S. 285., Anm.).

Digitized by Google

52. Jemand hinterläßt seinen 5 Kindern ein Vermögen von 100 000 ℳ, das zu 4 Pzt. auf Zinsen steht. Davon sollen 10 Jahre hindurch am Ende jedes Jahres für die Erhaltung und Erziehung der Kinder 7000 ℳ gezahlt werden. Nach zehn Jahren soll die Hälfte des Restes unter die Kinder gleich verteilt, die Zinsen der anderen Hälfte sollen für Schulzwecke verwendet werden. Wieviel erhielt jedes Kind, und wieviel erhielt die Schule jährlich?

53. (55.) Von einer Schuld werden am Ende jedes Jahres, die Zinsen einschließlich, 1200 ℳ abgezahlt. Wie groß war dieselbe, wenn bei einer Verzinsung von 4 Pzt. nach 10 Jahren noch ein Rest von 395 ℳ blieb?

54. (56.) A legt n Jahre hindurch zu Anfang jedes Jahres r Mark auf Zinsen, B am Ende jedes Jahres. Wieviel mehr hat A nach n Jahren als B, und wie verhalten sich die Endkapitalien zueinander bei einer Verzinsung von p Pzt.?

55. (57.) Wie ist die Lösung der vorhergehenden Aufgabe, wenn $r = 400$, $n = 15$, $p = 4$ ist?

56. (58.) Wieviel muß jemand 22 Jahre hindurch 1) am Anfang jedes Jahres, 2) am Ende jedes Jahres auf Zinsen geben, daß er am Anfang des 23. Jahres ein Kapital von 30 000 ℳ hat bei einem Zinsfuß von 4 Pzt.?

57. (59.) Zwei Beamte, A und B, beziehen jährlich Gehalte von bezw. 4500 ℳ und 4000 ℳ, die am Ende jedes halben Jahres ausgezahlt wurden. Um wieviel war die Gesamteinnahme von A größer als die von B, als sie 25 Jahre im Dienste gestanden hatten, bei einer Verzinsung von $4\frac{1}{2}$ Pzt.?

58. (60.) Jemand hat ein Kapital auf Zinsen. Er vermehrt dasselbe am Ende jedes Jahres außer den Zinsen um den 10. Teil seines ursprünglichen Wertes. Nach wieviel Jahren hat sich das Kapital bei 4 prozentiger Verzinsung 1) verdoppelt, 2) verdreifacht?

59. (61.) Jemand legt 2000 ℳ auf Zinsen und vermehrt diese außer den Zinsen jährlich um 100 ℳ. In wieviel Jahren ist das Kapital auf 10 000 ℳ angewachsen, 1) $4\frac{1}{2}$, 2) 5 Pzt. gerechnet?

60. (64.) Jemand hat 70 000 ℳ auf Zinsen. Er nimmt am Ende jedes Jahres einschließlich der Zinsen 5000 ℳ fort. Nach wieviel Jahren hat er sein Vermögen aufgezehrt, 1) bei 4, 2) bei $4\frac{1}{2}$ Pzt.?

61. (65.) Jemand soll eine Schuld von 30 000 ℳ in jährlichen Terminen abtragen. In wieviel Jahren kann das geschehen, wenn er am Ende jedes Jahres 6000 ℳ zahlt, 1) bei 4, 2) bei $4\frac{1}{2}$ Pzt., und wieviel ist am Ende des letzten Jahres noch zu zahlen?

62. (66.) Jemand hat 65 000 ℳ auf Zinsen, die halbjährlich gezahlt werden. Er gibt am Ende jedes halben Jahres 2000 ℳ aus. Nach

Digitized by Google

wieviel Jahren hat er sein Kapital aufgezehrt, und wieviel erhielt er am Ende des letzten halben Jahres, 1) bei $4\frac{1}{4}$, 2) bei $4\frac{3}{4}$ Pzt.?

63. (67.) Dieselbe Aufgabe, wenn das Vermögen 80000 ℳ beträgt und halbjährlich 3500 ℳ fortgenommen werden, 1) bei 4,3, 2) bei 4,7 Pzt.

64. (68.) Jemand will eine Schuld von 30000 ℳ abtragen. Er zahlt zu dem Zwecke am Anfang jedes Jahres 4000 ℳ. In wieviel Jahren ist die Schuld abgetragen, und wieviel ist am Anfang des letzten Jahres noch zu zahlen 1) 4, 2) $4\frac{1}{2}$ Pzt. gerechnet?

65. Eine Anleihe (von 300000 ℳ) wird mit $3\frac{1}{2}$ Pzt. verzinst und mit $1\frac{1}{2}$ Pzt. getilgt. Wie groß stellt sich die Tilgungsfrist?

66. Wie hoch ist der im letzten Jahre noch zu tilgende Betrag?

67. Durch eine Anleihe von 800000 ℳ wird der Jahreshaushalt einer Stadtgemeinde mit 42000 ℳ an Ausgaben für Verzinsung und Tilgung belastet. Der Zinsfuß beträgt 4 Pzt. Wie hoch stellt sich die Tilgungsquote, wie groß ist die Tilgungsfrist und wie groß der Tilgungsbetrag des letzten Jahres?

68. Beantworte dieselben Fragen für den Fall einer Anleihe von 900000 ℳ, für die bei Annahme einer $3\frac{3}{4}$prozentigen Verzinsung jährlich 54000 ℳ zur Verzinsung und Tilgung aufgewendet werden.

69. Wann ist im Falle der Aufgabe 65. die Hälfte der Anleihe getilgt?

70. Wann ist im Falle der Aufgabe 67. der dritte Teil der Anleihe getilgt?

71. Wieviel Zeit ist zur Tilgung von zwei Dritteln des Anleihebetrages im Falle der Aufgabe 68. erforderlich?

72. (69.) Jemand hat 50000 ℳ auf Zinsen. Er reicht aber mit den jährlichen Zinsen nicht aus, sondern hat nach 10 Jahren sein Kapital aufgezehrt. Wieviel nahm er am Ende jedes Jahres von seinem Kapital fort, bei einem Zinssatz von $4\frac{1}{2}$ Pzt.?

73. (70.) Jemand hatte 55000 ℳ auf Zinsen, die halbjährlich zum Kapital gelegt wurden. Er reichte jedoch mit den Zinsen nicht aus, sondern nahm am Ende jedes halben Jahres eine gewisse Summe r fort, so daß er nach 15 Jahren nur noch 1000 ℳ hatte. Wie groß war die Summe r, 1) bei $4\frac{1}{8}$, 2) bei $4\frac{3}{8}$ Pzt.?

74. Eine Anleihe (von 1000000 ℳ) soll bei 4prozentiger Verzinsung in 30 Jahren getilgt werden. Wie groß ist die Tilgungsquote zu bemessen?

75. Auf welchen Betrag ist die vorstehend genannte Anleihe nach 15 Jahren zusammengeschmolzen?

76. Wie groß ist der jährliche Gesamtaufwand für Verzinsung und Tilgung einer Anleihe von 1500000 ℳ zu bemessen, die

Digitized by Google

bei Annahme eines Zinsfußes von $3\frac{1}{2}$ Pzt. in 35 Jahren getilgt werden soll?

77. Wie groß ist der jährliche Gesamtaufwand für Verzinsung und Tilgung einer Anleihe zu bemessen, wenn bei einem Zinsfuß von $4\frac{1}{2}$ Pzt. nach 15 Jahren die Hälfte getilgt sein soll?

78. Wie groß ist die Tilgungsquote zu bemessen, damit eine Anleihe bei vierprozentiger Verzinsung in 25 Jahren bis auf ein Drittel des ursprünglichen Betrages getilgt wird?

79. Eine Stadtgemeinde will eine Anleihe von 800 000 ℳ, die mit $4\frac{1}{2}$ Pzt. verzinst und mit 1 Pzt. getilgt wird, nach zehnjährigem Bestande in eine Anleihe zu 4 Pzt. umwandeln. Wie groß ist die Tilgungsquote zu bemessen, wenn die ursprüngliche Tilgungsfrist innegehalten werden soll?

80. Wie ändert sich in dem vorstehend genannten Falle die Tilgungsfrist, wenn der jährliche Gesamtaufwand für Verzinsung und Tilgung nach der Umwandlung dieselbe Höhe hat, wie vorher?

81. Eine Anleihe von 1 000 000 ℳ erfordert für Verzinsung und Tilgung einen jährlichen Gesamtaufwand von 50 000 ℳ. Nachdem sie 15 Jahre bestanden hat, wird beschlossen, die Tilgung dadurch zu beschleunigen, daß jährlich 55 000 ℳ für Verzinsung und Tilgung aufgewendet werden. Um wieviel verkürzt sich die Tilgungsfrist, wenn der Zinsfuß während der ganzen Zeit sich auf 4 Pzt. stellt?

82. Um eine Anleihe von 800 000 ℳ, die mit $3\frac{1}{2}$ Pzt. verzinst und mit 1 Pzt. getilgt wird, schneller zu tilgen, wird der Gesamtaufwand für Verzinsung und Tilgung nach 15jährigem Bestande der Anleihe erhöht. Wie hoch ist diese Erhöhung zu bemessen, wenn die Tilgungsfrist um 5 Jahre verkürzt werden soll?

---

83. Für ein Haus bietet A 40 000 ℳ bar, B 45 000 ℳ nach 3 Jahren, C 44 000 ℳ in vier jährlichen Terminen, jedesmal 11 000 ℳ zu Anfang jedes Jahres. Wer bot am meisten, wieviel bot er, und wieviel mehr als die anderen, 5 Pzt. gerechnet?

84. (74.) Es hat jemand 25 Jahre lang halbjährlich eine Rente von 500 ℳ zu beziehen. Er will dieselbe verkaufen. Wieviel ist dieselbe wert, $4\frac{1}{2}$ Pzt. gerechnet?

85. (75.) Es hat jemand 24 Jahre lang halbjährlich eine Rente von 400 ℳ zu beziehen. Er reicht jedoch damit nicht aus, er wünscht halbjährlich 500 ℳ. Wie lange kann ihm eine Rente von dieser Höhe bei 5prozentiger Verzinsung gezahlt werden?

86. (76.) Wie lange kann jemand von einer Barzahlung, die 30 000 ℳ beträgt, eine Jahrrente von 3000 ℳ beziehen, bei einer Verzinsung von $4\frac{1}{4}$ Pzt.?

Digitized by Google

87. (77.) Es hatte jemand 20 000 ℳ zu $4\frac{1}{2}$ Pzt. auf Zinsen. Er brauchte halbjährlich 600 ℳ. Nach wieviel Jahren hat er sein Kapital zur Hälfte verbraucht?

88. (78.) Es hat jemand 20 Jahre hindurch halbjährlich eine Rente von 600 ℳ zu beziehen. Er wünscht dieselbe auf 30 Jahre zu haben. Wieviel wird die neue Rente betragen bei einem Zinsfuß von 4 Pzt.?

89. (79.) Es hat jemand ein Kapital auf Zinsen. Um den wievielten Teil muß er dasselbe am Ende jedes Jahres außer den Zinsen vermehren, wenn dasselbe sich 1) in 10 Jahren verdoppeln, 2) in 20 Jahren verdreifachen soll bei 4prozentiger Verzinsung?

90. (80.) A bezog 16 Jahre hindurch eine Jahrrente von 1200 ℳ, B 12 Jahre hindurch eine solche von 1600 ℳ. Welche Rente ist mehr wert bei einem Zinsfuß von 4 Pzt.?

91. (81.) A bezieht 30 Jahre hindurch eine Jahrrente von 1200 ℳ, B bezieht ebenfalls 30 Jahre hindurch dieselbe Rente, die aber halbjährlich mit 600 ℳ ausgezahlt wird. Welche Rente hat den größeren Wert bei jährlich 5, halbjährlich $2\frac{1}{2}$ Pzt.?

92. (82.) Die baren Werte zweier Renten verhalten sich wie 3 : 2. Die erste läuft 20 Jahre, die zweite 30 Jahre. Wie groß ist die erste Rente, wenn die zweite 1000 ℳ beträgt bei $4\frac{1}{2}$ Pzt.?

93. (83.) Es zahlt jemand an eine Bank 1000 ℳ und legt am Ende jedes Jahres 200 ℳ dazu. Er stirbt nach 23 Jahren. Von da ab erhält seine Frau lebenslänglich eine Jahrrente von 800 ℳ, die zum erstenmal ein Jahr nach dem Tode ihres Mannes ausgezahlt wird. Die Frau lebt noch 20 Jahre länger als ihr Gatte. Hatte die Bank Vorteil oder Schaden, und wieviel, bei 4 Pzt.?

94. (84.) Wieviel hat jemand auf Zinsen zu geben, daß er bei einem jährlichen Zuschusse von 200 ℳ nach 25 Jahren ein Kapital hat, von dem sich 18 Jahre hindurch halbjährlich eine Rente von 500 ℳ zahlen läßt, 4 Pzt. gerechnet? Die erste Rentenzahlung soll ein halbes Jahr nach dem Tode des Mannes geschehen.

95. (85.) Ein Erbe ist verpflichtet, für seine minderjährige Schwester soviel Kapital zurückzulegen, daß sie nach erlangter Volljährigkeit 5 Jahre hindurch zu Anfang jedes halben Jahres 90 ℳ erhalten kann. Wieviel mußte er zurücklegen, wenn die Schwester nach $9\frac{3}{4}$ Jahren volljährig wurde, 4 Pzt. gerechnet, und vorausgesetzt, daß die Zinsen nur jährlich ausgezahlt wurden?

96. (86.) Wie wird das Resultat der vorhergehenden Aufgabe werden, wenn halbjährlich 2 Pzt. gerechnet und die Zinsen halbjährlich zum Kapital gelegt werden?

97. (87.) Wie wird das Resultat der 95. Aufgabe werden, wenn

Digitized by Google

die Zinsen halbjährlich zum Kapital gelegt werden und die Schwester 5 Jahre hindurch zu Anfang jedes Monats 15 ℳ erhalten soll, halbjährlich 2 Pzt. gerechnet?

Die Berechnung der Prämien, die der Inhaber einer Lebensversicherung alljährlich an die Versicherungsanstalt zu entrichten hat, beruht auf dem Vergleich der durch diese Prämienzahlungen von seiten des Versicherers der Versicherungsanstalt gegenüber bewirkten Leistung mit der Leistung, die die Anstalt durch die Auszahlung der Versicherungssumme beim Tode des Versicherers übernimmt.

Die Zahl der Personen, die im Lebensalter von 30 Jahren gleichzeitig eine Versicherung in derselben Höhe K abschließen, werde mit l_{30}, die Zahl der Personen, die von diesen Versicherern im Alter von n Jahren noch am Leben sind, mit l_n, die jährlich von jedem Lebenden immer neu zu entrichtende Prämie mit P bezeichnet.

98. Gib die gesamte Prämienzahlung aller Versicherer bei Abschluß der Versicherung an.

99. Gib die gesamte Prämieneinnahme der Anstalt bei Beginn des zweiten Versicherungsjahres an.

100. Dgl. des dritten, des vierten, des r. Versicherungsjahres.

101. Der zugrunde zu legende Zinsfaktor heiße q. Gib an, durch welche Nenner man die in 98., 99., 100. angegebenen Gesamtprämienzahlungen dividieren muß, wenn man sie auf den Geburtstermin der Versicherer, also auf einen 30 Jahre vor dem Beginn der Versicherung zurückliegenden Zeitpunkt beziehen will.

102. Zeige, daß die auf diesen Zeitpunkt bezogene Gesamtleistung der Versicherer den Wert $P\left(\frac{l_{30}}{q^{30}} + \frac{l_{31}}{q^{31}} + \cdots \frac{l_s}{q^s}\right)$ besitzt, wenn s das höchste Alter vorstellt, das einzelne Versicherer erreichen.

103. Drücke mit Hilfe der vorstehenden Bezeichnungen die Zahl der Personen aus, für die die versicherte Summe am Ende des ersten Versicherungsjahres von der Versicherungsanstalt ausgezahlt wird.

104. Bestimme die sich daraus ergebende Gesamtzahlung, die die Versicherungsanstalt am Ende des ersten Versicherungsjahres zu leisten hat.

105. Mache die entsprechende Angabe für das Ende des zweiten Versicherungsjahres.

106. Dgl. für das des 3., des 4., des r. Versicherungsjahres.

107. Gib die Divisoren an, durch die die unter 104., 105., 106. angegebenen Gesamtzahlungen zu dividieren sind, wenn man sie auf den in Nr. 101. angegebenen Termin beziehen will.

108. Drücke nunmehr die gesamte auf den genannten Zeitpunkt bezogene Leistung der Anstalt mit Hilfe der sonst verwendeten Bezeichnungen aus.

Digitized by Google

109. Setze die Gesamtleistung der Versicherer nunmehr der Gesamtleistung der Anstalt gleich und zeige damit die Richtigkeit der Gleichung

$$P\cdot\left\{\frac{l_{30}}{q^{30}}+\frac{l_{31}}{q^{31}}+\cdots\right\}=K\frac{l_{30}}{q^{30}}-K\frac{q-1}{q}\left\{\frac{l_{30}}{q^{30}}+\frac{l_{31}}{q^{31}}+\cdots\right\}.$$

110. Gib die entsprechende Formel für eine im 25. Lebensjahr abgeschlossene Versicherung an.

111. Dgl. für eine Lebensversicherung, die im Alter von n Jahren abgeschlossen wird.

112. Die Werte der Größen $l_{30}\ l_{31}\cdots$ ergeben sich aus den sogenannten Sterblichkeitstabellen, mit Hilfe deren die Größen $\frac{l_n}{q^n}$ berechnet werden.

Berechne jetzt die Jahresprämie, die für eine Versicherungssumme von 10 000 $\mathcal{M}$ bei Abschluß der Versicherung im 35. Lebensjahr zu entrichten ist, unter der Annahme, daß die Summe $\left(\frac{l_{35}}{q^{35}}+\frac{l_{36}}{q^{36}}+\cdots\right)$ 17,5mal so groß ist als der Bruch $\frac{l_{35}}{q^{35}}$, und unter Verwendung des der vorstehenden Annahme zugrunde liegenden Zinsfußes von 3,5 Prozent.

113. Berechne die Jahresprämie für dieselbe Versicherungssumme unter Voraussetzung desselben Zinsfußes für eine mit 40 Jahren abgeschlossene Versicherung, wenn die Summe $\left(\frac{l_{40}}{q^{40}}+\frac{l_{41}}{q^{41}}+\cdots\right)$ 16,4mal so groß ist, als der Bruch $\frac{l_{40}}{q^{40}}$.

114. In Wahrheit wird der sich aus der Vergleichung beider Leistungen ergebende Prämiensatz um einen gewissen Betrag erhöht, damit die Verwaltungskosten der Versicherungsanstalt gedeckt, ein Reservefonds für unvorhergesehene Notlagen aufgesammelt und für die Aktionäre der Versicherungsanstalt noch ein Gewinn erzielt wird.

Berechne jetzt in dem unter Nr. 112. angegebenen Fall die Prämienhöhe unter Annahme eines Zuschlags von 20 Pzt. für eine Versicherungssumme von 20 000 $\mathcal{M}$.

115. Dgl. im Falle 113. bei 22 Pzt. Zuschlag für eine Versicherungssumme von 12 000 $\mathcal{M}$.

XXX. Maxima und Minima.

A. Theorie.

1. Setzt man in einem Ausdruck, welcher eine noch näher zu bestimmende Größe x enthält, und welcher hinsichtlich der Größe x von einem höheren Grade ist als dem ersten, der Reihe nach alle Zahlen von $-\infty$ bis $+\infty$, so werden die Werte des Ausdrucks

Digitized by Google

bis zu einem Punkte steigen und dann wieder abnehmen, oder sie werden bis zu einem Punkte fallen und dann wieder zunehmen. Im ersten Falle hat der Ausdruck in diesem Punkte einen größten Wert oder ein Maximum, im zweiten einen kleinsten Wert oder ein Minimum erreicht. Unter Maximum eines Ausdrucks versteht man jedoch nicht immer den größten Wert, welchen ein Ausdruck überhaupt annehmen kann, sondern oft nur den Wert, welcher größer ist, als die zunächst liegenden. Ebenso versteht man unter Minimum oft nur den Wert, welcher kleiner ist als die zunächst liegenden. Daher kann das Minimum unter Umständen größer sein als das Maximum. Der Buchstabe x, der in dem zu untersuchenden Ausdruck auftritt, wird hier nicht, wie bei den Bestimmungsgleichungen, zur Bezeichnung einer unbekannten Größe gebraucht, er bezeichnet vielmehr eine Größe, bei der man ihre fortwährende Veränderung ins Auge faßt, eine Veränderliche (Variable). — Setzt man in der Gleichung

$$1 + 4x - x^2 = y$$

für x der Reihe nach die Werte

$$0,\ 1,\ 2,\ 3\ \ 4\ldots,$$

so erhält man für y die Reihe der dazu gehörenden Werte

$$1,\ 4,\ 5,\ 4,\ 1\ldots$$

Für $x = 2$ erreicht der Ausdruck y ein Maximum, welches den Wert 5 hat. Setzt man in der Gleichung

$$x^2 - 4x + 9 = y$$

für x der Reihe nach

$$0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4\ldots,$$

so erhält man für x der Reihe nach die Werte

$$9,\ 6,\ 5,\ 6,\ 9\ldots$$

Der Ausdruck y erreicht für $x = 2$ ein Minimum, welches den Wert 5 besitzt. — Manche Ausdrücke haben ein Maximum und ein Minimum, manche mehrere Maxima und mehrere Minima, manche nur Maxima, manche nur Minima, manche weder ein Maximum noch ein Minimum. Algebraische Ausdrücke haben immer eine begrenzte Anzahl von größten und kleinsten Werten, trigonometrische eine unbegrenzte Anzahl. Bei algebraischen Ausdrücken ist die Anzahl der größten und kleinsten Werte im allgemeinen um 1 geringer, als der Grad des Ausdrucks. Es handelt sich um die Frage: Für welche Werte von x wird y oder der Ausdruck von x ein Maximum oder ein Minimum? Für die Beantwortung dieser Frage kommen in den hier obwaltenden Grenzen besonders zwei Methoden in Betracht.

2. Das Wesen der ersten Methode erhellt aus den nachfolgenden Beispielen. Fragt man, für welchen Wert von x wird der Ausdruck

Digitized by Google

$$8x - x^2 = y$$

zu einem Maximum oder Minimum und welches ist der Wert dieses Maximums oder Minimums, so hat man

$$x = 4 \pm \sqrt{16 - y}.$$

Der Wert von y darf die Größe 16 nicht übersteigen, weil sonst der Radikand der Quadratwurzel negativ, die Wurzel also imaginär werden würde. Dagegen kann y beliebig kleine positive, auch jeden negativen Wert haben. Es liegt hier also ein Maximum für y im Werte von 16 vor; setze ich $y = 16$, so findet sich, daß $x = 4$ wird. Dieser Maximalwert von y tritt also für $x = 4$ ein.

Ebenso ergibt sich aus der Gleichung

$$x^2 - 10x + 42 = y,$$

$$\text{also } x = 5 \pm \sqrt{25 - 42 + y} = 5 \pm \sqrt{y - 17},$$

daß y nicht unter den Wert 17 heruntergehen darf, wenn die Quadratwurzel reell bleiben soll, während alle über 17 liegenden positiven Werte für y möglich sind. Die Größe y hat also einen Minimalwert im Betrage von 17, der für $x = 5$ eintritt, denn wenn $y = 17$ gesetzt wird, findet sich $x = 5$.

Drittens handle es sich um den Ausdruck $\frac{x^2 + 2x + 16}{2x}$.

Die Gleichung $y = \frac{x^2 + 2x + 16}{2x}$ läßt sich in die Form

$$x^2 - 2x(y - 1) + 16 = 0$$

bringen, aus der

$$x = y - 1 \pm \sqrt{(y-1)^2 - 16} = (y - 1) \pm \sqrt{(y-5)(y+3)}$$

folgt. Hier sieht man bald, daß, wenn y zwischen den Grenzen $+5$ und -3 liegt, die Quadratwurzel imaginär wird. Der Wert von y darf also weder unter $+5$ heruntergehen, noch über -3 heraufgehen, d. h. hier liegt sowohl ein Minimalwert von y im Betrage $+5$, als ein Maximalwert im Betrage -3 vor.

Um die Werte von x zu ermitteln, für die diese beiden Fälle eintreten, setze man $y = 5$ oder $y = -3$; durch beide Annahmen erhält die Quadratwurzel den Wert Null, x erhält im ersten Falle den Wert $y - 1 = 4$, im zweiten den Wert -4. Der Ausdruck $y = \frac{x^2 + 2x + 16}{2x}$ erlangt also für $x = 4$ einen Minimalwert im Betrage $+5$, für $x = -4$ einen Maximalwert im Betrage -3.

3. Daraus ergibt sich also folgende Regel: Man setze den (x enthaltenden) zu untersuchenden Ausdruck gleich y, löse die so gebildete Gleichung nach der Größe x auf und prüfe bei dem in dem Werte von x auftretenden Wurzelausdruck, welche Grenzen die im Radikanden dieser Wurzel vorkommende Größe y nicht überschreiten darf, wenn der Wert von x reell bleiben soll. Die Frage, ob ein Maximum

Digitized by Google

oder ein Minimum oder sowohl ein Maximum als ein Minimum vorliegt, beantwortet sich dabei von selbst. Den Wert von x, für den diese Fälle vorliegen, findet man durch Nullsetzung des Wurzelausdrucks.

Diese Methode ist allemal dann anwendbar, wenn x durch eine quadratische Gleichung bestimmt wird, sie reicht namentlich für viele in der Geometrie vorkommende Aufgaben aus. Man kann mit derselben insbesondere folgende Ausdrücke behandeln:

1) $ax^2 + bx + c = y$ 2) $ax^4 + bx^3 + c = y$

3) $\frac{a_1x^2 + b_1x + c_1}{a_2x^2 + b_2x + c_2} = y$ 4) $\frac{a_1}{b_1x + c_1} + \frac{a_2}{b_2x + c_2} = y$

5) $mx + n + \sqrt{ax^2 + bx + c} = y$ 6) $x\sqrt{ax^2 + b} = y$.

Bei den Ausdrücken von der Form 5) ist die Quadratwurzel zweideutig. Welches Zeichen zu nehmen ist, ergibt sich sofort aus den einander entsprechenden Werten von x und y.*)

4. Wo die oben auseinandergesetzte Methode versagt, muß man sich der zweiten Methode bedienen, die auf den nachstehend dargelegten Erwägungen beruht und in allen, auch den einer Behandlung nach der ersten Methode fähigen Fällen zum Ziele führt. Sind x_1 und x_2 zwei Werte von x, für die der in Frage stehende Ausdruck gleiche Werte erhält, so ist zu vermuten, daß der Ausdruck von x, für den jener Ausdruck zu einem Maximum oder Minimum wird, zwischen x_1 und x_2 liegt. Man kann sich diesem Werte dann von beiden Seiten (x_1 und x_2) her nähern und wird ihn daran erkennen, daß für ihn die zugehörigen einander immer näher gekommenen Werte der Größe x miteinander zusammenfallen. Das Maximum oder Minimum eines Ausdrucks wird dadurch deutlich gekennzeichnet, daß es nur für einen einzigen Wert der Größe x auftritt, während zu jedem der ihm vorangehenden wie der ihm folgenden Werte des zu untersuchenden Ausdrucks immer zwei Werte der Größe x gehören.

5. Daraus ergibt sich die Vorschrift: Man gebe in dem zu untersuchenden Ausdrucke der Größe x einmal den Wert x_1, das andere Mal x_2, setze die beiden sich ergebenden Ausdrücke einander gleich, und untersuche, unter welchen Bedingungen man $x_1 = x_2$ setzen kann. Um dabei nicht auf eine identische Gleichung zu kommen, vereinige man in der aufgestellten, durch geeignete Umformung von Wurzelzeichen und Nennern befreiten Gleichung die mit gleichhohen Potenzen von x_1 und x_2 behafteten Glieder auf derselben Seite, worauf sich die ganze Gleichung durch $x_1 - x_2$, unter Umständen auch durch die Differenz zweier höheren Potenzen von x_1 und x_2 dividieren lassen muß, und setze nach Ausführung dieser Division die Werte

*) Nach dieser Methode ist mit dem Werte von y auch der zugehörige Wert von x gefunden. Dies Wertepaar muß der gegebenen Gleichung $mx + n \pm \sqrt{ax^2 + bx + c} = y$ genügen. Danach ist das Zeichen der Quadratwurzel zu wählen.

Digitized by Google

x_1 und x_2 einander gleich. Der sich aus der so behandelten Gleichung ergebende Schlußwert von x ist eben der, für den der untersuchte Ausdruck ein Maximum oder Minimum wird. Ob der Maximalfall oder der Minimalfall vorliegt, bedarf dann noch einer besonderen Überlegung, für die in der Regel die sonstigen Bedingungen der Aufgabe den nötigen Anhalt bieten. Wenn kein anderes Mittel vorhanden ist, hilft man sich durch Vergleichung des gefundenen Maximal- oder Minimal-Wertes mit den benachbarten Werten.

Zur Erläuterung des Verfahrens diene die Untersuchung des Ausdrucks

$$y = x^3 - 9x^2 + 15x - 7.$$

Dann hat man

$$x_1^3 - 9x_1^2 + 15x_1 - 7 = x_2^3 - 9x_2^2 + 15x_2 - 7$$
$$(x_1^3 - x_2^3) - 9(x_1^2 - x_2^2) + 15(x_1 - x_2) = 0.$$

Die Division durch $(x_1 - x_2)$ ergibt

$$(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2) - 9(x_1 + x_2) + 15 = 0$$
$$x_1 = x_2 = x$$
$$x^2 - 6x + 5 = 0.$$

Für x finden sich die beiden Werte 5 und 1.

Werte für x	6	5	4	2	1	0
Werte für y	-25	-32	-27	-5	0	-7.

Für $x = 5$ wird y ein Minimum im Betrage (-32), für $x = 1$ ein Maximum im Betrage Null.*)

B. Aufgaben.

Untersuche, zwischen welche Grenzen der Wert von y einzuschließen ist, wenn x reell bleiben soll, und ob diese Grenzwerte für y ein Maximum oder ein Minimum darstellen.

1. $x = \sqrt{(y-7)(y-3)}$
2. $x = \sqrt{(y-5)(y+2)}$
3. $x = \sqrt{(y+7)(y-7)}$
4. $x = \sqrt{(7-y)(y-3)}$
5. $x = \sqrt{(8-y)(y+4)}$
6. $x = \sqrt{(y+9)(9-y)}$
7. $x = \sqrt{(y-5)y}$
8. $x = \sqrt{9y - y^2}$.

Untersuche, für welche Werte von x die nachstehenden Ausdrücke, welche gleich y zu setzen sind, ein Maximum oder ein Minimum haben, und wie groß das Maximum oder Minimum ist. Es ist auch nachzuweisen, weshalb der betreffende Wert von y ein Maximum oder

*) Über die geometrische Bedeutung dieses Verfahrens s. d. Anmerkung zu Abschnitt XXXI, A. Nr. 6, S. 304.

Digitized by Google

ein Minimum ist. Das Maximum werde durch M, das Minimum durch m bezeichnet.

9. $x^2 - 6x + 7$
10. $7 + 6x - x^2$
11. $10 - 3x + x^2$
12. $10 + 3x - x^2$
13. $2x^2 - 5x + 7$
14. $3 + 8x - 5x^2$
15. $(x - 1)(x - 7)$
16. $(8 - x)x$
17. $(x - 7)^2 + (x + 5)^2$
18. $(5 - x)^3 + (1 + x)^3$
19. $\frac{x^2 + 7}{8 - x}$
20. $\frac{x^2 + 11}{5 + x}$
21. $\frac{4x - 3}{x^2 + 1}$
22. $\frac{2x - 7}{x^2 + 8}$
23. $\frac{x^2 + 6x + 3}{2x - 1}$
24. $\frac{7 - 5x + x^2}{2 - x}$
25. $\frac{x^2 - 4x + 7}{x^2 - 2x + 5}$
26. $\frac{x^2 - 3x - 1}{x^2 - x + 3}$
27. $\frac{8}{x - 3} - \frac{2}{x - 5}$
28. $\frac{18}{x - 2} - \frac{2}{x - 4}$
29. $\frac{24}{x - 1} + \frac{x - 13}{x - 7}$
30. $\frac{9}{x - 7} - \frac{x - 7}{x - 8}$
31. $x + \sqrt{11 - 2x}$
32. $x - \sqrt{2x - 7}$
33. $x - \sqrt{2x - 13}$
34. $x + \sqrt{23 - 2x}$
35. $x + \sqrt{7 + 2x - x^2}$
36. $x + \sqrt{x^2 - 6x + 4}$
37. $3x + \sqrt{x^2 - 6x + 1}$
38. $5x - \sqrt{x^2 - 12x + 12}$
39. $2x + \sqrt{3x^2 - 24x + 45}$
40. $4x - \sqrt{24x - 63 - 2x^2}$
41. $x^3 - 9x^2 + 15x - 3$
42. $2x^3 - 3x^2 - 12x + 5$.

---

43. Teile die Zahl 100 in zwei Teile, deren Produkt ein Maximum ist.

44. Teile die Zahl 20 so in zwei Teile, daß die Summe ihrer Quadrate ein Minimum ist.

45. Teile die Zahl 10 so in zwei Teile, daß die Summe ihrer Kuben ein Minimum wird.

46. Auf zwei sich senkrecht schneidenden Linien bewegen sich zwei Punkte A und B. A ist noch 13, B noch 16 *m* vom Schnittpunkt entfernt. A macht in der Sekunde 4, B 3 *m*. Nach wieviel Sekunden werden die Punkte einander möglichst nahe kommen, und wie groß wird dann ihre gegenseitige Entfernung sein?

46_1. Beantworte dieselbe Frage für zwei Punkte, von denen der erste bei 10 *m* anfänglicher Entfernung vom Schnittpunkt sich mit 5 *m* Geschwindigkeit in der Sekunde nach dem Schnittpunkt hin bewegt, während der zweite, der anfänglich 2 *m* vom Schnittpunkt ent-

Digitized by Google

fernt ist, sich mit einer Geschwindigkeit von 12 m in der Sekunde vom Schnittpunkt entfernt.

47. Welches von allen Rechtecken gleichen Umfangs hat den größten Inhalt?

48. Welches von allen Rechtecken gleichen Inhalts hat den kleinsten Umfang?

49. Welches von allen gleichschenkligen Dreiecken, die in einen Kreis beschrieben sind, hat den größten Inhalt?

50. Welches von allen in einen Kreis beschriebenen Rechtecken hat den größten Inhalt?

50_1. Einer gegebenen Kugel soll ein Zylinder von möglichst großem Mantel einbeschrieben werden.

51. In ein gleichschenkliges Dreieck, dessen Grundlinie gleich a und dessen Höhe gleich h ist, ist ein anderes gleichschenkliges Dreieck beschrieben, dessen Spitze in der Mitte der Basis und dessen andere Ecken in den Schenkeln liegen. Wie hoch muß dies sein, wenn sein Inhalt ein Maximum sein soll?

52. In ein gleichschenkliges Dreieck ist ein Rechteck so beschrieben, daß zwei Ecken in der Basis, zwei in den Schenkeln liegen. Wie hoch muß dasselbe sein, wenn sein Inhalt ein Maximum sein soll?

53. Dieselbe Aufgabe für ein beliebiges Dreieck, dessen Seiten a, b und c sind. Auf welcher Seite muß man hier das Rechteck errichten, wenn es möglichst groß werden soll und $a > b > c$ angenommen wird?

53_1. Welcher unter allen einem geraden Kegel von der Höhe h und dem Grundkreisradius r einbeschriebenen Zylindern hat den größten Mantel?

53_2. Welcher von allen Zylindern, die dem vorstehend bezeichneten Kegel einbeschrieben werden können, hat den größten Rauminhalt?

53_3. Welcher von allen geraden Zylindern, für die die Summe der Höhe und des Grundkreisdurchmessers dieselbe Größe besitzt, hat die größte Gesamtoberfläche?

54. Um ein Quadrat soll ein gleichschenkliges Dreieck so beschrieben werden, daß zwei Ecken des Quadrats in der Basis des Dreiecks, die beiden anderen in den Schenkeln liegen. Welches von allen diesen Dreiecken hat den kleinsten Inhalt?

55. Um ein rechtwinkliges Parallelogramm, dessen lange Seite gleich a, dessen kurze Seite gleich b ist, soll ein Dreieck so beschrieben werden, daß die eine Seite durch zwei Ecken des Parallelogramms geht, die beiden anderen Seiten durch je eine der beiden anderen Ecken. Wie hoch und von welcher Form muß das Dreieck sein, wenn sein Inhalt ein Minimum werden soll?

56. In ein Quadrat soll ein gleichschenkliges Dreieck beschrieben

Digitized by Google

werden, dessen Inhalt ein Maximum ist. Die Spitze des Dreiecks soll in einer Ecke des Quadrats liegen, die beiden anderen Ecken in den gegenüberliegenden Seiten des Quadrats.

57. Dieselbe Aufgabe für einen Quadranten. Die Spitze des Dreiecks soll in dem Mittelpunkt liegen, die beiden anderen Ecken in dem Bogen.

XXXI. Graphische Darstellungen.

A. Theorie.

1. Um für den Vergleich gewisser Größenverhältnisse eine anschauliche Unterlage zu gewinnen, bedient man sich zweckmäßigerweise der Zeichnung, man schafft sich eine „graphische Darstellung".

So stellt man bisweilen z. B. die Größe von Ländern durch Quadrate dar, deren Flächen in demselben Verhältnis stehen, wie die Länder selbst, aber diese Größenverhältnisse weit augenfälliger machen.

Am anschaulichsten ist die Darstellung durch Linien, deren Längen in demselben Verhältnis stehen, wie die durch sie repräsentierten Größen. Solche Darstellung ist sehr gebräuchlich für wirkliche geometrische Größen, wie z. B. Bergeshöhen, aber auch für Größen ganz anderer Art, Bevölkerungszahlen, Bevölkerungsdichtigkeiten, Stärken von Armeen, von Flotten, Ausdehnung des Eisenbahnnetzes in verschiedenen Ländern oder zu verschiedenen Zeiten, Größe und Wert der Produktion*) auf verschiedenen Erwerbsgebieten und in verschiedenen Ländern u. dgl. m.

2. Wichtiger noch als diese vergleichsweise Darstellung verschiedener voneinander unabhängiger Größen ist die graphische Darstellung der Abhängigkeit, in der eine veränderliche Größe y von einer anderen ebenfalls veränderlichen Größe x steht.

Hat man zwei feste aufeinander senkrechte gerade Linien („Achsen"), eine horizontale und eine vertikale, so kann man von ihrem Schnittpunkt aus auf der ersten Strecken abtragen, die den Größen x, auf der zweiten solche, die den Größen y entsprechen. Die Endpunkte irgend einer Strecke x und der zu ihr gehörenden Strecke y lassen sich dann als Horizontal- und Vertikal-Projektion eines Punktes ansehen, durch den die Zugehörigkeit von y zu x veranschaulicht wird.

Denkt man sich für alle möglichen Werte von x und y diese Punkte konstruiert, so bilden sie eine Linie („Kurve"), deren Gestalt die Art der Abhängigkeit, in der y von x steht, d. h. den Gang der Änderungen, die y erleidet, wenn x sich ändert, zur augenfälligen Darstellung bringt. Dabei kann man, weil jede der beiden Achsen durch den Schnittpunkt in zwei Hälften geteilt wird, die eine Hälfte

*) Für diesen Zweck ist auch eine andere Art der Darstellung öfters im Gebrauch, nämlich durch Würfel, die — wenn sie aus reinem Gold bestünden — den Wert der Produktion darstellen würden.

Digitized by Google

für die positiven, die andere für die negativen Werte der auf dieser Achse zur Darstellung kommenden Größen (x und y) benutzen.

3. Diese Darstellung findet vielfach Verwendung für Änderungen, die man durch Beobachtungen bestimmt, z. B. die der Temperatur, der Dampfspannung, des Barometerstandes im Laufe einer gewissen Zeit.

Dabei stellen die Größen x die Zeiten dar, nach deren Ablauf die Beobachtungen gemacht werden. Wenn dies etwa alle Stunden geschieht, so markiert man auf der Horizontalachse Punkte, die sich in gleichen Abständen folgen — jeder solche Abstand stellt dann die Länge einer Stunde dar — der Maßstab ist dabei willkürlich, man wird sich nach dem verfügbaren Raum und der Forderung der Deutlichkeit richten.*)

In jedem solchen Punkte kann man dann gleich auf der Horizontalachse ein Lot von der Länge y errichten, die zu dem Abstande x dieses Punktes vom Achsenschnittpunkt gehört, z. B. bei allstündlichen Temperaturbeobachtungen im fünften Punkte die Strecke, die die Höhe der Temperatur am Ende der fünften Beobachtungsstunde (etwa 5 Uhr morgens), im 18. Punkte die Strecke, die die Temperatur nach 18 Beobachtungsstunden (6 Uhr abends) angibt.

4. Da Temperaturen und Zeiten sich nicht miteinander vergleichen lassen, wird man für jede dieser Größen einen besonderen Maßstab wählen, z. B. für die Länge einer Stunde 1 *cm*, für einen Temperaturgrad 2 *mm*. Auf die Schlüsse, die man aus der ganzen Darstellungsart zieht, hat die Wahl des Maßstabes keinen Einfluß.

Die Endpunkte der erwähnten Lote liegen auf der „Temperatur-Kurve". Diese Kurve selbst stellt man nun dadurch her, daß man die gefundenen Punkte durch eine krumme Linie verbindet, deren allgemeine Gestalt man nach der wechselnden Länge der errichteten Lote ungefähr beurteilen kann. Diese Beurteilung wird um so zutreffender ausfallen, je enger aneinander die Lote stehen, d. h. je kürzer die Zeiträume sind, in denen die Beobachtungen aufeinander folgen.**)

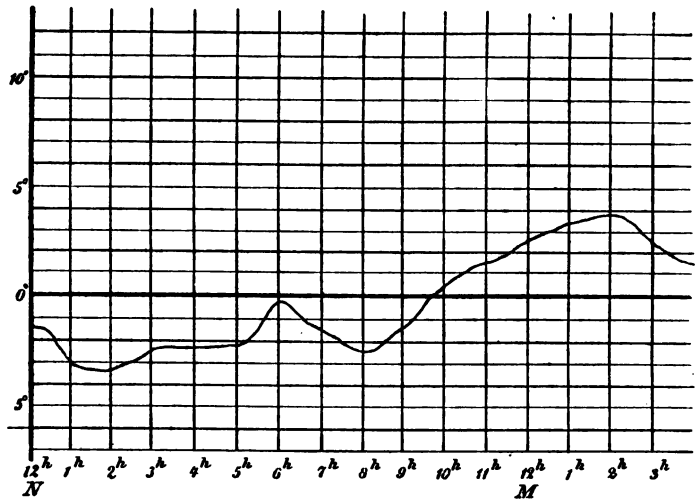
*) Das entgegengesetzte Prinzip, nämlich Darstellungen der Zeiten auf der Vertikalachse befolgt man bei den graphischen Fahrplänen der Eisenbahnen, auf denen die durchfahrenen Strecken auf der Horizontalachse hintereinander abgetragen werden. Bei dieser Darstellung sind die auf derselben Strecke im Laufe von 24 Stunden verkehrenden Züge mit einem Blick derart zu überschauen, daß die Möglichkeit der Einlegung eines neuen Zuges ohne weiteres beurteilt werden kann.

**) Es gibt auch selbstregistrierende Apparate, die den Gang solcher Veränderung ganz unmittelbar erkennbar machen, indem ein durch die zu beobachtende Veränderung in fortwährender Bewegung erhaltener Stift seine jedesmalige Stellung auf einem sich an ihm vorbeischiebenden Streifen aufzeichnet. Hier bedarf es keiner Abschätzung der Gestalt der Kurve, weil diese in ihrer ganzen Ausdehnung von selbst gezeichnet wird, natürlich auch in einem willkürlichen, von der Bewegungsgeschwindigkeit des Streifens und anderen äußeren Umständen abhängenden Maßstab.

Digitized by Google

Als Musterbeispiel diene die nachstehende Figur 1.

Fig. 1.



Aus solchen Kurven kann man dann vor allem ganz unmittelbar ersehen, für welchen Wert von x der zugehörige Wert von y sein Maximum oder sein Minimum erreicht. Demgemäß sind die Aufgaben 1. bis 6. zu lösen.

5. Bei den im vorstehenden erwähnten Vorgängen ist die Art der Abhängigkeit, in der y zu x steht, nicht von vornherein ersichtlich, man ist auf die Beobachtung angewiesen, um zu einem gewissen x das zugehörige y zu finden.

Es kann aber auch die Sache so liegen, daß der Zusammenhang zwischen x und y von vornherein durch eine mathematische Gleichung gegeben ist; diese Gleichung nennt man dann die Gleichung der ihr entsprechend gebildeten Linie.

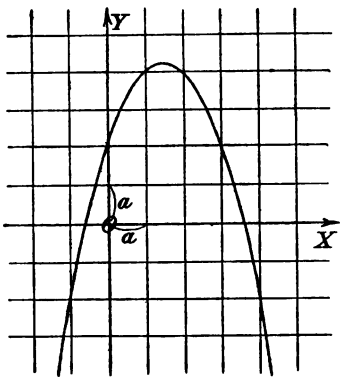
6. Hierbei werden y und x als rein mathematische Größen beide nach demselben Größenmaßstab aufgetragen, man kann dann leicht zu soviel Werten von x, als man will, die zugehörigen Werte von y bestimmen. Auch erkennt man dann bald die Punkte, in denen die Linie sich über die Nachbarpunkte erhebt, oder unter die Nachbarpunkte herunterfinkt. An den Punkten der ersten Art erhält die von x abhängende Größe y einen Maximalwert, an den Punkten der zweiten Art einen Minimalwert.*)

*) Gehört zu x_1 der Wert y_1, zu x_2 der Wert y_2, so stellt der Bruch $\frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$ offenbar die trigonometrische Tangente des Winkels dar, unter dem sich die durch die Endpunkte der Ordinaten y_1 und y_2 gehende Gerade gegen die Abszissenachse neigt. Fallen diese beiden Punkte zusammen, so wird diese Gerade zur Tangente an die betrachtete Kurve. Man erhält diese Tangente

Digitized by Google

7. Hierbei bezeichnet man die Horizontalachse als Abszissenachse, auf der die „Abszissen" x abgemessen werden, die Vertikalachse dient zur Abmessung der „Ordinaten" y; x und y zusammen heißen „Koordinaten". Als positive Richtung der Abszissen kann man z. B. die Richtung nach rechts, als positive Ordinaten-Richtung die nach oben wählen. Dann werden negative Abszissen nach links, negative Ordinaten nach unten aufgetragen. In jedem Punkte der Ordinatenachse ist $x = 0$, in jedem Punkte der Abszissenachse $y = 0$. Setzt man in der graphisch darzustellenden Gleichung $x = 0$, so stellt der sich dann ergebende Wert von y die Strecke dar, welche von der betreffenden Linie auf der Ordinatenachse abgeschnitten wird. Fällt dieser Wert positiv aus, so wird die Ordinatenachse in ihrem oberen, fällt er negativ aus, so wird sie in ihrem unteren Teile geschnitten. Ebenso erhält man, indem man $y = 0$ setzt, durch den sich dann ergebenden Wert von x die Strecke, welche die Linie auf der Abszissenachse abschneidet. Fällt dieser Wert positiv aus, so wird die Abszissenachse rechts, anderenfalls links geschnitten. Gehört zu $x = 0$ auch der Wert $y = 0$, so geht die Linie durch den Schnittpunkt der beiden Achsen, den Koordinaten-Anfang oder Nullpunkt.

Fig. 2.



Ist es nicht möglich $y = 0$ zu setzen, ohne daß x imaginär wird, so gibt es überhaupt keinen Schnittpunkt der in Betracht gezogenen Linie mit der Abszissenachse; erhält man durch die Annahme $x = 0$ für y einen imaginären Wert, so existiert kein Schnittpunkt der Linie mit der Ordinatenachse.

8. Im übrigen hängt die Gestalt der zu zeichnenden Linie von der Art der Gleichung ab, die durch sie dargestellt werden soll. Man erkennt bald, daß durch Gleichungen ersten Grades gerade Linien dargestellt werden, während Gleichungen höheren Grades oder transzendente Gleichungen auf krumme Linien führen.

Als Musterbeispiel diene die die Gleichung $y = 2a + 3x - \frac{x^2}{a}$ graphisch darstellende Fig. 2.

---

also, wenn man in dem eben genannten Bruche nach gehöriger Vereinfachung (Ausführung der Division) $x_1 = x_2$ setzt. Setzt man den Wert dieses Bruches außerdem noch gleich Null, so erhält man eine der Abszissenachse parallel laufende Tangente, bei dieser Lage verläuft die Kurve entweder oberhalb oder unterhalb der Tangente, d. h. der Wert von y, der zu dem Berührungspunkt gehört, stellt entweder ein Minimum oder ein Maximum von y vor. Dieser Sachverhalt läßt die geometrische Bedeutung des in Abschnitt XXX, A, Nr. 5 gelehrten Verfahrens für die Bestimmung der Maximal- und Minimal-Werte erkennen

Digitized by Google

Demgemäß sind nun die Kurven zu zeichnen, die den in den Aufgaben 7. bis 72. angegebenen Gleichungen entsprechen. Die überall daselbst vorkommende Größe a ist als Einheitsstrecke (z. B. eine Strecke von der Länge 1 *cm*) zu verwenden Es sind soviel Punkte der Linie zu konstruieren, daß über die Gestalt derselben kein Zweifel bestehen kann. Die Konstruktion wird sehr erleichtert, wenn man Papier benutzt, das in lauter kleine Quadrate geteilt (karriert) ist, wobei dann die Seitenlänge eines solchen Quadrats gleich als Einheitsstrecke a verwertet werden kann.

B. Aufgaben.

1. In der zweiten Hälfte des Juni 1879 zeigte in Eberswalde an der Erdoberfläche im Freien das Thermometer (nach Celsius) um die in der ersten Zeile angegebene Stunde (von Mitternacht anfangend) durchschnittlich die in der zweiten Zeile angegebene Gradzahl:

12	2	4	6	8	10	12
16,7	15,6	15,1	15,9	17,5	22,6	25
	2	4	6	8	10	12
	26,4	25,9	22,4	19,7	17,8	16,7

Das Thermometer erreichte den niedrigsten Stand um $3\frac{1}{2}$ Uhr morgens, den höchsten um 3 Uhr nachmittags. Der tägliche Gang der Temperatur soll graphisch dargestellt oder die Tageskurve konstruiert werden.*)

2. In einer Höhe von 0,15 *m* über dem Erdboden war die mittlere Temperatur zu den in der vorhergehenden Aufgabe angegebenen Stunden bez.

19,4	18,4	17,8	17,4	17,5	18,8	20,5
	22	22,9	22,6	21,6	20,5	19,4

Grad. Die Temperatur war am niedrigsten kurz vor 7 Uhr morgens, am höchsten um $4\frac{1}{2}$ Uhr nachmittags. Der Gang der mittleren täglichen Bodentemperatur soll graphisch dargestellt werden.

3. Im Walde an der Erdoberfläche war die mittlere Temperatur in der genannten Zeit zu den angegebenen Stunden bez.

15,3	14,6	14,3	14,6	16,1	18,7	19,8
	20,8	20,4	19,1	17,5	16,2	15,3

Grad. Der niedrigste Stand des Thermometers war $3\frac{1}{2}$ Uhr morgens, der höchste $2\frac{1}{2}$ Uhr nachmittags. Der Gang der Temperatur soll graphisch dargestellt werden.

4. Auf freiem Felde betrug die mittlere Temperatur in einer Tiefe von 0,60 *m* in den Monaten Januar, Februar usw. bis Dezember der Reihe nach

*) Die hier benutzten Angaben sind einer Abhandlung über Erdbodentemperatur von Prof. Dr. A. Müttrich entnommen.

Digitized by Google

1,4 0,9 2,5 6,0 10,8 16 18 18 14,8 10,2 5,8 2,4

Grad. Die Temperatur war am niedrigsten kurz vor Mitte Februar, am höchsten zu Anfang August. Der Gang der mittleren monatlichen Temperatur soll graphisch dargestellt werden.

5. Beobachte selbst den Thermometerstand allstündlich von früh 8 Uhr bis abends 8 Uhr und stelle seine Änderungen graphisch dar.

6. Führe dasselbe für den Barometerstand aus.

Die folgenden Gleichungen stellen gerade Linien dar. Diese sollen konstruiert werden. Hier genügt die Bestimmung von zwei Punkten. Man sucht die Punkte, in denen die Achsen geschnitten werden. Doch suche der Schüler auch andere Punkte auf und überzeuge sich, daß alle Punkte, welche die Gleichung liefert, in einer geraden Linie liegen.

7. $y = x$
8. $y = 2x$
9. $x + y = 0$
10. $x = y + a$
11. $x = 2a$
12. $y = a$
13. $2x - y = 3a$
14. $3x + y = 5a$
15. $2x + 3y = 6a$
16. $2x - 3y = 12a$
17. $3x - 2y = 12a$
18. $2x + 3y + 6a = 0$
19. $\frac{x}{3} - \frac{y}{2} = a$
20. $\frac{x}{2} + \frac{y}{3} = a.$

Folgende Gleichungen stellen Kreise dar. Diese sollen konstruiert, dazu die Lage des Mittelpunkts und die Größe des Radius bestimmt werden.

21. $y = \sqrt{25a^2 - x^2}$
22. $x^2 + y^2 = 16a^2$
23. $y = a + \sqrt{16a^2 - x^2}$
24. $y = -2a + \sqrt{25a^2 - x^2}$
25. $x^2 + (y - 2a)^2 = 9a^2$
26. $x^2 + (y + \frac{3}{5}a)^2 = 25a^2$
27. $(x - a)^2 + y^2 = 16a^2$
28. $(x + a)^2 + y^2 = 36a^2$
29. $y = \sqrt{16a^2 + 6ax + x^2}$
30. $y = \sqrt{21a^2 - 4xa - x^2}$
31. $y = 2a + \sqrt{6xa - x^2}$
32. $y = a + \sqrt{24a^2 + 2ax - x^2}$
33. $(x - 2a)^2 + (y - 3a)^2 = 25a^2$
34. $(x + a) + (y - 2a) = 9a^2.$

Folgende Gleichungen stellen geschlossene krumme Linien von länglich runder Form dar, welche Ellipsen heißen. Konstruiere sie und zeige, daß hier weder y noch x über eine gewisse Grenze hinauswachsen kann, ohne daß dann der zugehörende Wert von x und y imaginär werden würde. Zeige, daß die ersten zehn Gleichungen Linien darstellen, welche sowohl gegen die Abszissenachse, als gegen die Ordinatenachse symmetrisch liegen und also durch jede dieser beiden

Digitized by Google

Koordinatenachsen symmetrisch geteilt werden. Gib in diesen Fällen die Längen der Strecken an, die auf den beiden Koordinatenachsen durch die Ellipse abgeschnitten werden (die beiden Hauptdurchmesser der Ellipse, die als große und kleine Achse der Ellipse bezeichnet zu werden pflegen).

Folgere aus der Form der Gleichungen 45. und 46., daß die durch sie dargestellten Ellipsen gegen die Koordinatenachsen nicht symmetrisch liegen.

35. $y = \frac{4}{5}\sqrt{25a^2 - x^2}$ 36. $y = \frac{3}{4}\sqrt{16a^2 - x^2}$

37. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = a^2$ 38. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = a^2$

39. $y = 2a + \frac{3}{5}\sqrt{25a^2 - x^2}$ 40. $y = a + \frac{4}{3}\sqrt{9a^2 - x^2}$

41. $y = \frac{4}{5}\sqrt{16a^2 + 6ax - x^2}$ 42. $y = \frac{3}{4}\sqrt{12a^2 + 4xa - x^2}$

43. $\frac{(x+a)^2}{29} + \frac{y^2}{9} = a^2$ 44. $\frac{x^2}{25} + \frac{(y-2a)^2}{9} = a^2$

45. $y = x + \sqrt{16a^2 - x^2}$ 46. $y = 2x + \sqrt{9a^2 - x^2}$.

Folgende Gleichungen stellen krumme Linien dar, welche Parabeln genannt werden. Sie sind nach einer Richtung geschlossen, nach der anderen sind sie offen und erstrecken sich bis ins Unendliche. Folgere aus der Form der Gleichung, daß jede der durch die ersten sechs Gleichungen dargestellten Parabeln durch eine der Koordinatenachsen, jede der folgenden vier durch eine Parallele zu einer der Koordinatenachsen symmetrisch geteilt wird.

47. $y = \sqrt{ax}$ 48. $ay = x^2$

49. $y = \sqrt{2xa}$ 50. $ay = \frac{1}{3}x^2$

51. $y^2 = 3ax - a^2$ 52. $ay = \frac{1}{2}x^2 - 2a^2$

53. $y = a + \sqrt{3ax + 2a^2}$ 54. $y = 2a + \sqrt{3ax - 2a^2}$

55. $x^2 - 4ax = 2ay$ 56. $x^2 - 2ax = 3ay$

57. $y = x + \sqrt{2ax}$ 58. $y = \frac{1}{2}x + \sqrt{ax - 2a^2}$.

Folgende Gleichungen stellen krumme Linien dar, welche man Hyperbeln nennt. Folgere aus der Natur der nachstehend angeführten Gleichungen, daß bei solchen Linien gewisse Werte von x und y nicht vorkommen können, weil sonst die entsprechenden Werte von y und x imaginär werden würden. Zeige insbesondere, daß in den Fällen 59. bis 68. kein Schnittpunkt der Linie mit der Ordinatenachse vorhanden ist, während rechts und links dieser Achse Punkte der Kurve vorhanden sind, daß diese also aus zwei voneinander getrennten Teilen (Ästen) bestehen muß. Untersuche auch diese Linien darauf, ob und inwieweit sie gegen die Koordinatenachsen symmetrisch liegen,

Digitized by Google

stelle insbesondere die Lage fest, die die durch die Gleichungen 69. und 70. dargestellten Linien gegen die Koordinatenachsen haben.

59. $y = \frac{3}{4}\sqrt{x^2 - 16a^2}$
60. $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9a^2}$
61. $y = \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4a^2}$
62. $y = \frac{4}{3}\sqrt{x^2 - 9a^2}$
63. $\frac{x^2}{9} - y^2 = a^2$
64. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{4} = a^2$
65. $y = \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 6xa}$
66. $y = 2\sqrt{x^2 - 2xa}$
67. $y = a + \frac{2}{3}\sqrt{x^2 - 9a^2}$
68. $y = 2a + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 2xa}$
69. $y = \frac{a^2}{x}$
70. $y = \frac{2a^2}{x}$
71. $y = x + \frac{1}{2}\sqrt{x^2 - 4a^2}$
72. $3x = y + 2\sqrt{y^2 - 9a^2}$.

Digitized by Google

Anhang.

Übersicht der in der Sammlung auftretenden Fremdwörter.*)

Abszisse, die abgeschnittene (Strecke), vom lat. Zeitw. abscindere (abtrennen).

Absolut, selbständig bestehend, an keine Bedingung gebunden (Partiz. des lat. Zeitworts absolvere, loslösen).

Addieren, Addition vom lat. Zeitwort addere (hinzufügen).

Amortisieren, tilgen, vom franz. Zeitw. amortir.

Äquator, der Gleicher, vom lat. Zeitwort aequare (gleichmachen) (franz. équateur, engl. equator, span. ecuador).

Äquivalent, gleichwertig, vom lat. aequus (gleich), valere (gelten, wertsein).

Affirmativ, bejahend, vom lat. Zeitwort affirmare (bekräftigen).

Aggregat, Zusammenscharung, vom lat. Zeitwort aggregare (zugesellen, Ableitung vom Hauptwort grex, die Herde).

Agrimensoren, Feldmesser, vom lat. ager (Feld) und metior, mensus sum, metiri (messen).

Arithmetik, Zahlwissenschaft, vom griech. arithmos (die Zahl).

Atmosphäre, vom griech. atmos (Dampf) und sphaira (Kugel).

Atmosphärometer, Apparat zur Bestimmung der Spannung einer abgesperrten Luftmenge.

Atom, unteilbare Größe, vom griech. temno (schneiden) mit Vorsilbe a (entspr. dem deutschen „un").

Axiom, von selbst einleuchtender Satz (vom griech. axioma, Würdigung).

Barometer, Luftdruckmesser, eigentlich Schweremesser, vom griech. baros (Schwere; barys schwer) und metron (das Maß) (ins Deutsche übernommen aus dem franz. le baromètre).

Basis, griech., Grundlage (Abl. v. Zeitw. baino, gehen).

Binom, zweiteilige Größe, vom griech. nomion (das Zugeteilte; Ableitung von nomos, Gesetz, Ordnung) und der die Zweiheit ausdrückenden Vorsilbe bi).

Charakteristik, vom griech. Charakter (der Präger, der Stempel, Abl. v. Zeitw. charasso, einritzen, prägen).

---

*) Ausführlichere Belehrung gewährt „Was muß der Gebildete vom Griechischen wissen" von Professor Dr. Adolf Hemme (Leipzig, Avenarius 1900).

Digitized by Google

Dezimal, vom lat. decimus (der zehnte). Dekadisch, vom griech. deka (zehn).

Diagonale, vom griech. dia (durch) und gony (das Knie, die Ecke).

Differenz, Unterschied (lat. differentia vom Zeitwort differre).

Direkt, gerade, unmittelbar (Part. des lat. Zeitworts dirigere, richten, leiten).

Diskriminante, die zur Unterscheidung dienende Größe, vom lat. Zeitw. discriminare (unterscheiden).

Divergieren, auseinanderstreben, sich voneinander entfernen, vom lat. Zeitw. vergere (sich neigen, gerichtet sein).

Dividieren, Division, teilen, Teilung (vom lat. Zeitwort dividere).

Dividend, die zu teilende Größe (lat. dividendus [nämlich numerus], vgl. Dividende).

Dividuus, teilbar (Gegensatz das Individuum, ein nicht mehr zu teilender, wenigstens ohne völlige Vernichtung seines Wesens nicht mehr zu teilender Gegenstand).

Divisor, Teiler (von dividere).

Duodezimal, vom lat. duodecim, zwölf (Zusammens. von duo, zwei und decem, zehn).

Element, Grundbestandteil (lat. elementum).

Eliminieren, wörtlich: über die Schwelle schaffen (lat. eliminare, Abl. v. limen, die Schwelle und dem Verhältniswort e, aus).

Ellipse, vom griech. elleipsis (Mangel), eine nur bei näherer Kenntnis der Kegelschnittslehre voll verständliche Bezeichnung.

Exempel, vom lat. exemplum, das Beispiel.

Exponent, der Herausseţende, Emporhebende, vom lat. Zeitwort exponere (herausseţen).

Faktor, der Macher, der, durch den etwas zustande kommt, vom lat. Zeitwort facere (machen).

Fundamental, grundlegend, vom lat. fundamentum (Grundlage).

Geometrie, Erdmessung, vom griech. gaea (die Erde) und metron (das Maß).

Grad, vom lat. gradus (Schritt).

Graphisch, zeichnerisch, vom griech. graphein (zeichnen, schreiben, vgl. Telegraph, Photograph usw.).

Homolog, entsprechend, vom griech. homos (gleich) und dem Zeitwort lego (sagen).

Horizont, vom griech. Zeitw. horizo (begrenzen).

Hyperbel, vom griech. hyperbole Übermaß (s. d. Bem. zu Ellipse).

Hypotenuse (griech. Partiz. d. Zeitw. hypoteino, sich unten ausbreiten).

Imaginär, eingebildet, nicht wirklich, nur in Gedanken bestehend (vom franz. s'imaginer).

Index, Anzeiger (lat. Hauptwort, gebildet von dem Zeitwort dicere, sagen).

Indirekt, Gegensatz von direkt, mittelbar, entgegengeseţt gerichtet.

Digitized by Google

Interpolieren, einschalten, vom lat. Zeitw. interpolare (zurichten, durch Zusätze verfälschen).

Irrational, Gegensatz von rational (s. d.).

Kapital, Ableit. v. lat. caput (der Kopf), die Hauptsache, von der alles andere abhängt.

Kalorie, Wärmeeinheit, vom lat. calor (die Wärme, franz. la chaleur).

Katheten, die (zueinander) senkrechten (Seiten), vom griech. kathetos (das Lot, Ableit. v. Zeitw. kathiemi, herablassen).

Koeffizient, der Mithelfer beim Zustandebringen eines Produkts, vom lat. Zeitwort efficere (bewirken, zustande bringen) und dem Verhältniswort cum [con] (mit).

Kongruenz, Übereinstimmung, vom lat. Zeitw. congruere.

Konjunktion (lat). wörtlich Verbindung, scheinbares Zusammenstehen von Gestirnen.

Konstruieren, Konstruktion, vom lat. Zeitw. construere (zusammenhäufen, bauen).

Koordinaten, die (einander) zugeordneten (Strecken), vom lat. Zeitw. coordinare.

Korrespondierend, entsprechend, vom lat. Zeitwort respondere (antworten) und cum [con]).

Konvergieren, nach demselben Ziele streben, sich nähern, von cum und vergere (s. divergieren).

Kubieren, vom lat. cubus (Würfel).

Kurve die krumme (Linie) vom lat. Adj. curvus.

Legierung, vom lat. Zeitw. ligare (binden, ital. legare).

Logarithmus, Beziehungszahl, von dem griech. arithmos (die Zahl) und dem vieldeutigen Wort logos (Wort, Vernunft, hier etwa mit vernünftige Beziehung zu übersetzen).

Mathematik, vom griech. mathema (der Lerngegenstand, die Wissenschaft).

Maximum (Mehrzahl Maxima, lat.), wörtlich das Größte, der größte Wert.

Meridian, vom lat. meridies (der Mittag).

Methode, wörtlich der Mitweg, die Anweisung zum Erreichen des Zieles, vom griech. meta (mit), hodos (der Weg).

Minuend, die zu vermindernde Größe, vom lat. Zeitwort minuere (vermindern).

Minimum (lat.), wörtlich „das Kleinste" (vgl. Maximum).

Minus, weniger (lat. Adv.).

Minute, Zeit- oder Bogen-Teil, lat. pars minuta (d. h. verringerter Teil), später pars minuta prima (d. h. im ersten Grade verringerter Teil, vgl. Sekunde).

Molekül, franz., vom lat. molecula (kleine Masse; moles, die Masse).

Moment (eig. movimentum vom lat. movere, bewegen) ausschlaggebendes Etwas.

Monom, einteilige Größe (eigentlich mono-nomion, vom griech. monos, allein, einzeln [Monogramm, Monolog ꝛc.] und nomion, s. Binom).

Digitized by Google

Multiplikand, Multiplikation, Multiplikator, Multiplizieren, vom lat. multiplicare (vervielfachen; vgl. dividieren).

Negativ, von entgegengesetztem Sinne, wie eine andere Größe, vom lat. Zeitwort negare (verneinen).

Null, vom lat. Adj. nullus (keiner).

Numerieren, zählen (lat. numerare, s. Numerus).

Numerus (lat.) die Zahl, insbesondere die eigentliche Zahl im Gegensatz zum Logarithmus.

Operation, Operieren, vom lat. Zeitwort operare (verrichten).

Opposition (lat.) Gegensatz, in der Astronomie Gegenüberstehen zweier Gestirne von der Erde aus gesehen.

Ordinate, die (senkrecht zur Abszisse) angeordnete Strecke, vom lat. Zeitw. ordinare.

Oxyd, Sauerstoffverbindung (vom griech. oxys, scharf, sauer — Oxygenium [O], der Säureerzeuger, Sauerstoff).

Parabel, vom griech. parabole (Vergleichung, Gleichnis, s. d. Bem. zu Ellipse).

Parallel, griech. parallelos, Abl. von para (bei, neben) und alleloin (einander).

Parallelepipedon, Körper, der von parallelen Flächen begrenzt wird, vom griech. parallelos (s. vorher) und epipedon (die Ebene).

Parallelogramm, Figur, die von parallelen Ebenen begrenzt wird, vom griech. parallelos (s. vorher) und gramme (die Linie).

Pari, vom ital. al pari (auf gleichem (Fuße), zu gleichem (Satze)).

Periode, vom griech. peri (um) und hodos (Weg), der sich wiederholende Abschnitt.

Peripherie, vom griech. peri (um) und phero (tragen).

Plus, mehr (lat. Adv.).

Point, Punkt (französisch).

Polynom, mehrgliedriger Ausdruck, vom griech. polys (viel) und nomion [s. Binom].

Positiv, hingestellt, vorhanden, Gegensatz von negativ, verneint, nicht vorhanden, vom lat. Zeitwort pono, posui, positum, ponere — (setzen, stellen; franz. poser — vgl. Exponent).

Potenz, zu höherer Bedeutung erhobene Größe, vom lat. potentia (die Macht; franz. puissance oder auch dignité, die Größe von höherem Range, engl. power).

Prämie, vom lateinischen praemium, Belohnung.

Prinzip, Grundlage für Anderes, Satz von großer Tragweite, Ausgangspunkt (lat. Abl. von primus, der erste, capere, nehmen).

Prisma, prismatisch, griech. (Ableit. von prio, sägen).

Produkt, das Hervorgebrachte, vom lat. producere (hervorbringen).

Progression, vom lat. Zeitw. progredior, fortschreiten (vgl. Grad).

Projektion, Projizieren, Hinwurf, Hinwerfen, Entwerfen, vom lat. Zeitwort projicere (hinstrecken).

Proportion, Proportionale (vom lat. proportio, Ebenmaß).

Digitized by Google

Prozent, für, aufs Hundert, aus dem lat. pro (für) und centum (Hundert) — (franz. pour cent, nach österreich. Ausdrucksweise Perzent).

Punkt, lat. punctum (Part. v. Zeitw. pungere, stechen).

Pyramide, vom griech. pyramis (wahrscheinlich aus dem Ägyptischen entlehnt).

Quadrat, Quadrieren, vom lat. quadratus (viereckig).

Quotient, Verhältniswert, vom lat. quotus (der wievielte), quoties (wieviel).

Radius, Strahl (lat.; griech. rhadios).

Radizieren, der Wurzelausziehung unterwerfen, vom lat. radicare (Abl. von radix, Wurzel); Partiz. dazu der **Radikand**, die zu radizierende Größe.

Rational, wörtlich vernunftgemäß (vom lat. ratio), in angebbarem Verhältnis stehend.

Relation, Beziehung } aus dem lat. relatio, relativus (abgeleitet von
Relativ, bezüglich } refero, relatum, referre).

Rezipient, der Aufnehmende, das Gefäß, vom lat. recipere (aufnehmen).

Reziprok, gegenseitig (lat. reciprocus; das die Gegenseitigkeit ausdrückende deutsche Fürwort ist **einander**).

Rhombus (griech., eigentlich der Umschwung, der Kreisel).

Sekante, die schneidende (Linie), vom lat. secare (schneiden).

Sektion, der Abschnitt (von secare).

Sekunde, Zeit- und Bogen-Teil, vom lat. pars minuta secunda (d. h. im zweiten Grade verringerter Teil, vgl. Minute).

Spezifisch, charakteristisch für die Art, das Wesen der Art ausmachend, vom lat. species (Art) und facere (machen).

Stereometrie, Körpermessung, vom griech. stereos (starr, körperlich) und metron (vgl. Stereoskop).

Substituieren, Substitution, Einsetzen, Einsetzung (vom lat. substituere).

Subtrahieren, Subtrahend, Subtraktion, vom lat. Zeitw. subtrahere (darunter hervorziehen, heimlich hinwegnehmen).

Summe, die alles zusammenfassende, demgemäß alles an Wert überragende Größe, vom lat. summus (der höchste — franz. la somme, ital. somma).

Summieren, Summand (vom lat. summare, Abl. von summus).

Symmetrisch, griech. symmetros (zusammen gemessen, gleiche Abmessungen zeigend).

System, Zusammenstellung, vom griech. syn (mit) und histemi (stellen).

Tangente, die berührende (Linie), vom lat. tangere (berühren).

Temperatur, Wärmemaß, vom lat. Zeitwort temperare (gehörig ordnen, richtig bemessen).

Termin, vom lat. terminus (Grenzstein, Endziel).

Tetraeder, Vierflächner, vom griech. tetra [tessares] (vier) und hedra (der Sitz, die Fläche).

Digitized by Google

Theorem, der Lehrsatz (griech. theorema, von theoreo, anschauen).
Theorie, die Lehre (vgl. vorstehend).
Thermometer, der Wärmemesser, vom griech. thermos (warm) und metron (vgl. Barometer).
Transzendent (über die Algebra) hinausgehend, vom lat. Zeitw. transcendere (überschreiten).
Transformieren, umformen (vom lat. Zeitwort transformare).
Transversale, Querlinie durch eine Figur, vom lat. trans (jenseits, hinüber) und vertere (wenden).
Trinom, dreiteilige Größe (vgl. Binom, Monom, Polynom).
Vertikal, scheitelrecht, vom lat. vertex (Scheitel).
Volumen, Rauminhalt, lat. (Abl. vom Zeitw. volvo, wälzen — eigentlich Krümmung, Windung, Rolle, Schriftrolle, Band [eines Werkes]).
Zylinder (Cylinder), Walze (vom griech. kylindros).

Digitized by Google

Druck von B. G. Teubner in Leipzig.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

YC 22375

M323134

Digitized by Google

Digitized by Google